Известия НАН Армении, Физика, т.50, №1, с.25-37 (2015)

УДК 539.1

ДВУХКАНАЛЬНОЕ РАССЕЯНИЕ И ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА В КВАНТОВОЙ КВАЗИОДНОМЕРНОЙ ЯМЕ

Д.М. СЕДРАКЯН, А.Х. БАГДАСАРЯН, Л.Р. СЕДРАКЯН*

Ереванский государственный университет, Армения

*e-mail: lyovsed@yahoo.com

(Поступила в редакцию 6 июня 2014 г.)

Показано, что электронные токи в гетероструктурах могут стать источником излучения фотонов в дальней инфракрасной области частот. Рассмотрено двухканальное рассеяние электрона на δ-образном потенциале (точечный дефект) и показано, что рассеяние происходит, в основном, по второму каналу с одинаковыми амплитудами прохождения и отражения. Показано, что при взаимодействии рассеивающихся электронов с внешней линейно-поляризованной электромагнитной волной происходит переход электрона со второго канала на первый канал с излучением фотонов. Найдена вероятность излучения фотона в единицу времени для двух частных случаев распространения внешней волны. Оценена область частот излучения и показано, что электрон, движущийся в гетероструктуре, излучает фотон с частотой $\sim 10^{13}$ Гц.

1. Введение

Исследования по физике низкоразмерных полупроводниковых структур, таких как, сверхрешетки, квантовые проволоки, квантовые ямы и точки, открыли новые области фундаментальных наук. Физические свойства этих структур изучены как экспериментально, так и теоретически [1-5]. Квантовая локализация носителей заряда в этих структурах приводит к образованию дискретных уровней энергии, увеличению плотности состояний на определенных уровнях энергии и радикальному изменению оптических спектров поглощения и излучения. Изучение рассеяния и излучения элементарных частиц в таких средах представляет интерес, так как, во-первых, в связи со все возрастающими возможностями нанотехнологии по созданию низкоразмерных структур экспериментальное осуществление данных систем является наиболее разработанным как в плане контроля размеров системы, так и по возможности вариаций структурных и композиционных характеристик, во-вторых, теоретическое исследование физических особенностей рассеяния и излучения на одномерных и квазиодномерных системах является более легкой задачей, чем их исследование в системах, характеристики которых изменяются в двух или трех направлениях.

Вместе с тем, уже много лет интенсивно рассматриваются одномерные модели, которые не утратили своей актуальности. Любой аналитический подход, который выходит за рамки одномерного рассмотрения, расширяет класс задач, приближая их к реальным физическим задачам [6-8]. В частности, квазиодномерное рассмотрение задачи рассеяния и излучения заряженной частицы может быть одним из таких обобщений [9-11]. Как было показано в работах [12,13], квазиодномерное рассеяние на заданном потенциале, зависящем также от поперечных координат, приводит к многоканальному рассеянию. Математически это означает, что амплитуды рассеяния t_n и r_n зависят от новых дискретных индексов m, которые описывают квантовое движение частицы в поперечной к направлению рассеяния плоскости. Физический смысл индексов m зависит от вида движения частицы в поперечной плоскости.

Целью настоящей работы является исследование коэффициентов прохождения и отражения электронов в удлиненной квантовой яме при рассеянии на точечных примесях и дефектах наноструктуры, а также влияние конфайнмента низкоразмерной системы на излучение электрона. Найдены амплитуды двухканального рассеяния квантовой частицы на точечном дефекте, имеющем вид δ-образного потенциала. Исследовано поведение коэффициентов прохождения и отражения электронов на точечном дефекте в зависимости от скорости частиц как на первом, так и на втором канале рассеяния. Рассматривается излучение электрона в открытой в одном направлении квантовой яме, исследован спектр возможного излучения в зависимости от дрейфовой скорости падающей на потенциал частицы, найдены вероятности излучения фотонов. Основные физические результаты, полученные в этой статье, рассматриваются с точки зрения возможного расширения области исследования. Отметим, что в данной работе мы предполагаем квазиодномерность движения электрона, так как заданием двух бесконечных потенциалов ограничивается движение частицы в поперечной плоскости, что в рамках квантовой механики приводит к двумерному движению частицы.

