Известия НАН Армении, Физика, т.49, №3, с.161-167 (2014)

УДК 539.1

ПОЛНАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ПРИ КВАНТОВОМ ТУННЕЛИРОВАНИИ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН

Г.А. МУРАДЯН*, А.Р. АКОПЯН, А.Ж. МУРАДЯН

Ереванский государственный университет, Армения

*e-mail:gmurad@ysu.am

(Поступила в редакцию 4 февраля 2013 г.)

Задача квантового туннелирования рассмотрена для волн материи, падающих на потенциальный барьер с двух сторон. Исследована возможность полного туннелирования одной из падающих волн при одновременном полном отражении другой. Анализ проведен для двух существенно разных видов потенциального барьера: прямоугольного и колоколообразного.

1. Введение

Квантовое туннелирование элементарной частицы через потенциальный барьер является прямым следствием волновой природы материи и как таковое подчинено явлению интерференции (см., например, [1]). При наличии неоднородного внешнего потенциала (потенциальный барьер или потенциальная яма) образуется и волна другого, противоположного направления. Поэтому доминирующим элементом в формировании волновой функции туннелирующей частицы является интерференция между прямо и противоположно распространяющимися волнами. Соображения о конструктивной и деструктивной интерференции, когда наложенные волны, соответственно, усиливают или подавляют друг друга, лежат в основе конструирования внешних потенциалов с желаемыми коэффициентами отражения и пропускания. Общеизвестно в этом роде явление резонансного туннелирования [2,3], когда пара двух почти непроницаемых по отдельности потенциальных барьеров из-за конструктивной интерференции материальных волн в межбарьерном пространстве становится полностью проницаемой для ряда значений энергий падающей частицы. Приведенные соображения наводят на мысль, что проблему искомого разделения волны на проходящую и отраженную части можно решить не только выбором вида внешнего потенциала, но и использованием другой, падающей на потенциальный барьер с противоположной стороны волны. В настоящей работе такая возможность анализируется для двух наиболее часто используемых модельных потенциалов – прямоугольного и колоколообразного. Специальное внимание уделено возможности полного подавления отражения, то есть возможности того, чтобы путем деструктивной интерференции отраженная часть одной падающей на барьер волны была бы полностью подавлена проходящей частью противоположно падающей волны.

2. Квантовое туннелирование встречных волн через прямоугольный барьер

Задача квантового туннелирования в стационарном режиме взаимодействия представляется решением стационарного уравнения Шредингера

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+(E-U(x))\,\psi(x)=0\,, \qquad (1)$$

где потенциальная энергия $U(x)$ будет вначале выбрана в виде прямоугольного потенциала:

$$U(x)=\begin{cases}0 & -\infty<x<0,\\ U & 0\le x\le a,\\ 0 & 0<x<\infty.\end{cases} \qquad (2)$$

Тогда общее решение уравнения (1) можно представить в виде

$$U(x)=\begin{cases}A_1\,e^{i\sqrt{2mE/\hbar^2}\,x}+A_2\,e^{-i\sqrt{2mE/\hbar^2}\,x} & \infty<x<0,\\ B_1\,e^{\sqrt{2m(U-E)/\hbar^2}\,x}+B_2\,e^{-\sqrt{2m(U-E)/\hbar^2}\,x} & 0\le x\le a,\\ C_2\,e^{i\sqrt{2mE/\hbar^2}\,x}+C_1\,e^{-i\sqrt{2mE/\hbar^2}\,x} & 0<x<\infty,\end{cases} \qquad (3)$$

что предполагает наличие падающих волн с обеих сторон (с амплитудами A_1 и C_1, соответственно). Условие непрерывности волновой функции и ее первой производной на граничных точках $x=0$ и $x=a$ записывается в виде

$$A_1+A_2=B_1+B_2\,,\ i\,k\,A_1-i\,k\,A_2=\chi B_1-\chi B_2, \qquad (4a)$$

$$B_1e^{\chi}+B_2e^{-\chi}=C_2e^{ik}+C_1e^{-ik},\ \chi B_1e^{\chi}-\chi B_2e^{-\chi}=i\,k\,C_2e^{ik}-i\,k\,C_1e^{-ik}, \qquad (4b)$$

где введены безразмерные параметры $k=\sqrt{2mE/\hbar^2}\,a$, $u=\sqrt{2mU/\hbar^2}\,a$ и $\chi=\sqrt{u^2-k^2}$.

