Известия НАН Армении, Физика, т.49, №6, с.382-392 (2014)

УДК 536.145

КВАНТОВАЯ ЗАПУТАННОСТЬ И КВАНТОВЫЕ ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ГЕЙЗЕНБЕРГОВСКИХ СПИН-1 АНИЗОТРОПНЫХ ДВУХЧАСТИЧНЫХ И ТРЕХЧАСТИЧНЫХ КЛАСТЕРАХ

В.С. АБГАРЯН*

Лаборатория теоретической физики им. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, РФ

*e-mail: vahagnab@googlemail.com

(Поступила в редакцию 4 июня 2014 г.)

Рассмотрен общий полиномиальный вид гейзенберговской модели для спинов 1 на двухчастичных и трехчастичных кластерах на предмет квантовой запутанности и её изменения при квантовых переходах, индуцированных изменениями внешних параметров, в частности, параметра анизотропии. Исследована также тепловая эволюция квантовой запутанности. Рассмотрены сходства между структурой основного состояния и фазовой диаграммой запутанности в различных плоскостях внешних параметров.

1. Введение

Квантовая запутанность является общим свойством квантовых систем, которая не имеет классических аналогов. Это свойство подразумевает существование нелокальных корреляций, что долгое время рассматривалось как артефакт квантовой механики [1]. Считается, что такие корреляции играют важную роль в понимании сильно коррелированных систем, квантовых фазовых переходов и коллективных явлений в отдельных многочастичных спиновых и фермионных решеточных моделях, сверххолодных квантовых газах и т.д. [2-5]. Особенности запутанности для малочастичных систем спинов или электронов могут указывать на общий характер свойств термодинамических систем. Недавние исследования указывают на связь между квантовой запутанностью многочастичных систем и наличием квантовых фазовых переходов и скейлинга [6-10]. Такая связь может быть использована для понимания фундаментальных термодинамических свойств фазовых сепараций в негомогенных конечных кластерах и больших макроскопических системах [11].

Изучение явлений порядок-беспорядок является основной задачей равновесной статистической механики. Наличие плато намагниченности и геометрической фрустрации играют значительную роль в этих процессах на треугольных и Кагоме решетках [12-15].

В то время как основные свойства запутанности в системах частиц со спином $\frac{1}{2}$ достаточно хорошо изучены, особенности запутанности в системах фермионов (или бозонов) с высшими спинами менее известны. Недавно была предложена модель со спином 1, которая имеет фрустрацию и сильно запутанное состояние, проявляющее критическое поведение [16].

В данной статье поставлена задача изучения влияния анизотропии спин-спинового взаимодействия в достаточно общей модели Гейзенберга со спином 1 на двух- и трехчастичных кластерах. Изотропный случай был изучен в работе [10].

2. Модельный гамильтониан

Изученная модель представляется гейзенберговским гамильтонианом XXZ и имеет следующий вид:

$$H=\sum_{i=1}^{N}[J(S_i^x S_{i+1}^x+S_i^y S_{i+1}^y+\gamma S_i^z S_{i+1}^z)+K(S_i S_{i+1})^2]+D\sum_{i=1}^{N}(S_i^z)^2+B\sum_{i=1}^{N}S_i^z. \qquad (1)$$

В представленном случае продольное кристаллическое поле D направленно по оси Z . Однородное магнитное поле представлено членом B (расчеты проведены в системе единиц, где магнетон Бора μ_B = 1 и $\hbar=1$). За обменное взаимодействие между ближайшими соседями отвечает член J, который принимает положительные и отрицательные значения соответственно в антиферромагнитном и ферромагнитном случаях. Безразмерная величина γ обеспечивает рассматриваемую анизотропию в направлении Z. За биквадратное взаимодействие, имеющее смысл только для спинов выше $\frac{1}{2}$, отвечает член K. Компонентами локальных спиновых векторов $\mathbf{S}_i$ на i-ых узлах являются спин-1 операторы:

$$S^x=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ S^y=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\ S^z=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Предполагается, что действует циклическое граничное условие $\mathbf{S}_{N+1}=\mathbf{S}_1$, где N – полное число спинов в системе.