2. Двухканальное рассеяние на точечном дефекте в виде δ-образного потенциала

Для теоретического описания одноэлектронных состояний рассмотрим движение частицы в двумерном пространстве. Предположим, что ее движение в направлении y ограничено бесконечными потенциалами, занимающими поверхности $y=0$ и $y=a$. Движение в направлении x не ограничено. Частицы рассеваются в поле потенциала $U(x,y)$. Уравнение Шредингера для такого движения имеет вид

$$\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{\partial^2\Psi(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi(x,y)}{\partial y^2}\right)+\left(E-U(x,y)\right)\Psi(x,y)=0. \tag{1}$$

Введем обозначения

$$\frac{2M}{\hbar^2}E=\chi^2,\qquad \frac{2M}{\hbar^2}U(x,y)=V(x,y). \tag{2}$$

Тогда уравнение (1) запишется в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Psi(x,y)+\left(\chi^2-V(x,y)\right)\Psi(x,y)=0\,. \tag{3}$$

Решение уравнения (3) с граничными условиями $V(x,0)=V(x,a)=\infty$ можно искать в виде [11]

$$\Psi(x,y)=\sum_n \Psi_n(x)\Phi_n(y), \tag{4}$$

где $\Phi_n(y)$ есть решение уравнения

$$\frac{d^2\Phi_n(y)}{dy^2}+\chi_n^2\Phi_n(y)=0, \qquad n=1,2,...,\infty \tag{5}$$

с граничными условиями $\Phi_n(0)=\Phi_n(a)=0.$ Решения уравнений (5) имеют вид

$$\Phi_n(y)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi n}{a}y, \qquad n=1,2,...,\infty\,, \tag{6}$$

и они ортонормированы:

$$\int_0^a \Phi_m^*(y)\Phi_n(y)dy=\delta_{mn}\,. \tag{7}$$

Подставляя решение (4) в уравнение (3), получим систему уравнений для определения функций $\Psi_n(x)$:

$$\frac{d^2\Psi_n(x)}{dx^2}+k_n^2\Psi_n(x)-\sum_m V_{m,n}\Psi_m(x)=0, \qquad n=1,2,...,\infty\,, \tag{8}$$

где

$$\begin{gathered} k_m^2=\chi^2-\chi_m^2, \quad \chi_m=\frac{\pi}{a}m, \quad m=1,2,...\infty, \\ V_{m,n}(x)=\int_0^a \Phi_m^*(y)V(x,y)\Phi_n(y)dy. \end{gathered} \tag{9}$$

Фактически, задача рассеяния частицы в направлении x сводится к решению одномерной бесконечной системы (8) с заданной потенциальной матрицей $V_{nm}(x)$, члены которой определяются формулой (9) [11]. Как видно из решений (4), (6) и системы уравнений (8), частица в направлении y совершает колебательное движение с дискретной энергией, равной $E_n=\hbar^2\chi_n^2/(2M)$, а в направлении x она рассеивается на заданных потенциалах $V_{nm}(x)$. Квантовый характер движения частицы по направлению y может привести к возбуждению ее поперечного движения на уровень $n>1$, если энергия возбуждения больше $\Delta E_n=\pi^2\hbar^2(n^2-1)/(2Ma^2)$. Так как рассеяние частицы упругое и если начальная энергия частицы достаточно велика, чтобы обеспечить реализацию возбуждения поперечного движения, то рассеяние можно рассматривать как многоканальное. В задаче многоканального рассеяния в рассмотрение вводятся амплитуды прохождения t_n и отражения r_n, которые зависят от индекса n, определяющего номер канала L.

Рассмотрим рассеяние частицы на потенциалах

$$U(x,y)=U_0\delta(x)\delta(y-y_0)$$

или (10)

$$V(x,y)=L_0\delta(x)\delta(y-y_0),$$

где $L_0=\left(2M/\hbar^2\right)U_0$. Предположим, что начальная энергия продольного движения частицы достаточна для возбуждения квантового состояния с $n=2$, но недостаточна для возбуждения состояния с $n=3$, тогда рассеяние будет двухканальным [12,13]. Предположим также, что движение частицы по направлению y до встречи с потенциалом описывается волновой функцией $\Phi_1(y)$, а продольное движение – импульсом $\mathbf{p}_1$ или $\mathbf{k}_1=\mathbf{p}_1/\hbar$. Согласно (4), (8) и (9), отличными от нуля будут только $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\Psi_1(x)}{dx^2}+k_1^2\Psi_1(x)-V_{11}(x)\Psi_1(x)-V_{12}(x)\Psi_2(x)=0,\\&\frac{d^2\Psi_2(x)}{dx^2}+k_2^2\Psi_2(x)-V_{22}(x)\Psi_2(x)-V_{21}(x)\Psi_1(x)=0,\end{aligned}\tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}&V_{11}=\frac{2}{a}P_0\sin^2\left(\frac{\pi y_0}{a}\right)\delta(x)=b_{11}\delta(x),\\&V_{22}(x)=\frac{2}{a}P_0\sin^2\left(\frac{2\pi y_0}{a}\right)\delta(x)=b_{22}\delta(x),\\&V_{12}(x)=V_{21}(x)=\frac{2}{a}P_0\sin\frac{\pi y_0}{a}\sin\frac{2\pi y_0}{a}\delta(x)=b_{12}\delta(x).\end{aligned}\tag{12}$$

