Известия НАН Армении, Физика, т.49, №5, с.327-338 (2014)

УДК 539.2

АМПЛИТУДЫ МНОГОКАНАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ НА БАРЬЕРЕ, ИМЕЮЩЕМ ПОСТОЯННУЮ ВЫСОТУ В НАПРАВЛЕНИИ РАССЕЯНИЯ

Д.М. СЕДРАКЯН, Л.Р. СЕДРАКЯН*

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

*e-mail: lyovsed@yahoo.com

(Поступила в редакцию 29 января 2014 г.)

Метод погружения применен для решения задачи N-канального рассеяния. В частности, рассмотрено рассеяние частицы на многомерном барьере, который постоянен в направлении рассеяния и произволен в поперечном направлении. Для этого случая определены амплитуды рассеяния частицы t_m и r_m (m = 1, 2, …, N). С помощью полученных формул сделан переход к случаю тонкого рассеивающего потенциала. Для этого случая получены аналитические выражения для амплитуд прохождения t_m и отражения r_m. Предполагается, что рассеивающая частица падает на потенциал с продольным волновым вектором $\mathbf{k}_l$, соответствующим каналу с индексом l.

1. Введение

В последнее время в связи с возрастающими возможностями нанотехнологий по созданию низкоразмерных структур стало возможным создание структур с произвольными, наперед заданными структурными особенностями. Интенсивное исследование физических свойств одномерных и квазиодномерных низкоразмерных структур началось примерно с середины 70-ых годов, когда стало возможным осуществление так называемых сверхрешеток – периодических систем, образованных чередованием двух или нескольких структурных элементов. Современные технологические возможности позволяют получить системы, обладающие более сложной структурой. Это так называемые низкоразмерные апериодические образования, для которых периодичность расположения структурных элементов, приготовленных из одного материала, нарушена. В настоящее время идет интенсивное исследование физических свойств низкоразмерных систем со сложной структурой. Теоретическое исследование низкоразмерных структур и волн, распространяющихся в них, является сложной математической задачей. К настоящему времени развит целый ряд точных и приближенных методов для описания волн в одномерных и квазиодномерных средах. Перечислим наиболее известные из них: теория возмущений, метод трансфер-матриц, метод погружения, метод фазовых функций и метод функции Грина [1-5].

Можно утверждать, что до сих пор общих и точных теоретических подходов для рассмотрения задач данного класса в двух- и трехмерных постановках еще не существует. Даже в рамках приближенных методов получение окончательного результата требует выполнения большого количества численных расчетов. Для подобных задач в работе [6] был разработан новый метод, который фактически является обобщением метода погружения. Этот метод построен на предложенном в работах [7-9] рассмотрении квазиодномерного рассеяния волн на двухмерных и трехмерных потенциалах. В работе [10] с помощью этого метода было исследовано многоканальное квазиодномерное рассеяние квантовой частицы на произвольном двумерном потенциале.

В общем случае можно рассматривать рассеяние квантовой частицы, падающей на потенциал вида $V(x, y, z) = V_1(z)V_2(x, y)$, где функции V_1 и V_2 произвольны. Ограниченность движения в направлении, поперечном к направлению рассеяния z, обеспечивается заданием бесконечного потенциала на плоскости кругового цилиндра в случае трехмерной задачи с потенциалом $V_2 = V_2(x, y)$ и на плоскостях $y = 0$ и $y = c$ в случае двумерной задачи с потенциалом $V_2 = V_2(y)$. Ограничение движения в поперечной к рассеянию плоскости приводит к появлению дискретных энергетических уровней, число которых в общем случае бесконечно. Однако в зависимости от начальной продольной и поперечной энергии частицы энергетические уровни выше некоторого уровня не могут возбудиться из-за конечности начальной энергии частицы. В конце отметим, что в работе [10] предполагалось, что поперечное движение частицы, падающей на двумерный потенциал, соответствует наинизшему энергетическому уровню, и в зависимости от продольного импульса частицы возбуждается только N наинизших энергетических состояний поперечного движения.

В настоящей работе исследуется многоканальное рассеяние квантовой частицы, когда при падении на потенциал она находится на произвольном энергетическом уровне, описывающемся индексом l. В зависимости от начальной энергии частицы может возбуждаться конечное число уровней выше начального уровня и все нижележащие энергетические уровни. Важно, что число возбужденных энергетических уровней (или каналов рассеяния) конечно. В данной работе мы рассматриваем задачу рассеяния частицы на барьере, высота которого постоянна в направлении рассеяния и произвольна в перпендикулярном направлении. Результатом исследования будет получение амплитуд прохождения $t_1, t_2, \ldots, t_N$ и отражения $r_1, r_2, \ldots, r_N$ многоканального рассеяния.

