Известия НАН Армении, Физика, т.50, №2, с.169-175 (2015)

УДК 533.9

О ВЛИЯНИИ НЕОДНОРОДНОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПЛОСКОГО ВИГЛЕРА НА СПЕКТРАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СПОНТАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И НА КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ

К.Б. ОГАНЕСЯН

Национальная научная лаборатория им. А.И. Алиханяна, Ереван, Армения

e-mail: bsk@yerphi.am

(Поступила в редакцию 5 ноября 2014 г.)

Вычислены спектральное распределение спонтанного излучения электронов, движущихся в плоском виглере (ондуляторе) с неоднородным магнитным полем и коэффициент усиления. Показано, что электроны совершают сложное движение, состоящее из медленной (строфотронной) и быстрой (ондуляторной) частей. Усредняя уравнения движения по быстрой части, получаем уравнения для связанного движения. Показано, что учет неоднородности магнитного поля приводит к появлению дополнительных пиков в спектральном распределении спонтанного излучения и в коэффициенте усиления.

1. Введение

Лазеры на свободных электронах (ЛСЭ) являются мощными перестраиваемыми когерентными источниками излучения, которые используются в научных исследованиях, для нагрева плазмы, в физике конденсированных сред, в атомной, молекулярной и оптической физике, в биофизике, биохимии, биомедицине и т.д. ЛСЭ сегодня производят излучение в диапазоне от миллиметровых до рентгеновских волн, в котором никакой другой интенсивный перестраиваемый источник не существует [1,2]. Эта область современной науки интересна как с точки зрения фундаментальных исследований, так и прикладных применений.

ЛСЭ [3,4] используют кинетическую энергию релятивистских электронов, движущихся через пространственно-модулированное магнитное поле виглера, производя когерентное излучение. Частота излучения определяется энергией электронов, пространственным периодом и напряженностью магнитного поля виглера. Это позволяет перестраивать ЛСЭ в широком диапазоне в отличие от атомных или молекулярных лазеров. В обычном ЛСЭ магнитное поле виглера постоянно, но оно неоднородно в поперечном направлении [5]. Важно учесть эту неоднородность, которая приводит к сложному движению электронов: быстрым ондуляторным колебаниям вдоль оси виглера и медленным строфотронным [6-14] – в поперечном направлении.

В настоящей работе описаны уравнения движения электронов, движущихся вдоль оси виглера с пространственно–неоднородным магнитным полем. Целью работы является вычисление спектрального распределения спонтанного излучения и коэффициента усиления.

2. Уравнения движения

Векторный потенциал магнитного поля ондулятора имеет вид [15]

$$\mathbf{A}_w = -\frac{H_0}{q_0}\cosh q_0 x \sin q_0 z \mathbf{j}, \tag{1}$$

где H_0 – напряженность магнитного поля, $q_0 = 2\pi/\lambda_0$, λ_0 – период виглера, $\mathbf{j}$ – единичный вектор в направлении y. В дальнейшем будем рассматривать параксиальное приближение

$$q_0 x \ll 1. \tag{2}$$

С учетом (2) магнитное поле (1) приобретает вид:

$$H_x = H_0\left(1+\frac{q_0{}^2 x^2}{2}\right)\cos q_0 z; \quad H_y = 0; \quad H_z = H_0 q_0 x \sin q_0 z. \tag{3}$$

Уравнения движения ($c=1$)

$$d\mathbf{p}/dt = e[\mathbf{vH}] \tag{4}$$

в поле (3) имеют вид:

$$\begin{gathered}\ddot{x} = -\frac{eH_0 q_0}{\varepsilon} x\dot{y}\sin q_0 z, \\ \ddot{y} = \frac{eH_0}{\varepsilon}\left[\dot{z}\left(1+\frac{q_0{}^2 x^2}{2}\right)\cos q_0 z + q_0 x\dot{x}\sin q_0 z\right], \\ \ddot{z} = \frac{eH_0}{\varepsilon}\left(1+\frac{q_0{}^2 x^2}{2}\right)\dot{y}\cos q_0 z,\end{gathered} \tag{5}$$

а изменение энергии:

$$d\varepsilon/dt = 0, \quad \varepsilon = \mathrm{const}.$$

При получении (5) учтено, что $p_{x,y,z} = v_{x,y,z}\varepsilon$.