Решение системы уравнений (11) будем искать в виде

$$\Psi_1(x)=\begin{cases}e^{ik_1x}+r_1e^{-ik_1x}, & x<0,\\ t_1e^{ik_1x}, & x>0,\end{cases}\qquad \Psi_2(x)=\begin{cases}r_2e^{-ik_2x}, & x<0,\\ t_2e^{ik_2x}, & x>0.\end{cases}\tag{13}$$

Амплитуды t_1, r_1, t_2 и r_2 находятся из сшивания волновой функции и ее первой производной в точке $x=0$:

$$\begin{aligned}&\Psi_1(-0)=\Psi_1(+0),\\&\Psi'_1\Big|_{-0}^{+0}=b_{11}\Psi_1(0)+b_{12}\Psi_2(0),\end{aligned}\quad \text{и}\quad \begin{aligned}&\Psi_2(-0)=\Psi_2(+0),\\&\Psi'_2\Big|_{-0}^{+0}=b_{22}\Psi_2(0)+b_{21}\Psi_1(0),\end{aligned}\tag{14}$$

где Ψ'_1 и Ψ'_2 – первые производные функций $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$ по x. Функции

Ψ_1 и Ψ_2 и их производные Ψ'_1 и Ψ'_2 в уравнениях (14) берут в точке $x=0$, подходя к ней слева (-0) и справа $(+0)$. Подставляя решение (13) в уравнение (14), для амплитуд прохождения и отражения получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 1+r_1=t_1, \\ r_2=t_2, \\ ik_1t_1-ik_1+ik_1r_1=b_{11}t_1+b_{12}t_2, \\ ik_2t_2+ik_2r_2=b_{21}t_1+b_{22}t_2. \end{cases} \tag{15}$$

Решая систему уравнений (15), получим следующие выражения для t_1, r_1, и t_2, r_2:

$$t_1=\frac{2ik_1}{2ik_1-b_{11}-\dfrac{b_{12}^2}{2ik_2}-b_{22}}, \qquad r_1=\frac{b_{11}+\dfrac{b_{12}^2}{2ik_2-b_{22}}}{2ik_1-b_{11}-\dfrac{b_{12}^2}{2ik_2-b_{22}}}, \tag{16}$$

$$t_2=r_2=\frac{b_{12}}{2ik_2-b_{22}}t_1.$$

Как видно из уравнений (16), при $b_{12}=0$ получим $t_2=r_2=0$, а для амплитуд t_1 и r_1 получаются известные формулы для коэффициентов прохождения и отражения от потенциала вида $V_{11}=b_{11}\delta(x)$ для одномерного рассеяния. Из выражений (12) видно, что при $y_0=a/2$, то есть, когда рассеивающий потенциал находится в центре ямы, $b_{12}=0$ и, следовательно, перехода с первого канала на второй не будет и частица будет рассеиваться только в первом канале.

Вычислим плотности токов вероятностей движущихся к барьеру частиц $\Psi_0=e^{ik_1x}$ из

$$j_0=\frac{i\hbar}{2m}(\Psi'_0\Psi_0^*-\Psi'^*_0\Psi_0)=\frac{\hbar k_1}{m}=v_0, \tag{17}$$

где v_0 – скорость падающей частицы. Для отраженных частиц $\Psi_1(x)=r_1e^{-ik_1x}$ и $\Psi_2(x)=r_2e^{-ik_2x}$ плотности токов вероятностей имеют вид

$$j_{21}=-v_0|r_1|^2, \qquad j_{22}=-\frac{\hbar k_2}{m}=-v_1|r_2|^2, \tag{18}$$

где v_0 и v_1 – соответственно скорости отраженных в первом и во втором каналах частиц. Наконец, для прошедших через барьер частиц $\Psi_1(x)=t_1e^{ik_1x}$, $\Psi_2(x)=t_2e^{ik_2x}$ имеем

$$j_{t_1}=v_0|t_1|^2, \qquad j_{t_2}=v_1|t_2|^2. \tag{19}$$

Вероятность отражения частицы от барьера равна отношению отраженного и падающего потоков и называется коэффициентом отражения R. Отношение прошедшего потока к падающему есть вероятность прохождения частицы через барьер и называется коэффициентом прохождения *T*. Для коэффициентов отражения R и прохождения T получим