2. Метод определения амплитуд рассеяния

Рассмотрим, в частности, многоканальное рассеяние квантовой частицы на потенциале $V(x, y, z) = V_1(z)V_2(x, y)$, где

$$V_1(z) = \begin{cases} K, & a \le z \le b, \\ 0, & a > z > b. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь K – постоянная, а $V_2(x, y)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условиям $V_2 = \infty$ на поверхности кругового цилиндра в случае трехмерной задачи и $V_2(0) = V_2(c) = \infty$ в случае двумерной задачи. Согласно работе [10], для получения амплитуд многоканального рассеяния необходимо решить следующую систему линейных дифференциальных уравнений относительно функций $L_1(z), L_2(z), \ldots, L_N(z)$:

$$\frac{d^2 L_m(z)}{dz^2} + q_m^2 L_m(z) - \sum_{i \neq m}^{N} V_{mi} L_i(z) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, N, \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} &q_m^2 = k_m^2 - V_{mm}, \quad k_m^2 = \chi^2 - \chi_{\mathrm{m}}, \\ &V_{mi} = K \int \Phi_m^* V_2(x, y) \Phi_i \, dxdy. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь индексы m описывают дискретные состояния поперечного движения рассеивающейся частицы, а $\Phi_m(x, y)$ есть собственные функции этих состояний. В частности, при рассмотрении трехмерной задачи индекс m соответствует индексам l и n, и собственная функция $\Phi_m = \Phi_{n,l}(\rho)\cos l\varphi$, где

$$\Phi_{n,l}(\rho) = \frac{I_l(\chi_{nl}\rho)}{a\sqrt{\pi} I_{l+1}(\chi_{nl} a)}. \tag{4}$$

Здесь $I_l(\chi_{nl}\rho)$ – цилиндрические функции Бесселя, а величины χ_{nl} определяются из условий $I_l(\chi_{nl} a) = 0$, где a – радиус сечения цилиндра. Матрица $V_{mi}(z)$ в этом случае имеет вид

$$V_{nl}^{n'l'} = K \int_0^a \rho d\rho \Phi_{nl}(\rho) \Phi_{n'l'}(\rho) \int_0^{2\pi} d\varphi V_2(\rho, \varphi) \cos l\varphi \cos l'\varphi, \tag{5}$$

где индекс m, как отмечено выше, соответствует паре индексов n, l, а индекс i – паре индексов n', l'.

При рассмотрении двумерной задачи индексу m соответствуют собственные функции

$$\Phi_m = \sqrt{2/a} \sin\left(\pi/c \, my\right), \quad m = 1, 2, \ldots, N, \tag{6}$$

и

$$V_{mi} = K \int_0^c \Phi_m^*(y) V_2(y) \Phi_i(y) dxdy.$$

Система уравнений (2) интегрируется до точки $z = b$ со следующими граничными условиями в точке a [10]:

$$\begin{aligned} &L_l(a) = -e^{-ik_l a}, \qquad \left.\frac{dL_l(z)}{dz}\right|_{z=a} = ik_l e^{-ik_l a}, \\ &L_m(a) = \left.\frac{dL_l(z)}{dz}\right|_{z=a} = 0 \quad \text{при} \quad m \neq l \quad \text{и} \quad m = 1, 2, \ldots, N. \end{aligned} \tag{7}$$

Обозначим значения функций $L_1(z)$, $L_2(z)$, …, $L_N(z)$ в точке $z = b$ через L_1,

L_2, …, L_N. Амплитуды рассеяния определяются величинами $D_1, D_2, \ldots, D_N$ и $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \ldots, \tilde{D}_N$, которые связаны с значениями функций $L_m(z)$ и их первых производных в точке $z = b$ следующими соотношениями [10]:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_m &= \frac{1}{2}\left(L_m + M_m\right)e^{-ik_m b}, \quad m = 1, 2\ldots, N, \\ D_m &= \frac{1}{2}\left(M_m - L_m\right)e^{ik_m b}, \quad m = 1, 2\ldots, N, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$M_m = \frac{1}{ik_m}\frac{dL_m(z)}{dz}\bigg|_{z=b}.$$