В изотропном случае (γ = 1) данный гамильтониан, включающий билинейное и биквадратное взаимодействия, а также магнитное и кристаллическое поля, может быть выведен из модели Бозе–Хаббарда с сильной связью.

В отдельной точке $J = K$ система претерпевает качественные изменения, а именно, комбинация билинейного и биквадратного взаимодействий может быть записана через пермутационный оператор. С другой стороны, в этой точке оператор $\sum_{i=1}^{N}(S_i^z)^2$ коммутирует с гамильтонианом, что приводит к сохранению наряду с намагниченностью нового параметра порядка – квадрупольного момента. Следует заметить, что вышеуказанное происходит в случае полной изотропии взаимодействий либо в присутствии анизотропии билинейного взаимодействия в направлении Z, что в данной работе и изучается. В остальных случаях, например, в модели билинейного взаимодействия *XYZ* или же анизотропии биквадратного взаимодействия при произвольных значениях параметров анизотропии сказанное не является общим утверждением. Поскольку член гамильтониана, соответствующий продольному кристаллическому полю, может быть очевидным образом выражен через спиновую концентрацию (число частиц) $\sum_{i=1}^{N}(S_i^z)^2 = N - N_0$, где N_0 – количество узлов со спином $S_i^z = 0$, то само кристаллическое поле приобретает некий смысл, аналогичный химическому потенциалу $D = -\mu$ с частными значениями N_0. В этом смысле становится значимым сохранение именно квадрупольного момента, поскольку при таком стечении обстоятельств N_0 фиксируется для данного блока гамильтониана.

3. Отрицательность как мера запутанности

В состоянии термодинамического равновесия состояние системы определяется через матрицу плотности

$$\hat{\rho}(T) = \frac{e^{-\frac{H}{k_B T}}}{Z} = \sum_i \frac{e^{-\frac{E_i}{k_B T}}}{Z} \langle \psi_i | \psi_i \rangle, \qquad (3)$$

где E_i является энергией i-ого собственного состояния Ψ_i системы, а $Z = \sum_i e^{-E_i/(k_B T)}$ – статистическая сумма (далее все результаты излагаются в энергетических единицах с константой Больцмана $k_B = 1$). Квантовая запутанность изучалась посредством её определения через матрицу плотности для систем со спином $\frac{1}{2}$, например, в работах [17-19]. Для систем со спином 1 наиболее удобной количественной характеристикой двухчастичной запутанности можно считать отрицательность Ne, которая определяется следующим образом [17]:

$$Ne = \sum_i |\mu_i|, \qquad (4)$$

где $|\mu_i|$ – отрицательные собственные значения транспонированной по отношению к одной подсистеме матрицы плотности ρ^{T_1}. В частности, для двухкомпонентной системы

$$\langle i_1, j_2 | \rho^{T_1} | k_1, l_2 \rangle \equiv \langle k_1, j_2 | \rho | i_1, l_2 \rangle \qquad (5)$$

для любого ортонормированного и фиксированного базиса. Данное определение эквивалентно следующему:

$$Ne = \frac{\left\| \rho^{T_1} \right\|_1 - 1}{2}, \qquad (6)$$

где $\| \rho^{T_1} \|_1 = Tr\sqrt{\rho^\dagger \rho}$.

4. Результаты и обсуждение

Общее решение модели Гейзенберга для систем частиц со спинами 1 в термодинамическом пределе, применимое лишь для особого полиномиального вида гамильтониана, раскрывает богатую фазовую диаграмму [20-22]. С другой стороны, ограничения на параметры, необходимые для решения модели, а также сложность анализа самих результатов, особенно при конечных температурах, вынуждают применять различные приближения. В противоположность этому, точные расчеты запутанности для малочастичных кластеров позволяют понять некоторые особенности двухчастичных и фрустрированных систем при конечных температурах [18]. В качестве основополагающих кластеров можно выбрать димеры, стандартные квадратные блоки, а также треугольники, что позволит изучать фрустрированные системы.