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \frac{j_{r_1}}{j_0} = |r_1|^2 = \frac{4k_2^2 b_{12}^2}{16k_1^2k_2^2 + 4\left(k_1b_{22} + k_2b_{11}\right)^2}, \\
T_1 &= \frac{j_{t_1}}{j_0} = |t_1|^2 = \frac{16k_1^2k_2^2 + 4k_1^2b_{22}^2}{16k_1^2k_2^2 + 4\left(k_1b_{22} + k_2b_{11}\right)^2}, \\
T_2 = R_2 &= \frac{j_{t_2}}{j_0} = \frac{k_2}{k_1}|t_2|^2 = \frac{4k_1k_2b_{11}b_{22}}{16k_1^2k_2^2 + 4\left(k_1b_{22} + k_2b_{11}\right)^2}.
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

При выводе выражений (20) использовано соотношение $b_{12}^2 = b_{11}b_{22}$, которое следует непосредственно из (12). Сумма выражений (20) равна единице согласно закону сохранения числа частиц.

Наконец, определим относительную плотность частиц на втором канале рассеяния. Она важна, так как при взаимодействии частиц с внешним электромагнитным полем они могут стать источниками электромагнитного излучения. Относительная плотность зависит от продольного импульса k_2 и, как увидим ниже, важно определить эту плотность при малых k_2. Условие $k_2 \to 0$ можно принять, так как

$$k_2^2 = k_1^2 - 3\left(\frac{\pi}{a}\right)^2,$$

и при $k_1^2 \to 3(\pi/a)^2$ мы имеем $k_2 \to 0$. Найдем относительную плотность n_2/n частиц на втором канале рассеяния, здесь n_2 – плотность частиц на втором канале и n – полная плотность частиц. Легко заметить, что $n_2 \sim 2|t_2|^2$, тогда как $n \sim \left(2|t_2|^2 + |r_1|^2 + |t_1|^2\right)$. Используя формулы (20), для относительной плотности частиц на втором канале рассеяния имеем

$$\frac{n_2}{n} = \frac{1}{1+B}, \qquad (21)$$

где

$$B = \frac{b_{22}^2 + 4k_2^2\left(1 + \left(\frac{b_{11}}{2k_1}\right)^2\right)}{2b_{11}b_{22}}.$$

При $k_2 \neq 0$ величина *B* стремится к бесконечности, когда δ – потенциал помещен на краях $y_0 = 0$ и $y_0 = a$ и в середине $y_0 = a/2$ ямы (в этих точках $b_{22} \to 0$).

Тогда, согласно формуле (21), n_2/n стремится к нулю и рассеяние реализуется только по первому каналу.

Согласно (21), максимальное значение n_2/n соответствует минимальному значению $B_{\min}$. Легко показать, что это значение B достигается, когда y_0 находится вблизи центра ямы $(y_0 = a/2)$. Для этого рассмотрим B как функцию от y_0 и найдем ее минимум. Тогда минимальное значение $B_{\min}$ соответствует точке y_0, где выполняется условие

$$b_{22}^2 = 4k_2^2\left(1+\left(\frac{b_{11}}{2k_1}\right)^2\right) \quad \text{и} \quad B_{\min} = \frac{b_{22}}{b_{11}}.$$

Отсюда следует, что $B_{\min}$ может стремится к нулю и $n_2 \to n$, если k_2 и b_{22} одновременно стремятся к нулю, выполняя вышеуказанное условие. Так как $B_{\min} \sim \cos^2(\pi y_0/a)$, то $B_{\min} \to 0$, когда потенциал находится около центра ямы $y_0 \to a/2$. Заметим, что максимум функции n_2/n достигается в точке y_0, которая тем ближе к центру ямы, чем меньше параметр B. После достижения максимума функция n_2/n быстро уменьшается, стремясь к нулю.

3. Излучение электрона в квазиодномерной квантовой яме

Теперь рассмотрим излучение электрона, который движется в поле линейно-поляризованной электромагнитной волны. Электрон в таких условиях может излучать фотон, при этом переходя из более высокого уровня энергии поперечного квантованного состояния в низкий уровень. Вычислим вероятность такого перехода. Возмущенное волновое уравнение напишем в виде

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left(\hat{H}_0 + \hat{W}\right)\Psi, \tag{22}$$

где поле возмущения

$$\hat{W}(r,t) = -\frac{e}{c}\mathbf{A}(\boldsymbol{r},t)\hat{\mathbf{p}}, \qquad \mathbf{A} = \mathbf{A}e^{i\boldsymbol{kr}-i\omega t}, \qquad \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla. \tag{23}$$

Следовательно,

$$\hat{W}(x,y,t) = \hat{\mathbf{A}}e^{-i\omega t} + \hat{\mathbf{A}}^{+}e^{i\omega t}, \tag{24}$$