Согласно работе [11], амплитуды рассеяния t_m и r_m выражаются через D_m и $\tilde{D}_m$ следующими формулами:

$$\begin{aligned} t_l &= \frac{D_l^*}{|D|^2}, \qquad r_l = \frac{\left(D_l \tilde{D}_l\right)^*}{|D_l||D|}, \\ t_m &= \frac{D_m^*}{|D|^2}, \qquad r_m = \frac{\tilde{D}_m^*}{|D|}, \qquad m = 1, 2, \ldots, N, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$|D|^2 = |D_l|^2 + \sum_{m \neq l} \frac{k_m}{k_l} |D_m|^2 .$$

Если ввести перенормированные амплитуды прохождения T_m и отражения R_m по формулам

$$T_m = \sqrt{\frac{k_m}{k_l}} t_m \quad \text{и} \quad R_m = \sqrt{\frac{k_m}{k_l}} r_m, \tag{10}$$

то, как увидим ниже, полная вероятность прохождения $|T|^2 = \sum_m |T_m|^2$ и отражения $|R|^2 = \sum_m |R_m|^2$ связаны друг с другом естественным соотношением $|T|^2 + |R|^2 = 1$. В конце отметим, что величина $|D|$, входящая в определения t_m и r_m, связана с вероятностью прохождения барьера простой формулой $|D| = 1/|T|$.

Таким образом, интегрируя систему дифференциальных уравнений (2) и определяя величины L_m и M_m, можно определить амплитуды многоканального рассеяния t_m и r_m.

3. Решения системы уравнений для функции $L_m(z)$

Решение системы уравнений (2) будем искать в следующем виде:

$$L_m(z) = \sum_{i=1}^{N} A_{mi}^l \exp(i\chi_i(z - a)), \tag{11}$$

где χ_i – еще не определенные постоянные, а индекс l на коэффициентах A^l_{mi} показывает, что частица при встрече с рассеивающим потенциалом находится на энергетическом уровне, описывающемся индексом l. Коэффициенты A^l_{mi} определяются из алгебраических уравнений, которые получаются при подстановке решения (11) в систему уравнений (2). Если ввести обозначения

$$\tilde{V}_{mm} = \chi_i^2 - q_m^2 = \chi_i^2 - k_m^2 + V_{mm},$$

то система полученных алгебраических уравнений примет вид

$$\begin{gathered}
\tilde{V}_{11} A^l_{1i} + V_{12} A^l_{2i} + \ldots + V_{1N} A^l_{Ni} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots \\
V_{l1} A^l_{1i} + \ldots + \tilde{V}_{ll} A^l_{li} + \ldots + V_{lN} A^l_{Ni} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots \\
V_{N1} A^l_{1i} + V_{N2} A^l_{2i} + \ldots + \tilde{V}_{NN} A^l_{Ni} = 0.
\end{gathered} \tag{12}$$

Система уравнений (12) имеет отличные от нуля решения для тех χ_i, которые являются решениями уравнения

$$D_1 = \begin{vmatrix} \tilde{V}_{11},\ V_{12}, \ldots V_{1N} \\ \ldots\ldots\ldots \\ V_{l1}, \ldots \tilde{V}_{ll}, \ldots V_{lN} \\ \ldots\ldots\ldots \\ V_{N1},\ V_{N2}, \ldots \tilde{V}_{NN} \end{vmatrix} = 0, \tag{13}$$

где D_1 есть детерминант системы уравнений (12). Обозначим многообразие решений χ_i через $\pm Q_i$, где Q_i – положительная величина и равняется $2N$. Здесь мы предполагаем, что полученные корни уравнения (13) отличаются друг от друга. Если корни повторяются, то решение строится другим образом.

Если выполняется условие (13), то из системы уравнений (12) можно определить только величины

$$C^l_{mi} = \frac{A^l_{mi}}{A^l_{li}}. \tag{14}$$

Система уравнений, определяющая C^l_{mi}, имеет вид

$$\begin{gathered}
\tilde{V}_{11} C^l_{1i} + \ldots + V_{1N} C^l_{Ni} = -V_{1l}, \\
\ldots\ldots\ldots \\
V_{N1} C^l_{1i} + \ldots + \tilde{V}_{NN} C^l_{Ni} = -V_{Nl}.
\end{gathered} \tag{15}$$

Решение системы уравнений (15) имеет вид

$$C^l_{mi} = \frac{D_2(m)}{D_2}, \tag{16}$$

где детерминанты D_2 есть

$$D_2 = \begin{vmatrix} \tilde{V}_{11} \ldots\ldots V_{1N} \\ \ldots\ldots \\ V_{N1} \ldots\ldots \tilde{V}_{NN} \end{vmatrix}, \tag{17}$$

а $D_2(m)$ – это детерминант D_2, только вместо столбца из коэффициентов C_{mi}^l взят столбец, состоящий из правой части системы уравнений (15).