В этом разделе рассматриваются двухчастичный гейзенберговский димер и трехчастичный кластер.

Рассмотрим сначала случай димера, для которого представлены результаты влияния параметра анизотропии на квантовые переходы и изменения квантовой запутанности, а также тепловое поведение самой запутанности. Путем прямой диагонализации гамильтониана была решена задача для собственных значений и собственных функций, которые представлены ниже:

$$E_1 = -B + D - 2J, \quad |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|-1,0\rangle - |0,-1\rangle\right),$$

$$E_2 = B + D - 2J, \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0,1\rangle - |1,0\rangle\right),$$

$$E_3 = -B + D + 2J, \quad |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|-1,0\rangle + |0,-1\rangle\right),$$

$$E_4 = B + D + 2J, \quad |\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0,1\rangle + |1,0\rangle\right), \tag{7}$$

$$E_5 = -2(B - D - J\gamma), \quad |\psi_5\rangle = |-1,-1\rangle,$$

$$E_6 = 2(D - J\gamma), \quad |\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|-1,1\rangle - |1,-1\rangle\right),$$

$$E_7 = 2(B + D + J\gamma), \quad |\psi_7\rangle = |1,1\rangle,$$

$$E_8 = D + 3K - J\gamma - \lambda_0, \quad |\psi_8\rangle = \frac{1}{\sqrt{2+\lambda_1^2}}\left(|1,-1\rangle + \lambda_1|0,0\rangle + |-1,1\rangle\right),$$

$$E_9 = D + 3J - J\gamma + \lambda_0, \quad |\psi_9\rangle = \frac{1}{\sqrt{2+\lambda_2^2}}\left(|1,-1\rangle + \lambda_2|0,0\rangle + |-1,1\rangle\right),$$

где

$$\lambda_0=\sqrt{D^2+2(K-J\gamma)D+9K^2-2JK(\gamma+8)+J^2(\gamma^2+8)}\,,$$

$$\lambda_1=\frac{(J-K)(-D+3K+J\gamma-\lambda_0)}{2J^2-K(\gamma+4)J+K(D+3K-\lambda_0)}\,,$$

$$\lambda_2=\frac{(J-K)(-D+3K+J\gamma+\lambda_0)}{2J^2-4KJ-K\gamma J+3K^2+DK+K\lambda_0}\,.$$

Статистическая сумма системы имеет вид:

$$\begin{aligned}Z=e^{-\frac{2D}{T}}\Big(&e^{\frac{-B+D-2J}{T}}+e^{\frac{B+D-2J}{T}}+e^{\frac{-B+D+2J}{T}}+e^{\frac{B+D+2J}{T}}+\\&+e^{\frac{2J\gamma}{T}}+e^{\frac{2(B-J\gamma)}{T}}+e^{-\frac{2(B+J\gamma)}{T}}+e^{\frac{D-3K+J\gamma-\lambda_0}{T}}+e^{\frac{D-3K+J\gamma+\lambda_0}{T}}\Big).\end{aligned}\tag{8}$$

Следуя методу, изложенному в разделе 3, проведен расчет для квантовой запутанности. Представим влияние параметра анизотропии на структуру основного состояния и эволюцию запутанности при квантовых ($T\to 0$) переходах.

1. Когда $J>0,\ K=0$ и

$$-2\frac{D+J}{D+2J}\geq\gamma>-\frac{D+\sqrt{D^2+4J^2}}{2J}\,,$$

при фиксированном знаке поля B существуют две принципиально отличающиеся "фазы". При B = 0 основным является состояние ψ_8, которое максимально запутано, что следует как из теоремы Шмидта, так и из наших прямых расчетов. С ростом абсолютного значения поля основное состояние остается прежним до момента достижения критического значения $|B|=(D+3J\gamma+\lambda_0)/2$. При критическом значении магнитного поля система находится в смеси состояний ψ_1, ψ_5, ψ_8, для B > 0, либо ψ_2, ψ_7, ψ_8, для B < 0. Если продолжить увеличивать поле, то система осуществит квантовый переход в состояние ψ_5, либо ψ_7, соответственно при положительных и отрицательных значениях поля. Эти состояния уже факторизуемы (незапутанные).