Можно видеть, что

$$\left(\frac{q_0 x^2}{2}\sin q_0 z\right)' = q_0 x\dot{x}\sin q_0 z + \frac{q_0{}^2 x^2}{2}\dot{z}\cos q_0 z, \tag{6}$$

$$\int \dot{z}\cos q_0 z dt = \int \cos q_0 z dz = \frac{\sin q_0 z}{q_0}. \tag{7}$$

Используя соотношения (6) и (7), можно проинтегрировать второе уравнение (5) и получить

$$\dot{y} = \frac{eH_0}{\varepsilon q_0}\left(1 + \frac{q_0^{\,2} x^2}{2}\right)\sin q_0 z\,. \tag{8}$$

Подставляя (8) в первое и третье уравнения (5) и учитывая (2), получаем

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\left(\dfrac{eH}{\varepsilon}\right)^2 x \sin^2 q_0 z, \\ \ddot{z} = -\dfrac{1}{2q_0}\left(\dfrac{eH}{\varepsilon}\right)^2 \sin 2q_0 z\left(1 + q_0^{\,2} x^2\right). \end{cases} \tag{9}$$

Усредняя первое уравнение (9) по периоду $2\pi / q_0$ и учитывая, что $\overline{\left(\sin^2 q_0 z\right)} = 1/2$, получаем

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = 0\,. \tag{10}$$

Решением последнего является

$$x = a_0 \cos\left(\Omega t + \theta_0\right), \tag{11}$$

где

$$\Omega = \frac{eH_0}{\sqrt{2}\varepsilon}, \quad a_0 = \sqrt{x_0^{\,2} + \frac{\alpha^2}{\Omega^2}}, \quad \cos\theta_0 = \frac{x_0}{a_0}, \quad \sin\theta_0 = -\frac{\alpha / \Omega}{a_0}. \tag{12}$$

Усреднение второго уравнения (9) дает

$$\left(\ddot{z}\right)^{(0)} = 0, \quad \left(\dot{z}\right)^{(0)} = v, \quad \left(z\right)^{(0)} = vt. \tag{13}$$

Решением второго уравнения (9) с учетом (11) и (13) является

$$\begin{aligned} \delta z = &-\frac{\Omega^2}{2q_0^{\,2}} t + \frac{\Omega^2}{2q_0^{\,3}} \sin 2q_0 t + \frac{a_0^{\,2}\Omega^2}{16q_0} \sin\left\{2\left(q_0 + \Omega\right)t + 2\theta_0\right\} + \\ &+ \frac{a_0^{\,2}\Omega^2}{16q_0} \sin\left\{2\left(q_0 - \Omega\right)t - 2\theta_0\right\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Таким образом, для $z = z^{(0)} + \delta z$ имеем:

$$\begin{aligned} z = &\, t\left(1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{\Omega^2}{2q_0^{\,2}}\right) + \frac{\Omega^2}{4q_0^{\,3}} \sin 2q_0 t + \frac{a_0^{\,2}\Omega^2}{16q_0} \sin\left\{2\left(q_0 + \Omega\right)t + 2\theta_0\right\} + \\ &+ \frac{a_0^{\,2}\Omega^2}{16q_0} \sin\left\{2\left(q_0 - \Omega\right)t - 2\theta_0\right\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь мы учли, что $1 - v = 1\big/\left(2\gamma^2\right)$, где $\gamma = \varepsilon\big/\left(mc^2\right)$ – релятивистский фактор, m – масса электрона, c – скорость света и ε – энергия электронов.