Запишем решение (11) в следующем виде:

$$\begin{aligned} L_l(z) &= \sum_{i=1}^{N} \left\{ A_{li}^l \exp\left(iQ_i(z-a)\right) + B_{li}^l \exp\left(-iQ_i(z-a)\right) \right\}, \\ L_m(z) &= \sum_{i=1}^{N} C_{mi}^l \left\{ A_{li}^l \exp\left(iQ_i(z-a)\right) + B_{li}^l \exp\left(-iQ_i(z-a)\right) \right\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь мы раздельно написали члены с положительным и отрицательным корнями: $\chi_i = \pm Q_i$, и для первого случая использовали коэффициенты A_{mi}^l, а для второго случая ввели коэффициенты B_{mi}^l. Нам нужны также выражения для производных функций $L_m(z)$. Подставляя (18) и их производные в граничные условия решения (7), получим

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N} F_{li}^{+} = -\exp\left(-ik_l a\right), \qquad \sum_{i=1}^{N} C_{mi}^l F_{li}^{+} = 0, \qquad m \neq l \quad m = 1, 2, \ldots, N, \\ &\sum_{i=1}^{N} F_{li}^{-} = -\exp\left(-ik_l a\right), \qquad \sum_{i=1}^{N} C_{mi}^l F_{li}^{-} = 0, \qquad m \neq l \quad m = 1, 2, \ldots, N, \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$F_{li}^{+} = A_{li}^l + B_{li}^l, \quad F_{li}^{-} = -\frac{Q_i}{k_l}\left(A_{li}^l - B_{li}^l\right). \tag{20}$$

Величины F_{li}^{+} и F_{li}^{-} связаны очевидным соотношением

$$F_{li}^{+} = A_{li}^l + B_{li}^l = -\frac{Q_i}{k_l}\left(A_{li}^l - B_{li}^l\right) = F_{li}^{-}. \tag{21}$$

Следовательно, для дальнейших вычислений достаточно найти только величину F_{li}^{+}. Эта величина находится из решения системы уравнений (19) и имеет вид:

$$F_{li}^{+} = \frac{(-1)^i d_i \exp(-ik_l a)}{D_3}, \tag{22}$$

где $D_3 = -\sum_{i=1}^{N} (-1)^i d_i$ и d_i есть детерминант, который состоит из матричных элементов C_{Ni}^l без *i*-того столбца. Далее, решая систему уравнений (20), окончательно получим

$$A_{li}^l = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{k_l}{Q_i}\right) F_{li}^{+}, \qquad B_{li}^l = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{k_l}{Q_i}\right) F_{li}^{+}. \tag{23}$$

Подставляя (23) в решение (18), для функций $L_m(z)$ и $M_m(z)$ получим следующие выражения:

$$L_m(z)=\sum_{i=1}^{N} C_{mi}^{l} F_{li}^{+}\left[\cos\left(Q_i(z-a)\right)-\frac{ik_l}{Q_i}\sin(Q_i(z-a))\right],$$
$$M_m(z)=\frac{-k_l}{k_m}\sum_{i=1}^{N} C_{mi}^{l} F_{li}^{+}\left[\cos\left(Q_i(z-a)\right)-\frac{iQ_i}{k_l}\sin(Q_i(z-a))\right]. \tag{24}$$

Искомые величины D_m и $\tilde{D}_m$ $(m=1,2,\ldots,N)$ определяются подстановкой (24) в формулы (8). Для этого сначала определяются значения функций $L_m(z)$ и $M_m(z)$ в точке $z = b$, далее их подставляют в формулы (8). Сделав несложные преобразования, окончательно получим

$$D_m(b)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} C_{mi}^{l}\phi_{li}^{+}\left[-\left(1+\frac{k_l}{k_m}\right)\cos Q_i d+i\left(\frac{Q_i}{k_m}+\frac{k_l}{Q_i}\right)\sin Q_i d\right]\times$$
$$\times\exp(i(k_l+k_m)d/2)\exp(-i(k_l-k_m)z_0),$$
$$\tag{25}$$
$$\tilde{D}_m(b)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} C_{mi}^{l}\phi_{li}^{+}\left[\left(1-\frac{k_l}{k_m}\right)\cos Q_i d+i\left(\frac{Q_i}{k_m}-\frac{k_l}{Q_i}\right)\sin Q_i d\right]\times$$
$$\times\exp(i(k_l-k_m)d/2)\exp(-i(k_l+k_m)z_0),$$