2. Когда $J>0,\ K=0,$ но уже

$$\gamma>-2\frac{D+J}{D+2J}\,,$$

для фиксированного значения поля появляется еще одно основное состояние. При B = 0 основным вновь является полностью запутанное состояние ψ_8. С увеличением величины поля после достижения критического значения $|B|=-2J+J\gamma+\lambda_0$ осуществляется переход в состояние ψ_1 (B > 0) или ψ_2 (B < 0). Эти состояния запутаны, но не полностью (само значение запутанности зависит от фиксированных значений параметров). Если продолжить увеличивать абсолютное значение поля, то при значении $|B|=D+2J(1+\gamma)$ система осуществит переход от состояния ψ_1 к незапутанному состоянию ψ_5, а от состояния ψ_2 к ψ_7.

3. Если $J > 0,\ K = 0$ и

$$\gamma < \frac{2(D-J)}{D-2J},$$

то в отсутствие магнитного поля основным является смесь незапутанных состояний ψ_5 и ψ_7. С появлением поля основным становится состояние ψ_5 (при $B > 0$) либо ψ_7 (при $B < 0$).

4. При $J < 0,\ K = 0$ и

$$\frac{-D-\sqrt{D^2+4J^2}}{2J} > \gamma > \frac{2(D-J)}{D-2J}$$

происходит то же самое, что было описано в пункте 1, но лишь с тем отличием, что основными состояниями, соответствующими критическим значениям поля, являются смеси ψ_3, ψ_5, ψ_8 при $B > 0$ и ψ_4, ψ_7, ψ_8, при $B < 0$.

5. Когда $J < 0,\ K = 0$ и

$$\gamma < \frac{2(D-J)}{D-2J},$$

ситуация аналогична случаю 2, однако, в этом случае при первом квантовом переходе критическое значение поля $|B| = \gamma J + 2J + \sqrt{(D-J\gamma)^2 + 8J^2}$ и переход происходит к ψ_3 при $B > 0$ и к ψ_4 при $B < 0$. Пересечение второго критического значения поля $|B| = D - 2J + 2J\gamma$ приведет к переходам от ψ_3 к ψ_5 и от ψ_4 к ψ_7.

6. При

$$J < 0,\ K = 0,\ \gamma < \frac{-D-\sqrt{D^2+4J^2}}{2J}$$

полностью повторяется происходящее в пункте 3.

7. Если

$$\gamma = \frac{-D-\sqrt{D^2+4J^2}}{2J},$$

то вне зависимости от знака связи J имеет место следующее: при $B = 0$ основным является смесь состояний ψ_6, ψ_7, ψ_8; с увеличением поля происходит переход к незапутанным состояниям ψ_5 при $B > 0$ и к ψ_7 при $B < 0$.

На рис.1a изображен плотностный график квантовой запутанности в плоскости $\gamma - D$ при $T \to 0$, когда квадрупольный момент является параметром порядка ($J = K = 1$), а внешнее магнитное поле отсутствует (чем светлее график в данной области, тем выше квантовая запутанность). Как видно из графика, существуют принципиально отличающиеся области совмещения параметров γ и D. Если при тех же условиях и в той же плоскости посмотреть на квадрупольный момент $P = \left\langle (S^z)^2 \right\rangle = \frac{\partial F}{\partial D}$, где F – свободная энергия (рис.1b), то будет очевидно, что между двумя графиками в определенных областях существует довольно строгое совпадение, в то время как в других областях их разграничительные линии не проявляются для запутанности. По сути, происходит следующее. При пересечении каждой разграничительной линии на рис.1b происходит некий аналог квантового фазового перехода для конечных систем. Однако, не каждый переход влечет за собой изменение квантовой запутанности. Поскольку запутанность в свою очередь является характеристикой чисто квантовых корреляций, то такое соответствие между квантовыми переходами и переходами в "фазовой" диаграмме запутанности наталкивает на предположение о возможности классификации квантовых фазовых переходов по квантовой запутанности. С другой стороны, поскольку квантовая запутанность есть, в сущности, энтропия, то ее обнаружение на экспериментах может происходить лишь косвенным образом через другие проявления. Получается, что в определенных областях квадрупольный момент становится именно таким свидетельством запутанности системы.