Полученные результаты справедливы при следующих приближениях:

$$a_0 q_0 < 1, \quad \frac{\Omega}{q_0} < 1, \quad a_0 \Omega < 1. \qquad (16)$$

В продольном направлении (вдоль оси виглера) электроны совершают быстрые (ондуляторные) осцилляции, в то время как в поперечном – в одном направлении (ось x) совершают медленные (строфотронные) и в другом направлении (ось y) быстрые (ондуляторные) осцилляции.

3. Спонтанное излучение

Используя решения для x (11), $\dot{y}$ (8) и z (15), можно найти спектральную интенсивность спонтанного излучения, которая в направлении оси z (ось виглера) определяется формулой [16]

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega do} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2} \left| \int_0^T dt \left[\mathbf{n} \times \mathbf{v}\right] e^{i\omega(t-z)} \right|^2, \qquad (17)$$

где do – бесконечно малый телесный угол в направлении оси z и T – время пролета электронов через ондулятор.

Используя формулу [17]

$$e^{-iA\sin x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(A) e^{-inx} \qquad (18)$$

с функциями Бесселя $J_n(A)$ и опуская громоздкие вычисления, получим

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega do} = \frac{e^2\omega^2\Omega^2 T^2}{8\pi^2 q_0{}^2} \sum_{n,m,k=-\infty}^{\infty} \left(I_{n+1,k,m} - I_{n,k,m}\right)^2 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2, \qquad (19)$$

где

$$\left[\begin{array}{l} u = \dfrac{T}{2}\left[\omega\left(\dfrac{1}{2\gamma^2} + \dfrac{\Omega^2}{2q_0{}^2}\right) - (2n+1)q_0 - 2m\Omega\right], \\ I_{n,k,m} = J_{n-k}(Z_1) J_{\frac{k+m}{2}}(Z_2) J_{\frac{k-m}{2}}(Z_2), \\ Z_1 = \dfrac{\omega\Omega^2}{4q_0{}^3}, \quad Z_2 = \dfrac{\omega a_0{}^2 \Omega^2}{4q_0}. \end{array}\right. \qquad (20)$$

Уравнение (19) описывает спектр излучения, состоящий из суперпозиции спектральных линий, локализованных на комбинированных частотах нечетных гармоник $(2n+1)\omega_{\text{рез,онд}}$ ондуляторной резонансной частоты и четных гармоник $2m\omega_{\text{рез,стр}}$ строфотронной резонансной частоты, где $m, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Здесь

$$\omega_{\text{рез,онд}} = \frac{2\gamma^2 q_0}{1 + \gamma^2\,\Omega^2/q_0{}^2}, \quad \omega_{\text{рез,стр}} = \frac{2\gamma^2\Omega}{1 + \gamma^2\,\Omega^2/q_0{}^2}. \qquad (21)$$

4. Коэффициент усиления

Коэффициент усиления можно найти из выражения спонтанного излучения (19) с помощью теоремы Мэди [18]. При получении этих общих соотношений для спонтанного и вынужденного излучений используются некоторые предположения. Поэтому мы предпочитаем получить коэффициент усиления прямо из уравнений движения.

Пусть вдоль оси z (ось виглера) распространяется электромагнитная волна с векторным потенциалом

$$\mathbf{A}_w = -\frac{E_0}{\omega}\sin\omega(t-z)\mathbf{i}\,, \tag{22}$$

где ω – частота электромагнитной волны, E_0 – напряженность электрического поля, $\mathbf{i}$ – единичный вектор в направлении x.