где

$$\phi_{li}^{+}=F_{li}^{+}\exp(ik_l a),$$
$$b=z_0+d/2,\quad a=z_0-d/2.$$

Здесь z_0 – координата центра потенциала и d – ширина барьера.

4. Определение амплитуд рассеяния для тонкого рассеивающего потенциала

Выражения для амплитуд рассеяния в случае произвольной толщины d рассеивающего потенциала громоздки, поэтому мы здесь получим их выражения для случая тонких рассеивающих потенциалов. Для этого в формулах, определяющих D_m и $\tilde{D}_m$, перейдем к малым d так, чтобы принять $\cos(Q_i d)\approx 1$ и $\sin(Q_i d)\approx Q_i d$. Для случая $m=l$ окончательно получим

$$D_l=1+\frac{iu_{ll}}{2k_l},\quad \tilde{D}_l=\frac{iu_{ll}}{2k_l}\exp(-2ik_l z_0), \tag{26}$$

где

$$u_{ll}=\sum_{i=1}^{N} x_i^2\Phi_{li}^{+}. \tag{27}$$

Для случая $m\neq l$ получим

$$D_m=\frac{iu_{lm}}{2k_m}\exp(-i(k_l-k_m)z_0),\quad \tilde{D}_m=\frac{iu_{lm}}{2k_m}\exp(-i(k_l+k_m)z_0), \tag{28}$$

где

$$u_{lm} = \sum_{i=1}^{N} C_{mi}^{l} x_i^2 \Phi_{li}^{+}. \tag{29}$$

Заметим, что определение (29) при $m = l$ переходит в (27), так как $C_{li}^{l} = 1$. Здесь мы также ввели обозначение $x_i^2 = Q_i^2 d << 1$ и x_i^2 определяется из уравнения

$$D_1 = \begin{vmatrix} \tilde{v}_{11}, v_{12}, \ldots v_{1N} \\ \ldots\ldots\ldots \\ v_{N1}, v_{N2}, \ldots \tilde{v}_{NN} \end{vmatrix} = 0,$$

которое есть уравнение (13), где V_{ik} умножено на d и величины $V_{ik}d$ обозначены через v_{ik}.

Перейдем к определению связи между матричными элементами u_{lm} и v_{lm}. Для этого в формулу (29) подставим значение величины

$$\phi_{li}^{+} = \frac{(-1)^i}{D_3} \begin{vmatrix} 1\ldots..1\ldots..1 \\ C_{21}^{l} \ldots 0 \ldots C_{2N}^{l} \\ \ldots\ldots \\ C_{N1}^{l} \ldots 0 \ldots C_{NN}^{L} \end{vmatrix}. \tag{30}$$

Просуммировав полученное выражение, окончательно имеем

$$u_{lm} = -\frac{1}{D_3} \begin{vmatrix} C_{m1}^{l} x_1^2 \ldots\ldots C_{mN}^{l} x_N^2 \\ C_{21}^{l} \ldots\ldots\ldots\ldots C_{2N}^{l} \\ \ldots\ldots \\ C_{N1}^{l} \ldots\ldots\ldots\ldots C_{NN}^{l} \end{vmatrix}. \tag{31}$$

Чтобы найти v_{ml}, умножим систему уравнений (15), определяющую C_{mi}^{l}, на d и, заменяя $V_{ml}d$ на v_{ml}, для m-ого из полученных уравнений получим следующее выражение:

$$v_{ml} + v_{m2} C_{2i}^{l} + \ldots + V_{mm} C_{mi}^{l} + \ldots + v_{mN} C_{Ni}^{l} = -x_i^2 C_{mi}^{l}. \tag{32}$$