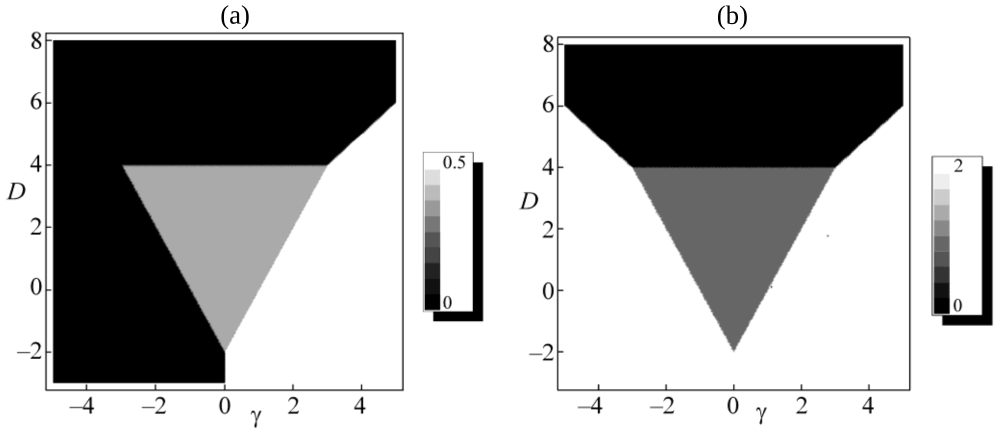

Рис.1. (a) Плотностный график отрицательности в зависимости от параметра анизотропии и кристаллического поля при сохранении квадрупольного момента ($J = K = 1$), отсутствии магнитного поля и при близких к нулю температурах. (b) Квадрупольный момент в зависимости от тех же величин при тех же условиях.

Перейдем к описанию теплового поведения квантовой запутанности. На рис.2a представлен частный случай зависимости квантовой запутанности от параметра изотропии и температуры. В основном, поведение отрицательности в зависимости от температуры монотонно убывающее, однако, можно заметить, что для не очень больших по величине отрицательных значений параметра анизотропии (приблизительно $-2.8 < \gamma < -1$) существует область увеличения запутанности. Сказанное объясняется следующими соображениями. При $\gamma < -1$ основным является незапутанная смесь состояний ψ_5 и ψ_7, которые в отдельности, по существу, эквивалентны классическим состояниям. Первые возбужденные состояния, сразу следующие за основным состоянием, в отсутствие магнитного и кристаллического полей есть смесь уже запутанных состояний ψ_1 и ψ_2. Если параметр анизотропии отрицателен и достаточно большой по величине, то теплового возбуждения при совместимых с термальной запутанностью температурах не хватает для того, чтобы система заняла этот уровень. Однако, существует промежуточная область значений γ, при которых из-за постепенного сближения основного уровня с первым возбужденным, с одной стороны, система успевает занять первый возбужденный уровень, а с другой, запутанность не разрушается. При последующем повышении температуры запутанность монотонно и постепенно исчезает.