где $\hat{\mathbf{A}}$ определяется заданной электромагнитной волной возмущения. Решение возмущенного уравнения (22) будем искать в виде

$$\Psi = \Psi_E(x,y)e^{-\frac{i}{\hbar}Et} + \Delta\Psi(x,y,t), \tag{25}$$

где

$$\hat{H}_0\Psi_E = E\Psi_E \quad \text{и} \quad \Delta\Psi = \int C_{\bar{E}}(t)\Psi_{\bar{E}} e^{-\frac{i}{\hbar}\bar{E}t} d\bar{E}.$$

Подставляя решение (25) в уравнение (22), для $C_{\bar{E}}(t)$ получим

$$i\hbar\int \frac{\partial C_{\bar{E}}(t)}{\partial t}\Psi_{\bar{E}} e^{-\frac{i}{\hbar}\bar{E}t} d\bar{E} = \hat{W}\Psi_E e^{-\frac{i}{\hbar}Et}. \tag{26}$$

Умножая обе стороны равенства (26) на $\Psi^*_{E'}$ и интегрируя в плоскости (x, y), получим

$$i\hbar\int \frac{\partial C_{\bar{E}}}{\partial t}\Psi^*_{E'}\Psi_{\bar{E}} e^{-\frac{i}{\hbar}\bar{E}t} dxdyd\bar{E} = \int \Psi^*_{E'}\hat{W}\Psi_E e^{-\frac{i}{\hbar}Et} dxdy. \tag{27}$$

Здесь $\int \Psi^*_{E'}\,\Psi_{\bar{E}} dxdy = \delta\left(E' - \bar{E}\right)$ и, следовательно,

$$i\hbar\frac{\partial C_{E'}(t)}{\partial t} = W_{E'E}(t), \tag{28}$$

где

$$\begin{aligned} W_{E'E}(t) &= \int \Psi^*_{E'}\hat{W}\Psi_E e^{-\frac{i}{\hbar}(E-E')t} dxdy = \\ &= \int \Psi^*_{E'}\hat{\mathbf{A}}\Psi_E dxdy e^{\frac{i}{\hbar}(E'-E-\hbar\omega)t} + \int \Psi^*_{E'}\hat{\mathbf{A}}^+\Psi_E dxdy e^{\frac{i}{\hbar}(E'-E+\hbar\omega)t} = \\ &= A_{EE'} e^{\frac{i}{\hbar}(E'-E-\hbar\omega)t} + A^*_{EE'} e^{\frac{i}{\hbar}(E'-E+\hbar\omega)t}. \end{aligned} \tag{29}$$

Окончательно, для коэффициента $C_{E'}(t)$ получается следующее выражение:

$$C_{E'}(t) = -\frac{A_{E'E} e^{\frac{i}{\hbar}(E'-E-\hbar\omega)t}}{E' - E - \hbar\omega} - \frac{A^*_{E'E} e^{\frac{i}{\hbar}(E'-E+\hbar\omega)t}}{E' - E + \hbar\omega}.$$

Вероятность того, что в момент t частица будет находиться в состоянии с энергией E', равна квадрату модуля последнего выражения. Первое слагаемое обусловлено поглощением фотона, а второе – излучением. После несложных преобразований из (29) для вероятности излучения фотона в единицу времени получается следующее выражение:

$$\left|C_{E'}\right|^2 = \frac{2\pi}{\hbar}\left|A^*_{E'E}\right|^2 \delta\left(E' - E + \hbar\omega\right). \tag{30}$$

Рассмотрим излучение электрона, когда в начальном состоянии электрон совершает колебательное движение на втором канале и поступательно движется в направлении x. После излучения фотона электрон не может оставаться на втором канале и в силу законов сохранения энергии и импульса перейдет на первый канал, изменяя импульс поступательного движения.

Ниже мы рассмотрим два случая взаимодействия электрона с электромагнитным полем, приводящих к излучению фотона.

4. Случай параллельного распространения

Рассмотрим случай, когда электромагнитная волна распространяется в направлении движения электрона x и поляризована в направлении y. Тогда вектор $\mathbf{A}$ и оператор $\hat{\mathbf{p}}$ примут вид

$$\mathbf{A} = A_y e^{ikx - i\omega t} + \text{к.с.}, \qquad \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}. \tag{31}$$

При таком выборе внешнего электромагнитного возмущения $\hat{A} = \frac{ie\hbar}{c} A_y e^{ikx} \frac{\partial}{\partial y}$ и, следовательно,

$$A^*_{E'E} = \frac{ie\hbar}{c} A_y \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^a dy \Psi^*_{1E'} e^{-ikx} \frac{\partial}{\partial y} \Psi_{2E} = -\frac{16\pi ie\hbar}{3c} A_y B, \tag{32}$$