Меняя индекс i от единицы до N, вместо (32) получим систему уравнений, определяющих v_{ml}. Решив эту систему уравнений, получим:

$$v_{ml} = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 C_{m1}^{l},\ C_{21}^{l}, \ldots C_{N1}^{l} \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_N^2 C_{mN}^{l},\ C_{2N}^{l}, \ldots C_{NN}^{l} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1,\ C_{21}^{l}, \ldots C_{N1}^{l} \\ \ldots\ldots\ldots \\ 1,\ C_{2N}^{l}, \ldots C_{NN}^{l} \end{vmatrix}}. \tag{33}$$

Если в выражении (33) вращать детерминанты в числителе и знаменателе, то получим, что знаменатель формулы (33) есть D_3, а числитель совпадает с детерминантом, входящим в формулу (31). Из этого следует, что $u_{ml} = v_{ml}$, если $m \neq$

l. Можно также доказать, что $u_{ll} = v_{ll}$.

Итак, формулы (26) и (28) можно переписать в следующем виде:

$$D_l = 1 + \frac{iv_{ll}}{2k_l}, \qquad \tilde{D}_l = \frac{iv_{ll}}{2k_l} \exp\left(-2ik_l z_0\right),$$
$$D_m = \frac{iv_{lm}}{2k_m} \exp\left(-i\left(k_l - k_m\right) z_0\right), \qquad \tilde{D}_m = \frac{iv_{lm}}{2k_m} \exp\left(-i\left(k_l + k_m\right) z_0\right), \qquad m \neq l. \tag{34}$$

Полученные выражения для D_m и $\tilde{D}_m$ далее можно использовать для определения амплитуд многоканального рассеяния. Причем, при получении выражений для амплитуд рассеяния необходимо учесть, что толщина потенциала d в направлении рассеяния настолько мала, что имеет место $v_{lm}^2 << 4k_m^2$ для всех l и m.

Следует отметить важное свойство амплитуд рассеяния. Как видно из формул (9) и (25), амплитуда прохождения t_l не зависит от координаты середины потенциала z_0, тогда как амплитуда отражения r_l имеет фазовый множитель $\exp(2ik_l z_0)$. Что касается рассеяния по каналу m, то амплитуды прохождения t_m и отражения r_m имеют фазовые множители $\exp(i(k_l - k_m)z_0)$ и $\exp(i(k_l + k_m)z_0)$, соответственно. Отсюда следует, что фазовый множитель произведения $t_m r_m$ равняется $\exp(2ik_l z_0)$ и не зависит от канала рассеяния. Это свойство N-канального рассеяния нами было использовано при решении задачи локализации электрона на квазипериодической системе потенциалов [12]. Это свойство для случая $l = 1$ впервые было получено в работе [10].

5. Обсуждение результатов

Используя выражения (25) для функций D_m и $\tilde{D}_m$, из формул (9) можно получить амплитуды рассеяния и коэффициенты прохождения и отражения для многоканального рассеяния для потенциала (1). Полученные выражения амплитуд рассеяния для потенциала (1) с произвольной толщиной d слишком громоздки, поэтому здесь мы приведем их выражения только для тонких рассеивающих потенциалов. В этом приближении величины D_m и $\tilde{D}_m$ определены формулами (28), надо также учесть, что $v_{lm}^2 << 4k_m^2$ для всех l и m. Подставив выражения D_m и $\tilde{D}_m$ в формулы (9), для амплитуд рассеяния получим

$$T_l = t_l = \frac{1 - {iv_{ll}}/{2k_l}}{\Gamma + \Gamma'}, \qquad R_l = r_l = -\frac{{iv_{ll}}/{2k_l}\left(1 - {iv_{ll}}/{2k_l}\right)\exp\left(2ik_l z_0\right)}{\left(1 + {iv_{ll}^2}/{4k_l^2}\right)^{1/2}\left(\Gamma + \Gamma'\right)^{1/2}}, \tag{35}$$

а также

$$T_m = \sqrt{\frac{k_m}{k_l}} t_m = -\frac{iv_{lm}}{\sqrt{4k_l k_m}} \frac{\exp\left(i\left(k_l - k_m\right) z_0\right)}{(\Gamma + \Gamma')},$$
$$R_m = \sqrt{\frac{k_m}{k_l}} r_m = -\frac{iv_{lm}}{\sqrt{4k_l k_m}} \frac{\exp\left(i\left(k_l + k_m\right) z_0\right)}{\left(\Gamma + \Gamma'\right)^{1/2}}, \tag{36}$$