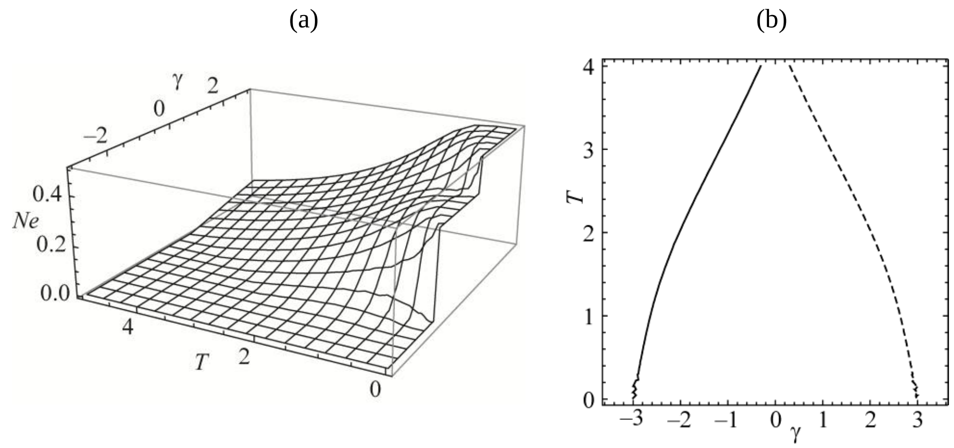

Рис.2. (a) Зависимость отрицательности от параметра изотропии и температуры (в энергетических единицах) при сохранении квадрупольного момента ($J = K = 1$), отсутствии магнитного и продольного кристаллического полей. (b) Критические линии исчезновения запутанности в плоскости T, сплошная линия соответствует антиферромагнитному случаю ($J = K = 1$), пунктирная – ферромагнитному ($J = K = 1$), поля отсутствуют.

Таким образом, включение температурного режима усиливает в определенной области квантовые эффекты [10, 21] из-за достигаемости чисто квантовых состояний. Если посмотреть на тот же самый график, но уже в плоскости $T = 0$, то видно, что на нем присутствуют две точки ($\gamma = -1$ и $\gamma = 1$) резкого скачкообразного изменения отрицательности. Это следствие того, что основное состояние (смесь незапутанных состояний ψ_5 и ψ_7 при $\gamma < -1$) в точке $\gamma = -1$ превратилось в смесь ψ_1, ψ_2, ψ_5 , ψ_7, которая уже запутана (первый скачок). В интервале значений $-1 < \gamma < 1$ основное состояние есть смесь запутанных состояний ψ_1 и ψ_2, которая в точке $\gamma = 1$ смешивается с еще одним состоянием ψ_6 (второй скачок). После этого значения параметра анизотропии основным является состояние ψ_6. С увеличением температуры, как и следовало ожидать, такое скачкообразное поведение сглаживается. Более того, на какой-то критической линии в плоскости $\gamma - T$ запутанность полностью разрушается. На рис.2b изображена именно эта критическая линия для случаев $J = K = 1$ (сплошная линия) и $J = K = -1$ (пунктирная линия). Эти кривые можно найти из условия обнуления последнего отрицательного собственного значения транспонированной по отношению к одной подсистеме матрицы плотности. Они задаются условием $(x^2-1)(x^3-x+2y)-x\sqrt{(x^4-1)(x^4-4x^2+7)}=0$, где $x=e^{2/T}$ и $y=e^{2J\gamma/T}$. В областях под этими линиями запутанность отлична от нуля, а по пересечении линий она исчезает. Можно заметить, что она отсутствует и при значениях параметра анизотропии $\gamma < -2.8$ и $\gamma < 2.8$ для любых температур, объяснение чего уже давалось.

Рассмотрим запутанность той же самой модели, но уже для трехчастичного случая. Поскольку величина, которую мы рассматриваем, является двухчастичной, то есть, вовлечены должны быть эффективно две степени свободы, и если мы в качестве степеней свобод рассматриваем отдельно взятые спины, то это приводит к необходимости редукции полной матрицы плотности посредством взятия следа вдоль "лишнего" спина. Если эти спины эквивалентны, то результат не будет зависеть от выбора редуцируемого спина. После решения задачи на собственную систему гамильтониана и редукции матрицы плотности были выполнены расчеты квантовой запутанности для вышеуказанной модели.