где

$$B = r_2 \int_{-\infty}^{0} e^{-ik_2 x - ikx} \Psi^*_{1E'} dx + t_2 \int_0^{\infty} e^{ik_2 x - ikx} \Psi^*_{1E'} dx.$$

Теперь мы должны выбрать функцию $\Psi_{1E'}$, которая описывает состояние электрона после излучения фотона. После излучения электрон может находится в двух возможных состояниях. Сначала рассмотрим случай, когда электрон после излучения движется в положительном направлении оси x. Для этого случая $\Psi_{1E'} = e^{ik'_1 x}$ и

$$\begin{aligned} B &= r_2 \int_{-\infty}^{0} e^{-ik_2 x - ikx - ik'_1 x} dx + t_2 \int_0^{\infty} e^{ik_2 x - ikx - ik'_1 x} dx = \\ &= \pi r_2 \delta(k_2 + k'_1 + k) + \pi t_2 \delta(k_2 - k'_1 - k). \end{aligned} \tag{33}$$

Так как $k_2 + k'_1 + k > 0$, то реализуется только второе слагаемое формулы (33). В этом случае электрон после излучения продолжает движение в положительном направлении оси x, а законы сохранения энергии и импульса принимают вид

$$E_2 - E'_1 = \hbar\omega, \quad k_2 - k'_1 = k. \tag{34}$$

Подставляя в уравнение (34) выражения для энергии электрона

$$E_2 = \frac{\hbar^2}{2m} k_2^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{4\pi^2}{a^2}, \qquad E'_1 = \frac{\hbar^2}{2m} k'^2_1 + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{a^2},$$

и разрешая систему уравнений (34), для величин $\hbar k_2$ и $\hbar k'_1$ получим следующие выражения:

$$\hbar k_2 = mc - \frac{3}{2} \frac{\hbar \pi^2}{ka^2} + \frac{\hbar k}{2}, \qquad \hbar k'_1 = mc - \frac{3}{2} \frac{\hbar \pi^2}{ka^2} - \frac{\hbar k}{2}. \tag{35}$$

Для излучения фотона необходимо, чтобы $\frac{3\hbar\pi^2}{2ka^2}-\frac{\hbar k}{2}>0$, откуда получаем, что такая возможность реализуется, когда длина волны излучаемого фотона удовлетворяет условию $\lambda > 2a/\sqrt{3}$ ($a \sim 10^{-6}$ см). Из (35) видно, что фотоны с максимальной энергией 2×10^{-10} эрг (с почти рентгеновской частотой излучения $\omega \sim 2\times10^{17}$ Гц) могут излучать только ультрарелятивистские частицы. Фотоны видимого света ($\omega \sim 3\times10^{15}$ Гц) излучают электроны, движущиеся со скоростью $v \sim 0.8c$, где c – скорость света. В квантовых гетероструктурах электрон не может двигаться с релятивистскими скоростями и, следовательно, не может излучать фотон видимого света. Максимальная дрейфовая скорость, которая достигается в настоящее время в гетероструктурах, $\sim 10^8$ см/сек при разности потенциалов ~ 20 кВ/см, а в некоторых квантовых структурах даже при 4 кВ/см. При таких скоростях электрон может излучать с длиной волны $\sim 10^{-2}$ см, то есть в инфракрасной области излучения. Действительно, чтобы уменьшить частоту излучаемого фотона, согласно (35), нужно уменьшить k'_1. Наименьшая частота излучения получится при условии

$$k'_1 = mc - \frac{3}{2}\frac{\hbar\pi^2}{ka^2} - \frac{\hbar k}{2} = 0,$$

откуда следует, что $k_2 = k$. В этом случае электрон останавливается и передает свой импульс фотону. Это реализуется для таких частот, когда первый член первого уравнения (35) порядка второго члена того же уравнения, т.е.

$$mc \sim \frac{3}{2}\frac{\hbar\pi^2}{ka^2}.$$

Отсюда получаем $\omega = kc \simeq 3\times10^{13}$ Гц, т.е. дальний инфракрасный диапазон.

Перейдем к рассмотрению второго случая, когда электрон после излучения меняет направление своего движения, т.е. движется в отрицательном направлении оси x. Как увидим ниже, излучаемый в этом случае фотон, имеет частоту, лежащую в инфракрасной области излучения. В рассматриваемом случае функция $\Psi_{1E'} = e^{-ik'_1x}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} B &= r_2\int_{-\infty}^{0} e^{-ik_2x-ikx-ik'_1x}dx + t_2\int_{0}^{\infty} e^{ik_2x+ik'_1x-ikx}dx = \\ &= \pi r_2\delta\left(k_2 - k'_1 + k\right) + \pi t_2\delta\left(k_2 + k'_1 - k\right). \end{aligned} \tag{36}$$