где

$$\Gamma = 1 + {v_{ll}^2}\big/{4k_l^2}, \quad \Gamma' = \sum_{m\neq l} {v_{lm}^2}\big/{4k_l k_m}. \tag{37}$$

Что касается вероятностей прохождения и отражения по разным каналам, то получаются следующие выражения:

$$|T_l|^2 = |t_l|^2 = \frac{\Gamma}{(\Gamma+\Gamma')^2}, \quad |R_l|^2 = |r_l|^2 = \frac{{v_{ll}^2}\big/{4k_l^2}}{\Gamma+\Gamma'}, \tag{38}$$

а также

$$|T_m|^2 = \frac{k_m}{k_l}|t_m|^2 = \frac{{v_{lm}^2}\big/{4k_l k_m}}{(\Gamma+\Gamma')^2}, \quad |R_m|^2 = \frac{k_m}{k_l}|r_m|^2 = \frac{{v_{lm}^2}\big/{4k_l k_m}}{\Gamma+\Gamma'}. \tag{39}$$

Используя формулы (38) и (39), легко проверить равенство

$$|t_l|^2 + |r_l|^2 + \sum_{m\neq l}\frac{k_m}{k_l}\left(|t_m|^2 + |r_m|^2\right) = \sum_m\left(|T_m|^2 + |R_m|^2\right) = |T|^2 + |R|^2 = 1, \tag{40}$$

то есть условие непрерывности потока частиц. Если учесть условие $v_{lm}^2 << 4k_m^2$ для всех l и m формулы (38) и (39) примут более простой вид:

$$\begin{aligned} &|T_l|^2 = |t_l|^2 = 1 - \frac{v_{ll}^2}{4k_l^2} - \sum_{m\neq l}\frac{v_{lm}^2}{4k_l k_m}, \\ &|R_l|^2 = |r_l|^2 = \frac{v_{ll}^2}{4k_l^2}, \\ &|T_m|^2 = |R_m|^2 = \frac{k_m}{k_l}|t_m|^2 = \frac{k_m}{k_l}|r_m|^2 = \frac{v_{lm}^2}{4k_l k_m}, \qquad m \neq l. \end{aligned} \tag{41}$$

Как видно из выражений (41), рассеяние происходит не только по начальному каналу l, но и возбуждаются каналы $m \neq l$, причем m может быть как больше, так и меньше l. Надо учесть, что при изменении канала рассеяния полная энергия частицы не меняется, и следовательно k_m увеличивается при $m < l$ и уменьшается в обратном случае, т.е. при $m > l$. Отсюда сразу следует, что рассеяние в основном происходит по каналу l и по каналам $m > l$. Рассеяние по каналам $m < l$ значительно меньше.

Согласно формулам (41), рассеяние по “начальному каналу” l описывается амплитудами, аналогичными случаю одномерного рассеяния. Однако, вместо потенциалов V в формулах фигурирует потенциал v_{ll}, который уже зависит от волновых функций поперечного движения частицы, соответствующего каналу l. Естественно, кроме этого в формулах для амплитуд рассеяния в знаменателях к обычному Γ добавляются члены, зависящие от v_{lm}^2, и конечно, от продольного импульса k_m. При увеличении v_{lm}^2 и уменьшении k_m вклад этих членов увеличивается, что приводит к уменьшению амплитуд рассеяния по каналу l.

Подробно рассмотрим случай рассеяния по каналам $m > l$. Как видно из формул (41), рассеяние по каналам $m \neq l$ зависит от “вероятности перехода” с канала l на канал m, т.е. от v_{lm}^2 и от величины продольного импульса k_m этого канала. То, что амплитуды рассеяния по каналу m пропорциональны v_{lm}^2, естественно, однако их зависимость от продольного импульса k_m своеобразно. Действительно, на каналах, имеющих малые продольные импульсы k_m ($m > l$), амплитуды рассеяния увеличиваются. Их вероятность может стать больше, чем вероятность отражения по каналу l. Действительно, отношение этих амплитуд

$$\frac{|R_l|^2}{|R_m|^2} = \frac{v_{ll}^2}{v_{lm}^2}\frac{k_m}{k_l}$$

Пропорционально k_m/k_l, и при $d \to 0$ отношение v_{ll}^2/v_{lm}^2 не зависят от d, тогда как k_m/k_l уменьшается при $m > l$. Следовательно, вероятность рассеяния по каналам с малыми k_m имеет тенденцию увеличения и для некоторых частных потенциалов рассеяния может сравниться с вероятностью прохождения частицы по каналу l, т.е. возможен случай, когда $|R_m|^2 = |T_m|^2$ может стать порядка $|T_l|^2$. На наш взгляд, такой случай может реализоваться при многоканальном рассеянии на δ-образном потенциале. Для такого потенциала $d \to 0$ и высота $V_{lm} \to \infty$, следовательно, $V_{lm}d = v_{lm}$ не является малой величиной и v_{lm}^2 может быть порядка или больше $4k_l k_m$ для всех l и m.