На рис.3 представлена зависимость квантовой запутанности от параметра анизотропии и температуры при $J = K = 1$, в отсутствие магнитного и кристаллического полей. Как видно из рисунка, как и в предыдущем случае, существуют области значений параметра анизотропии, где наблюдаются усиления квантовых эффектов при повышении температуры. Было установлено, что в трехчастичном случае (хотя задача в итоге эффективно редуцируется к двухчастичной) при одинаковых значениях внешних параметров, запутанность падает по сравнению с двухчастичным случаем. Было также установлено, что критиче-

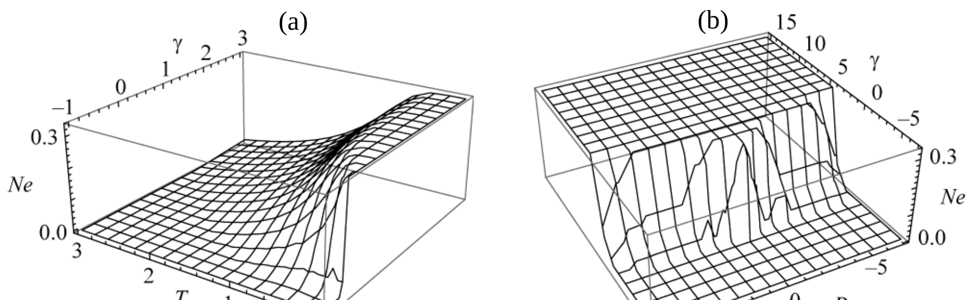

Рис.3. (a) Запутанность в зависимости от параметра анизотропии и температуры при сохранении квадрупольного момента ($J = K = 1$), отсутствии магнитного и кристаллического полей для трехчастичного кластера. (b) Платообразное поведение зависимости запутанности от магнитного поля и параметра J при $K = 2$, $D = 2$, $\gamma = 2$ при низких температурах.

ские температуры исчезновения понижаются в трехчастичном случае. Эти эффекты являются следствием фрустрированности системы.

5. Заключение

В работе проведено исследование структуры основного состояния и ее запутанности для двухчастичной анизотропной модели Гейзенберга со спином 1. Были установлены критические значения внешних параметров, при которых происходят квантовые переходы, являющиеся некими признаками квантовых фазовых переходов в термодинамическом пределе. Найдена связь между диаграммами квадрупольного момента и запутанности. Такое взаимное соответствие может быть использовано для классификации квантовых фазовых переходов. С другой стороны, квадрупольный момент при такой связи может быть использован как экспериментально проверяемое свидетельство запутанности. Проведенные расчеты запутанности при конечных температурах указали на существование режимов, при которых с ростом температуры происходит увеличение квантовых корреляций. Были установлены также критические температуры исчезновения квантовой запутанности. Для трехчастичного случая проведенные расчеты запутанности показали, что по сравнению с двухчастичным случаем при тех же значениях внешних параметров квантовая запутанность меньше, и с повышением температуры она исчезает быстрее.

Автор благодарит Н.С. Ананикяна и Л.Н. Ананикяна за полезные обсуждения и замечания в ходе подготовки работы, а также А.Г. Торосян за помощь при подготовке манускрипта.