Так как $k_2 - k'_1 + k > 0$, то и в этом случае реализуется второй интеграл решения (36). Излучающая частица сначала движется в положительном направлении оси x, после излучения меняет свое направление и движется в отрицательном направлении оси x. Законы сохранения энергии и импульса в этом случае примут вид

$$E_2 - E'_1 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k_2^2 - k'^2_1\right) + \frac{3\hbar^2\pi^2}{2ma^2} = \hbar\omega, \qquad (37)$$
$$k_2 + k'_1 = k.$$

Отсюда видно, что наименьшее значение ω получается при $k_2 = k'_1$, что даст величину

$$\omega = \frac{3}{2}\left(\frac{\hbar}{m}\right)\frac{\pi^2}{a^2},$$

которая реализуется при $k_2 = \omega c/2$. Легко оценить, что при $a \sim 10^{-6}$ см минимальная частота излучения $\sim 10^{13}$ Гц, тогда как дрейфовые скорости $\nu_2 \le 160$ см/сек, т.е. небольшие.

Таким образом, электроны после рассеяния на δ-образном потенциале переходят на второй канал и, следовательно, взаимодействуя с внешним электромагнитным полем, могут переходить на первый канал, излучая фотоны. Оценки частоты излучения дают довольно широкий диапазон 10^{13} Гц $\le \omega \le 10^{17}$ Гц, однако, излучение электрона в гетероструктурах, в основном, лежит в дальней инфракрасной области.

5. Случай перпендикулярного распространения

Рассмотрим случай, когда линейно-поляризованная электромагнитная волна распространяется в перпендикулярном к движению частицы направлении и поляризована вдоль x. Тогда вектор $\mathbf{A}$ и оператор $\hat{\mathbf{p}}$ примут вид

$$\mathbf{A} = A_x e^{iky - i\omega t} + \text{к.с.}, \qquad \hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}. \qquad (38)$$

При таком выборе внешнего электромагнитного возмущения оператор $\hat{A}$ имеет вид $\hat{A} = \frac{ie\hbar}{c}A_x e^{iky}\frac{\partial}{\partial x}$, а величина $A^*_{E'E}$ определится из выражения

$$A^*_{E'E} = \int \Psi^*_{E'}\hat{A}^+\Psi_E dxdy = -\frac{ie\hbar}{c}A_x\int \Psi^*_{E'}e^{-iky}\frac{\partial}{\partial x}\Psi_E dxdy. \qquad (39)$$

Подставляя в интеграл (39) выражения для функций $\Psi_{E'}$ и Ψ_E, окончательно получим

$$A^*_{E'E} = \frac{2ie\hbar}{ca}A_x B_1 B_2, \qquad (40)$$

где

$$B_1 = \int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right)\sin\left(\frac{2\pi}{a}y\right)e^{-iky}dy, \qquad B_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*_{1E'}(x)\frac{\partial}{\partial x}\Psi_{2E}(x)dx.$$

Решение интеграла B_1 имеет следующий вид:

$$B_1 = \frac{1}{4i}\left[\frac{e^{-i(3\pi/a+k)a}-1}{3\pi/a+k} - \frac{e^{i(3\pi/a-k)a}-1}{3\pi/a-k} - \frac{e^{-i(\pi/a+k)a}-1}{\pi/a+k} + \frac{e^{i(\pi/a-k)a}-1}{\pi/a-k}\right]. \quad (41)$$

Теперь рассмотрим интеграл B_2. Предположим, что электрон после излучения движется в положительном направлении оси x. Тогда интеграл B_2 имеет вид

$$\begin{aligned} B_2 &= r_2 \int_{-\infty}^{0} e^{-ik'_1 x} \frac{\partial}{\partial x} e^{-ik_2 x} dx + t_2 \int_{-\infty}^{0} e^{-ik'_1 x} \frac{\partial}{\partial x} e^{ik_2 x} dx = \\ &= i\pi k_2 t_2 \left[\delta(k_2 + k'_1) + \delta(k_2 - k'_1)\right]. \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь мы учли, что при рассеянии электрона на δ-образном потенциале $t_2 = r_2$. Отметим, что, если электрон после излучения движется в отрицательном направлении оси x, то для B_2 снова получается выражение (42).