Наша следующая работа будет посвящена рассмотрению многоканального рассеяния на δ-образном потенциале.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Д.М. Седракян, А.Ж. Хачатрян, Э.М. Казарян, Л.Р. Седракян.** Изв. НАН Армении, Физика, **44**, 167 (2009).
2. **J.H. Davis.** The Physics of Low-Dimensional Semiconductors. Cambridge Univ. Press, 1998.
3. **И.В. Кляцкин.** Метод погружения в теории распространения волн. М., Наука, 1986.
4. **В.В. Бабиков.** Метод фазовых функций в квантовой механике. М., Наука, 1976.
5. **P. Erdos, R.C. Herdon.** Adv. Phys., 31, 65 (1982).
6. **Д.М. Седракян, Э.М. Казарян, Л.Р. Седракян.** Изв. НАН Армении, Физика, **44**, 395 (2009).
7. **D. Boese, M. Lischka, L.E. Reichl.** Phys. Rev. B, **62**, 16933 (2000).
8. **S. Souma, A. Suzuki.** Phys. Rev. B. **65**, 115307 (2002).
9. J. **Prior, A.M. Somoza, M. Ortuno.** Phys. Rev. B. **72**, 024206 (2005).
10. **Д.М. Седракян, Л.Р. Седракян, А.В. Маргарян**. Изв. НАН Армении, Физика, **46**, 147 (2011).
11. **Д.М. Седракян, Э.М. Казарян, Л.Р. Седракян.** Изв. НАН Армении, Физика, **45**, 173 (2010).
12. **Д.М. Седракян, Л.Р. Седракян.** ФТТ, **53**, 1628 (2011).

ԲԱԶՄՈՒՂԻ ՑՐՄԱՆ ԱՄՊԼԻՏՈՒԴՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ՑՐՄԱՆ ՈՒՂՂՈՒԹՅԱՄԲ ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԲԱՐՁՐՈՒԹՅԱՄԲ ՊՈՏԵՆՑԻԱԼԱՅԻՆ ԱՐԳԵԼՔԻ ՎՐԱ

Դ.Մ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ, Լ.Ռ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ

Բազմուղի ցրման խնդրի լուծման համար կիրառված է ընկղման մեթոդը կոնկրետ պոտենցիալի դեպքում: Մասնավորապես, դիտարկված է մասնիկի ցրումը երկչափ արգելքի վրա, որը հաստատուն է ցրման ուղղությամբ և կամայական լայնական ուղղությամբ: Այս դեպքի համար որոշված են ցրման t_m և r_m (m = 1, 2, …, N) ամպլիտուդները: Ստացված բանաձևերից անցում է կատարվել բարակ պոտենցիալի դեպքին: Այդ դեպքի համար ստացված են արտահայտություններ անցման t_m և անդրադարձման r_m ամպլիտուդների համար: Ենթադրվել է, որ ցրվող մասնիկը արգելքին է մոտենում $\mathbf{k}_l$ երկայնական ալիքային վեկտորով, որը համապատասխանում է ցրման l-րդ ուղղուն:

AMPLITUDES OF MULTICHANNEL SCATTERING ON THE BARRIER WITH A CONSTANT HEIGHT IN THE SCATTERING DIRECTION

D.M. SEDRAKIAN, L.R. SEDRAKIAN

The immersing method is applied to solve the N-channel scattering problem. In particular, we consider the particle scattering on a multidimensional potential barrier, which is constant in the scattering direction and arbitrary in the cross-section direction. For this case the scattering amplitudes t_m and r_m (m = 1, 2, …, N) are determined. A transition from the obtained formulas to the case of thin potential is performed. For this case transmission amplitudes t_m and reflection amplitudes r_m are obtained. We show that the product of transmission and reflection amplitudes by the channel m does not depend on the scattering channel. It is assumed that the scattering particle falls on the potential with the longitudinal wave vector $\mathbf{k}_l$ corresponding to the channel with the index l.