Считая в (4a, b) амплитуды падающих на барьер волн A_1 и C_1 заданными, для амплитуд отраженных волн A_2 и C_2 непосредственно получаем

$$A_2=r_a\,A_1+t_c\,C_1,\ C_2=t_a\,A_1+r_c\,C_1\,, \qquad (5)$$

где

$$r_a=e^{2ik}r_c=\frac{(e^{2\chi}-1)\,u^2}{-(e^{2\chi}-1)\,u^2+2i\,(e^{2\chi}+1)\,k\,\chi},$$

$$t_a=t_c=\frac{4i\,e^{-ik+\chi}k\,\chi}{-(e^{2\chi}-1)\,u^2+2i\,(e^{2\chi}+1)\,k\,\chi}. \qquad (6)$$

Структура первого уравнения в (5) показывает, что удаляющаяся налево от барьера волна образуется частичным отражением левосторонне падающей волны (амплитуды A_1) и частичным прохождением правосторонне падающей волны (амплитуды C_1). Такова и структура удаляющейся направо от барьера волны. При этом коэффициенты r_a и r_c определяют амплитуды отраженных, а коэффициенты t_a и t_c – амплитуды проходящих волн.

Суперпозиционный характер амплитуд A_2 и C_2 указывает также на интересную возможность полного обнуления одной из них, то есть полного подавления левосторонней или правосторонней отходящей от барьера волны. Поскольку картина полностью симметрична относительно обоих направлений, то в дальнейшем без ущерба общности будем считать амплитуду левосторонне падающей волны равной единице: $A_1 = 1$. В случае подавления отходящей налево от барьера волны имеем

$$A_2 = r_a + t_c\, C_1 = 0\,, \tag{7}$$

что для амплитуды C_1 дает следующее представление через параметры барьера и энергии падающей волны:

$$\mathrm{Abs}[C_1] = \frac{u^2}{4k}\mathrm{Abs}\left[\frac{e^{\chi} - e^{-\chi}}{\chi}\right], \quad \mathrm{Arg}[C_1] = \mathrm{Mod}\left[-\frac{\pi}{2} + k, 2\pi\right]. \tag{8}$$

Уравнение (7) может быть интерпретировано и как условие на значение параметра барьера u (или волнового вектора k) при известной амплитуде C_1.

Рис.1 иллюстрирует $\mathrm{Abs}[C_1]$ из (8) как функцию волнового вектора $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}\, a$. Как и следовало ожидать, график расходится в пределе малых волновых векторов (энергий), а периодические нулевые значения соответствуют условиям максимумов резонансного туннелирования [4].

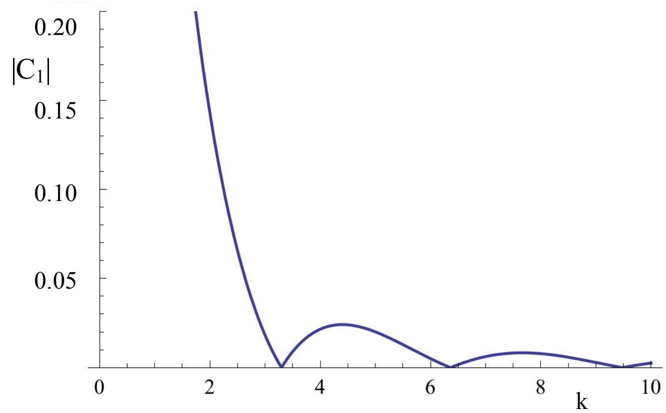

Рис.1. Модуль и фаза амплитуды C_1 в зависимости от энергии падающих волн при подавлении левостороннего отражения от прямоугольного барьера. Параметр $u = 1$.