Уравнения движения электронов в полях виглера (3) и электромагнитной волны (22) имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_x}{dt} = -eH_0 q_0 x v_y \sin q_0 z + eE_0\left(1-v_z\right)\cos\omega(t-z), \\ \dfrac{dp_y}{dt} = eH_0\left[v_z\left(1+\dfrac{q_0{}^2 x^2}{2}\right)\cos q_0 z + q_0 v_x x \sin q_0 z\right], \\ \dfrac{dp_z}{dt} = -eH_0 v_y\left(1+\dfrac{q_0{}^2 x^2}{2}\right)\cos q_0 z + eE_0 v_x \cos\omega(t-z), \end{cases} \tag{23}$$

а для изменения энергии:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = e\mathbf{vE} = eE_0 v_x \cos\omega(\mathrm{t}-\mathrm{z}). \tag{24}$$

Линейный (независящий от поля) коэффициент усиления определяется вторым порядком $\left(\propto E_0{}^2\right)$ напряженности электрического поля и получается из уравнения (24):

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = eE_0 v_x{}^{(1)}\cos\omega\left(t-z^{(0)}\right) + eE_0\omega v_x{}^{(0)} z^{(1)}\sin\omega\left(t-z^{(0)}\right). \tag{25}$$

Для нахождения коэффициента усиления необходимо найти поправки первого порядка по полю $\left(\propto E_0\right)$ $x^{(1)}(t),\ z^{(1)}(t)$ к $x^{(0)}(t)$ (11) и $z^{(0)}(t)$ (15).

Поправки первого порядка, полученные из (23), удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_x{}^{(1)}}{dt} = -\varepsilon_0\Omega^2 x^{(1)} + eE_0\left(1-v_z{}^{(0)}\right)\cos\omega\left(t-z^{(0)}\right), \\ \dfrac{dp_z{}^{(1)}}{dt} = eE_0 v_x{}^{(0)}\cos\omega\left(t-z^{(0)}\right). \end{cases} \tag{26}$$

Далее находим $x^{(1)}(t)$, $z^{(1)}(t)$ из уравнений (26) и, используя выражения для $x^{(0)}(t)$ (11) и $z^{(0)}(t)$ (15), получаем выражение для излучаемой электроном энергии $\Delta\varepsilon = \int\limits_0^T \frac{d\varepsilon}{dt}dt$ за время пролета T через ондулятор и для коэффициента усиления

$$G = \frac{4\pi N_e}{E_0^{\ 2}}\Delta\varepsilon, \tag{27}$$

где N_e – концентрация электронов в пучке.

Поскольку все эти вычисления простые, но трудоемкие и громоздкие, то здесь мы приведем только полученный результат:

$$G = \frac{e^2\omega^2\Omega^2 N_e T^3}{4\pi q_0^{\ 2}\gamma^2}\left(1+\gamma^2\frac{\Omega^2}{q_0^{\ 2}}\right)\sum_{n,m,k}^{\infty}\left(I_{n+1,m,k} - I_{n,m,k}\right)^2 \frac{d}{du}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2, \tag{28}$$

где использованы обозначения (20). Уравнение (28) описывает коэффициент усиления, состоящего из суперпозиции спектральных линий, локализованных на комбинированных частотах нечетных гармоник $(2n+1)\omega_{\text{рез,онд}}$ ондуляторной резонансной частоты и четных гармоник $2m\omega_{\text{рез,стр}}$ строфотронной резонансной частоты, где $m, n = 0,1,2,3,\ldots$, а $\omega_{\text{рез,онд}}$ и $\omega_{\text{рез,стр}}$ определены формулой (21).