Так как $k_2 + k'_1 > 0,$ то из решения (42) реализуется только второе слагаемое, и законы сохранения энергии и импульса примут вид

$$E_2 - E'_1 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k_2^2 - k'^2_1\right) + \frac{3\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \hbar\omega, \quad k_2 = k'_1. \quad (43)$$

Из (43) получаем частоту излучаемого фотона

$$\omega = \frac{3}{2}\left(\frac{\hbar}{m}\right)\frac{\pi^2}{a^2}, \qquad k = \frac{\omega}{c}. \quad (44)$$

Отсюда легко оценить частоту излучения. Если выбрать $a \sim 10^{-6}$ см, тогда получим $\omega = 10^{13}$ Гц и $k = \omega/c = 3\times10^2$ см$^{-1}$, т.е. частота излучения находится в дальней инфракрасной области. Знание величины k дает возможность оценить интеграл B_1. Как видно из выражения (41), для малых значений параметра ka/π B_1 пропорционально этому параметру. В рассматриваемом нами случае $ka/\pi \sim 10^{-4}$ и, следовательно, в первом ненулевом приближении $B_1 = \frac{8i}{9}\frac{ka^2}{\pi^2}$.
Зная B_1, можно написать окончательный вид для величины $A^*_{E'E}$:

$$A^*_{E'E} = -\frac{16i}{9} A_x \left(\frac{ka}{\pi}\right) k_2 \delta(k_2 - k'_1). \quad (45)$$

Отметим, что области низкочастотного излучения для обоих рассмотренных нами случаев совпадают.

6. Заключение

Показано, что энергию дрейфового движения электрона при его квазиодномерном рассеянии можно превратить в энергию излучения фотона. Для этого сначала электрон рассеивается на δ-образном потенциале (точечный дефект), а потом, взаимодействуя с внешней электромагнитной волной, излучает фотон.

Рассмотрено двухканальное рассеяние электрона на δ-образном потенциале и показано, что с большой вероятностью электрон рассеивается, находясь на втором канале и имея одинаковые амплитуды прохождения и отражения. Так как энергия поперечного движения рассеянных электронов на втором канале больше, чем на первом канале, то из-за взаимодействия с внешней электромагнитной волной электрон со второго канала переходит на первый канал, излучая фотон. Рассмотрены два случая для внешней линейно-поляризованной электромагнитной волны: первый, когда она распространяется параллельно, и второй, когда она распространяется перпендикулярно движению электрона. Найдены вероятности излучения фотонов в единицу времени для обоих случаев рассеяния. Оценены области частот излучения и показано, что для электронов, движущихся в гетероструктурах, эти частоты лежат в инфракрасной области.

ЛИТЕРАТУРА

1. **B.L. Altshuler, A.G. Aronov, D.E. Khmelnitskii, A.I. Larkin.** Quantum Theory of Solids, ed. by I.M. Lifshits, Advances in Science and Technology in the USSR, Mir Publishers, Moscow, 1982, pp.130-237.
2. **H. Fukuyama, S. Hikami.** Anderson Localization. Springer, 1982.
3. **S. Datta.** Transport in Mesoscopic Systems. Cambridge University Press, 1996.
4. **Y. Imry.** Introduction to Mesoscopic Physics. Oxford University Press, 1997.
5. **I. Dittrich, P.H. Angi, et al.** Quantum Transport and Dissipation. Wiley-VCH, 1998.
6. **M. Diitiker.** Phys. Rev. B, **40**, 7906 (1990).
7. **H.A. Fenig, B.I. Halperin.** Phys Rev. B, **36**, 7969 (1987).
8. **Y.B. Levinson, M.I. Lubin, E.Y. Sukhorukov.** Phys. Rev. B, **45**, 1196 (1992).
9. **М.Б. Левинсон, М.И. Любин, Е.В. Сухоруков.** Письма в ЖЭТФ, **54**, 405 (1991).
10. **Л.Р. Седракян.** Доклады НАН Армении, **109**, 214 (2009).
11. **Д.М. Седракян, Э.М. Казарян, Л.Р. Седракян.** Изв. НАН Армении, Физика, **44**, 395 (2009).
12. **Д.М. Седракян, Э.М. Казарян, Л.Р. Седракян.** Изв. НАН Армении, Физика, **45**, 173 (2010).
13. **Д.М. Седракян, Л.Р. Седракян.** Доклады НАН Армении, **110**, 171 (2010).

TWO-CHANNEL SCATTERING AND EMISSION OF ELECTRON IN A QUASI-ONE-DIMENSIONAL QUANTUM HOLE

D.M. SEDRAKIAN, A.KH. BAGDASARYAN, L.R. SEDRAKYAN

We show that electron currents in heterostructures can be a source of photon emission in the far infrared. Two-channel electron scattering on δ-potential (point defect) is considered, and it is shown that the scattering takes place mainly on the second channel having the same amplitudes of transmission and reflection. It is shown that the interaction of scattering electrons with an external electromagnetic wave occurs a transition of electron from the second channel to the first channel with the photons emission. The probability of photon emission during a unit of time for two special cases of the external wave propagation is found. Range of emission frequencies is estimated, and it is shown that the electron moving in a heterostructure emits a photon with a frequency about 10^{13} Hz.