Интересно отметить, что рассмотренное одностороннее подавление отходящей от барьера волны с полным основанием может быть воспринято и как режим полного прохождения волны A_1 с одновременным полным отражением противополжной волны C_1.

В случае подавления отходящей направо от барьера волны

$$C_2 = t_a + r_c\, C_1 = 0, \tag{9}$$

и, соответственно,

$$\mathrm{Abs}[C_1] = \frac{4k}{u^2}\,\mathrm{Abs}\left[\frac{\chi}{e^{\chi} - e^{-\chi}}\right],\ \mathrm{Arg}[C_1] = \mathrm{Mod}\left[-\frac{\pi}{2} + k, 2\pi\right] \tag{10}$$

Данный режим является "зеркально отраженным" предыдущего и выглядит как полное прохождение волны A_1 с одновременным полным отражением волны C_1. Резонансы проницаемости потенциального барьера при этом выливаются в расходящиеся значения для амплитуды C_1 (рис.2), вместо нулевых на рис.1.

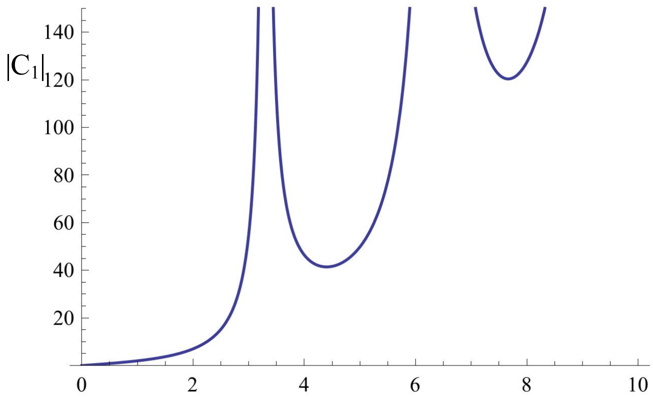

Рис.2. Аналогичная к предыдущему рисунку зависи[illegible]ть в случае подавления отраженной волны в правой стороне прямоугольного барьера.

3. Туннелирование встречных волн через колоколообразный барьер

Рассмотрим квантовую проницаемость встречных волн и в случае гладкого потенциала, выбирая для этого вид

$$U(x) = \frac{U}{\mathrm{ch}^2 \alpha x}, \qquad U > 0\,. \tag{11}$$

Стационарное уравнение Шредингера для потенциала (11) приводится к уравнению вырожденной гипергеометрической функции, одно из линейно независимых решений которого выберем в стандартной форме [5]:

$$\psi_1(x) = (1-\xi^2)^{-\frac{ik}{2}}\, F(-i\,k - s, -i\,k + s + 1; 1 - i\,k; \frac{1-\xi}{2}), \tag{12}$$

где $\xi = \mathrm{th}(\alpha x)$, $s = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1-4u^2}\right)$, $u = \frac{\sqrt{2mU}}{\hbar\alpha}$. Оно описывает явление квантового туннелирования при наличии только левосторонне падающей волны.

Второе линейно независимое решение удобно построить, исходя из пространственной симметрии задачи, как аналитический вид $\psi_1(x)$ с заменой x на $-x$, то есть выбрав

$$\psi_2(x) = (1-\xi^2)^{-\frac{ik}{2}} F(-ik-s, -ik+s+1; 1-ik; \frac{1+\xi}{2}). \qquad (13)$$

Общее решение задачи запишется, как обычно, в виде суперпозиции

$$\psi(x) = \beta_1 \psi_1(x) + \beta_2 \psi_2(x), \qquad (14)$$

где коэффициенты β_1 и β_2 могут быть выражены через амплитуды падающих на барьер волн.