ЛИТЕРАТУРА

1. **A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen.** Phys. Rev., **47**, 777 (1935).
2. **J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer.** Phys. Rev., **108**, 1175 (1957).
3. **R.B. Laughlin.** Phys. Rev. Lett., **50**, 1395 (1983).
4. **I. Bloch.** Nature Physics, **1**, 23 (2005).
5. **L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh, V. Vedral.** Rev. Mod. Phys., **80**, 517 (2008).
6. **S. Sachdev.** Quantum Phase Transitions, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1999.
7. **A. Osterloh, L. Amico, G. Falci, R. Fazio.** Nature (London), **416**, 608 (2002); **T.J. Osborne, M.A. Nielsen.** Phys. Rev. A, **66**, 032110 (2002); **G. Vidal, L.I. Latorre, E. Rici, A. Kitaev.** Phys. Rev. Lett., **90**, 227902 (2003); **J.I. Latorre, E. Rico, G. Vidal.** Quantum Imf. Comput., **4**, 48 (2004).
8. **L.E. Sadrel, et al.** Nature (London), **443**, 312 (2006).
9. **D. Larsson, H. Johannesson.** Phys. Rev. Lett., **95**, 196406 (2005).
10. **V.S. Abgaryan, N.S. Ananikian, L.N. Ananikyan, A.N. Kocharian.** Phys. Scr., **83**, 055702 (2011).
11. **A.N. Kocharian, G.W. Fernando, K. Palandage, J.W. Davenport**. Phys. Rev. B, **74**, 024511 (2006).
12. **S. Nakatsuji, et al.** Science, **309**, 1697 (2005).
13. **A.Z. Akheyan, N.S. Ananikian, S.K. Dallakian.** Phys. Lett. A, **242**, 111 (1998).

14. **N.S. Ananikian, S.K. Dallakian, N.Sh. Izmailian, K.A. Oganessyan.** Phys. Lett. A, **214**, 205 (1996).
15. **N. Ananikian, L. Ananikyan, R. Artuso, H. Lazaryan.** Phys. Lett. A, **374**, 4084 (2010).
16. **S. Bravyi, et al.** Phys. Rev. Lett., **109**, 207202 (2012).
17. **G. Vidal, R.W. Werner.** Phys. Rev. A, **65**, 032314 (2002).
18. **M.C. Arnesen, S. Bose, V. Vedral.** Phys. Rev. Lett., **87**, 017901(2001).
19. **W. Dur et al.** Phys. Rev. A, **62**, 062314 (2001).
20. **H. Bethe.** Z. Phys., **71**, 205 (1931).
21. **L. Takhtajan.** Phys. Lett. A, **87**, 479 (1982); **H. Babujan.** Nucl. Phys. B, **215**, 317 (1983).
22. **F.D.M. Haldane.** Phys. Lett. A, **93**, 464 (1983).

ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ԽՃՃՎԱԾՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ՓՈՒԼԱՅԻՆ ԱՆՑՈՒՄՆԵՐԸ ՀԱՅԶԵՆԲԵՐԳՅԱՆ ԵՐԿ- ԵՎ ԵՌԱՄԱՍՆԻԿ ՍՊԻՆ-1 ԿԼԱՍՏԵՐՆԵՐՈՒՄ

Վ.Ս. ԱԲԳԱՐՅԱՆ

Դիտարկված է ընդհանուր բազմանդամային տեսքի համիլտոնիանով նկարագրվող Հայզենբերգի մոդելը սպին-1 երկմասնիկային և եռամասնիկային քլաստերների համար։ Ուսումնասիրված է համակարգերում առկա քվանտային խճճվածության կախվածությունը արտաքին պարամետրերից և քվանտային փուլային անցումներից։ Աշխատանքում շեշտը դրված է անիզոտրոպային պարամետրի ազդեցություն ուսումնասիրությանը։ Դիտարկված է քվանտային խճճվածության ջերմային վարքագիծը։

QUANTUM ENTANGLEMENT AND QUANTUM PHASE TRANSITIONS IN ANISOTROPIC TWO- AND THREE-PARTICLE SPIN-1 HEISENBERG CLUSTERS

V.S. ABGARYAN

General polynomial case of Heisenberg model for spin-1 of two- and three-particle clusters is considered on matter of quantum entanglement and its evolution under quantum phase transitions induced by changes of external parameters. Influence of anisotropy parameter on the phase structure and quantum entanglement is studied. The thermal evolution of quantum entanglement is also investigated. Some similarities of ground state structures and phase diagrams of quantum entanglement in different planes of external parameters are considered.