5. Заключение

Показано, что учет неоднородности магнитного поля приводит к появлению дополнительных пиков в спектральном распределении спонтанного излучения и в коэффициенте усиления. Из множества этих пиков с помощью известного метода синхронизации мод можно получить ультракороткие импульсы. Пики спектрального распределения спонтанного излучения и коэффициента усиления локализованы на комбинированных частотах нечетных гармоник $(2n+1)\omega_{\text{рез,онд}}$ ондуляторной резонансной частоты и четных гармоник $2m\omega_{\text{рез,стр}}$ строфотронной резонансной частоты. В случае ондулятора с постоянным магнитным полем пики расположены на нечетных гармониках ондуляторной резонансной частоты $\omega_{\text{рез,онд}} = \frac{2\gamma^2 q_0}{1+\gamma^2\,\Omega^2/q_0^{\ 2}}$, а в случае строфотрона – они расположены на нечетных гармониках строфотронной резонансной частоты $\omega_{\text{рез,стр}} = \frac{2\gamma^2\Omega}{1+\gamma^2\,\Omega^2/q_0^{\ 2}}$. Таким образом, можно заключить, что наличие неоднородности магнитного поля в плоском виглере соединяет эти две системы (виглер с постоянным магнитным полем и строфотрон) в одно целое и приводит к появлению пиков спектрального распределения спонтанного излучения и коэффициента усиления на комбинированных (нечетных ондуляторных и четных строфотронных) резонансных частотах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **C. Scholl, V. Schaa** (eds.). Proceedings of FEL-13, New York, USA, 2013.
2. **T. Satogata, C. Petit-Jean-Genaz, V. Schaa** (eds.). Proceedings of NA PAC'13, Pasadena, LA, USA, 2013.
3. **C.A. Brau**. Free-Electron Lasers, Boston, Academic, 1990.
4. **M.V. Fedorov**. Atomic and Free Electrons in a Strong Light Field, Singapore, World Scientific, 1997.
5. **K.B. Oganesyan, M.L. Petrosyan.** YerPHI-**475(18)** – 81, Yerevan, 1981.
6. **M.V. Fedorov, K.B. Oganesyan.** IEEE J. Quant. Electr, **QE-21**, 1059 (1985).
7. **Д.Ф. Зарецкий, Э.А. Нерсесов, К.Б. Оганесян, М.В. Федоров.** Квантовая электроника, **13**, 685 (1986).
8. **Э.А. Нерсесов, К.Б. Оганесян, М.В. Федоров.** ЖТФ, **56**, 2402 (1986).
9. **К.Б. Оганесян, М.В. Федоров.** ЖТФ, **57**, 2105 (1987).
10. **M.L. Petrosyan, L.A. Gabrielyan, Yu.R. Nazaryan, G.Kh. Tovmasyan, K.B. Oganesyan.** Laser Physics, **17**, 1077 (2007).
11. **M.V. Fedorov, K.B. Oganesyan, A.M. Prokhorov.** Appl. Phys. Lett., **53**, 353 (1988).
12. **К.Б. Оганесян, А.М. Прохоров, М.В. Федоров.** ЖЭТФ, **94**, 80 (1988).
13. **E.M. Sarkisyan, K.G. Petrosyan, K.B. Oganesyan, V.A. Saakyan, N.Sh. Izmailyan, C.K. Hu.** Laser Physics, **18**, 621 (2008).
14. **М.Л. Петросян, Л.А. Габриелян, Ю.Р. Назарян, Г.Х. Товмасян, К.Б. Оганесян.** Изв. НАН Армении, Физика, **42**, 57 (2007).
15. **E. Jerby.** NIM, **A27**, 457 (1988).
16. **Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.** Теория поля. Москва, Наука, 1988.
17. **И.С. Градштейн, И.М. Рыжик.** Таблицы интегралов сумм и произведений. Москва, Физматгиз, 1963.
18. **J.M.J. Madey.** Nuovo Cimento, **50b**, 64 (1979).

ON THE INFLUENCE OF MAGNETIC FIELD INHOMOGENEITY OF THE PLANE WIGGLER ON THE SPECTRAL DISTRIBUTION OF SPONTANEOUS RADIATION AND ON THE GAIN

K.B. OGANESYAN

The spectral distribution of spontaneous emission of electrons moving in plane wiggler (undulator) with inhomogeneous magnetic field and the gain are calculated. It is shown, that electrons perform the complicated motion consisting of slow (strophotron) and fast (undulator) parts. The equations of motion were averaged over fast undulator part and equations for connected motion are obtained. It is shown, that the effect of the magnetic field inhomogenity leads to the appearance of additional peaks in the spectral distribution of spontaneous radiation and in the gain.