Для решения задачи о туннелировании с безгранично распространяющимся колоколообразным потенциалом запишем асимптотический вид (при $x \to \pm\infty$) общего решения (14) в виде суперпозиции бегущих волн:

$$\psi(x \to -\infty) = A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx}, \ \psi(x \to +\infty) = C_2 e^{ikx} + C_1 e^{-ikx}. \qquad (15)$$

Коэффициенты A_1 и C_1 в (15) представляют амплитуды падающих на барьер волн слева и справа, соответственно, и считаются заданными, а решение задачи квантового туннелирования сводится к выражению амплитуд отходящих волн A_2 и C_2 через амплитуды A_1 и C_1 и параметры квантового потенциала. Используя для этого асимптотику гипергеометрической функции [6] и соотношение

$$(1-\xi^2)^{-\frac{ik}{2}} = \left(\frac{4}{e^{2x}+2+e^{-2x}}\right)^{-\frac{ik}{2}} \xrightarrow{x\to\pm\infty} 2^{-ik} e^{\pm ikx}, \qquad (16)$$

для искомых волновых функций получаем

$$\psi(x \to -\infty) = \frac{2^{-ik}\Gamma(1-ik)\Gamma(-ik)}{\Gamma(-s-ik)\Gamma(1+s-ik)}\beta_1 e^{ikx} + 2^{-ik}\left(\beta_2 + \frac{\Gamma(1-ik)\Gamma(ik)}{\Gamma(1+s)\Gamma(-s)}\beta_1\right)e^{-ikx}, \qquad (17а)$$

$$\psi(x \to +\infty) = 2^{-ik}\left(\beta_1 + \frac{\Gamma(1-ik)\Gamma(ik)}{\Gamma(1+s)\Gamma(-s)}\beta_2\right)e^{ikx} + \frac{2^{-ik}\Gamma(1-ik)\Gamma(-ik)}{\Gamma(-s-ik)\Gamma(1+s-ik)}\beta_2 e^{-ikx}. \qquad (17б)$$

Их сопоставление с выражениями (15) определяет, во-первых коэффициенты общего вида (14),

$$\beta_{1,2} = 2^{ik} \frac{\Gamma(-s-ik)\Gamma(1+s-ik)}{\Gamma(1-ik)\Gamma(-ik)} A_{1,2}, \qquad (18)$$

а также искомые амплитуды отходящих от потенциального барьера волн:

$$A_2 = r_a A_1 + t_c C_1, \ C_2 = t_a A_1 + r_c C_1, \qquad (19)$$

где введены обозначения

$$r_a = r_c = \frac{\Gamma(ik)\Gamma(-s-ik)\Gamma(1+s-ik)}{\Gamma(1+s)\Gamma(-s)\Gamma(-ik)}, \ t_a = t_c = \frac{\Gamma(-s-ik)\Gamma(1+s-ik)}{\Gamma(1-ik)\Gamma(-ik)}. \qquad (20)$$

Подстановка формул (19) и (20) в (15) завершает общее решение задачи о двустороннем туннелировании через колоколообразный потенциал. Заметим, что для коэффициентов в (19) сохранены буквенные обозначения выражений (5).

Рассмотрим теперь условия подавления отходящих от барьера волн. Для подавления левосторонне отходящей волны ($A_2 = 0$) с помощью (19) и (20) получаем

$$\mathrm{Abs}[C_1] = \frac{\mathrm{ch}(\pi\nu)}{\mathrm{sh}(\pi k)}, \qquad \mathrm{Arg}[C_1] = \frac{\pi}{2}, \tag{21}$$

а для подавления правосторонне отходящей волны $(C_2 = 0)$:

$$\mathrm{Abs}[C_1] = \frac{\mathrm{sh}(\pi k)}{\mathrm{ch}(\pi\nu)}, \quad \mathrm{Arg}[C_1] = -\frac{\pi}{2}. \tag{22}$$

Сопоставление пар формул (8), (10) и (21), (22) показывает, что зависимости C_1 от параметров системы существенно различны для прямоугольного и колоколообразного потенциалов. Это относится в первую очередь к фазе амплитуды C_1: она постоянна для колоколообразного потенциала (равна $\pi/2$ или $-\pi/2$, соответственно), в то время как линейно зависит от волнового вектора k в случае прямоугольного потенциала. В модуле же C_1 "теряются" резонансные особенности прямоугольного потенциала (рис.1 и 2) и зависимость от параметров системы, в частности, от волнового вектора k, становится полностью монотонной. Колоколообразный потенциал (11) оказывается "идеально гладким" в том смысле, что интерференция прямых и отраженных волн при интерференции не формирует конструктивную часть и в результате меньшим значениям энергии частицы всегда соответствуют меньшие вероятности туннелирования, и никак не наоборот.

4. Заключение

Одночастичная задача квантового туннелирования рассмотрена для случая падения частиц на потенциальный барьер с обеих сторон. Рассмотрены прямоугольная и колоколообразная формы потенциала. Внимание сосредоточено на возможности подавить отходящую волну на одной из сторон барьера путем деструктивной интерференции. Результат при этом выглядит как полное прохождение одной из падающих волн, соппровождаемое полным отражением другой. Более удобным для экспериментальной реализации указанной возможности является колоколообразный потенциал (11), при котором относительная фаза падающих волн постоянна и равна $\pi/2$, а зависящее от параметров системы условие ставится только на интенсивности падающих волн.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках Лаборатории исследования и моделирования квантовых явлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Д. Бом.** Квантовая теория. М., Наука, 1965; **M. Razavy**. Quantum theory of tunneling. Singapore, World Scientific, 2003.
2. **L.L. Chang, L. Esaki, R. Tsu**. Appl. Phys. Lett., **24**, 593 (1974); **B. Ricco, M.Ya. Azbel.** Phys. Rev. B, **29**, 1970 (1984); **Jin-yan Zeng.** Quantum mechanics. Science Press, 2007, section 3.3.2.
3. **R.L. Liboff.** Introductory quantum mechanics. Addison-Wesley, 1980, section 7.7.
4. **J.J. Peggel, T. Miller,** Nature, **283**, 1709 (1999); **Zhi Xiao, Shi-sen Du, Chun-Xi Zhang.** arXiv:1210.0970v2 (2012).

5. **L.D. Landau, E.M. Lifshitz.** Quantum mechanics. Nonrelativistic theory. Elsevier, Oxford, 2003.
6. **M. Abramowitz, I.A. Stegun.** Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. New York, Dover, 1972.

ԼՐԻՎ ԹԱՓԱՆՑԵԼՈՒԹՅՈՒՆԸ ՀԱՆԴԻՊԱԿԱՑ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ԹՈՒՆԵԼԱՑՈՒՄՈՒՄ

Գ.Ա. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ, Հ.Ռ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Ա.Ժ. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ

Քվանտային թունելացման խնդիրը դիտարկված է պոտենցիալային արգելքի վրա երկու կողմերից ընկնող մատերիայի ալիքների համար: Հետազոտված է ընկնող ալիքներից մեկի լրիվ թունելացման հնարավորությունը մյուսի միաժամանակյա լրիվ անդրադարձման պայմաններում: Վերլուծությունը կատարված է պոտենցիալային արգելքի երկու իրարից էապես տարբեր՝ ուղղանկյունաձև և զանգակաձև տեսքերի համար:

TOTAL TRANSPARENCY IN QUANTUM TUNNELING OF COUNTERPROPAGATING WAVES

G.A. MURADYAN, H.R. HAKOBYAN, A.Zh. MURADYAN

The problem of quantum tunneling is considered for matter waves which are impinging on the potential barrier from both sides. A possibility of total transmission of one of incident waves at the simultaneous total reflection of the other one is studied. The analysis is carried out for two essentially different, rectangular and bell-shaped, forms of the potential barrier.