

УДК 530.145

ФУНКЦИЯ УАЙТМЕНА И ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА В МОДЕЛЯХ С НЕТРИВИАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ ГРАНИЦ

Т.Ш. НАВАСАРДЯН, А.А. СААРЯН

e-mail: saharian@ysu.am

Ереванский государственный университет, Армения

(Поступила в редакцию 3 июня 2013 г.)

Исследованы функция Уайтмена и вакуумное среднее квадрата скалярного поля в моделях с компактным подпространством при наличии параллельных плоских границ, на которых поле удовлетворяет граничным условиям Робина. С помощью обобщенной формулы суммирования Абеля–Плана явно выделены части в вакуумных средних, индуцированные границами. В качестве простого примера рассмотрен случай одномерного внутреннего пространства, компактифицированного на окружность.

1. Введение

Эффект Казимира является одним из наиболее интересных проявлений нетривиальных свойств вакуума в квантовой теории поля [1,2]. Граничные условия, налагаемые на оператор поля, приводят к модификации спектра вакуумных флуктуаций. В результате меняются вакуумные средние различных физических величин. В частности, появляются силы, действующие на границы. В настоящее время эти силы, обусловленные вакуумными флуктуациями электромагнитного поля, измерены в экспериментах для различных геометрий границ [1-3].

В данной работе рассмотрены функция Уайтмена и вакуумное среднее квадрата скалярного поля в геометрии двух параллельных пластин при наличии дополнительных компактных пространственных измерений. Компактные размерности являются неотъемлемой частью современных теорий, объединяющих различные взаимодействия, таких как теории струн и супергравитации. Теоретико-полевые модели с компактными размерностями активно рассматриваются в нанофизике в рамках модели Дирака для описания длинноволновых возбуждений электронной подсистемы графена в цилиндрических и тороидальных нанотрубках (см., например, [4,5] и приведенные там ссылки).

Воздействие дополнительных компактных измерений на эффект Казимира для скалярного поля рассматривалось в [6-10]. В этих работах исследовались глобальные характеристики вакуума, такие как полная энергия и силы, действующие на границы. Более полная информация о свойствах вакуума со-

держится в локальных характеристиках, наиболее важными из которых являются вакуумные средние квадраты поля и тензора энергии-импульса.

2. Геометрия задачи и собственные функции

Рассмотрим скалярное поле $\varphi(x)$ с параметром связи с кривизной ζ , которое удовлетворяет уравнению движения

$$(g^{MN}\nabla_M\nabla_N + m^2 + \zeta R)\varphi(x) = 0, \quad (1)$$

где $M, N = 0, 1, \dots, D$, R – скаляр кривизны $(D+1)$ -мерного пространства-времени, ∇_M – оператор ковариантной производной, соответствующий метрическому тензору g_{MN} . В данной работе мы рассмотрим пространство-время с топологией $R^{(D_1-1,1)} \times \Sigma$, где $R^{(D_1-1,1)}$ соответствует D_1 -мерному пространству-времени Минковского с тривиальной топологией, а Σ – D_2 -мерное внутреннее пространство. Соответствующий интервал имеет вид

$$ds^2 = g_{MN}dx^M dx^N = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - \gamma_{ij}dX^i dX^j - dy^2, \quad (2)$$

где $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$ – метрический тензор D_1 -мерному пространству-времени Минковского $R^{(D_1-1,1)}$, а координаты X^i покрывают многообразие Σ , $D = D_1 + D_2$. Здесь и ниже $\mu, \nu = 0, 1, \dots, D_1 - 1$ и $i, j = 1, \dots, D_2$. Скалярная кривизна, соответствующая (2), дается выражением $R = -R_{(\gamma)}$, где $R_{(\gamma)}$ – скалярная кривизна для метрики γ_{ik} .

Целью данной работы является исследование функции Уайтмена и вакуумного среднего квадрата поля при наличии двух бесконечных параллельных пластин, помещенных в точках $y = a_1$ и $y = a_2$, $a_1 < a_2$. На границах поле удовлетворяет граничным условиям Робина:

$$(1 + \beta_j n^l \nabla_l)\varphi(x) = (1 + \beta_j (-1)^{j-1} \partial_y)\varphi(x) = 0, \quad y = a_j, \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

где n^l – нормаль к границе, β_1 и β_2 – постоянные. Эти условия изменяют спектр нулевых колебаний вакуума и приводят к модификации вакуумных средних физических величин. В рассматриваемом здесь случае свободного поля эти средние можно выразить через функцию Уайтмена: $W(x, x') = \langle 0 | \varphi(x) \varphi(x') | 0 \rangle$, где $|0\rangle$ – вакуумное состояние. Вместо функции Уайтмена можно рассмотреть любую другую двухточечную функцию. Наш выбор функции Уайтмена обусловлен тем, что она определяет также отклик детекторов частиц типа Унру-де Витта.

Пусть $\varphi_\sigma(x)$ – полная система положительно-частотных решений классического уравнения поля, удовлетворяющих условиям (3), σ – набор квантовых чисел, определяющих решение. Разлагая оператор поля по $\varphi_\alpha(x)$ и воспользовавшись коммутационными соотношениями для операторов рождения и уничтожения, функция Уайтмена представится в виде

$$W(x, x') = \sum_\alpha \varphi_\alpha(x) \varphi_\alpha^*(x'). \quad (4)$$

В рассматриваемой здесь задаче собственные функции можно представить в виде

$$\mathcal{Q}_\sigma \mathcal{X} = C_n e^{-i\eta_{\mu\nu} k^\mu x^\nu} \psi_\beta(X) f_n(y), \quad (5)$$

где $k^\mu = (\omega, \mathbf{k})$, $\omega = \sqrt{k^2 + m_{\beta,n}^2}$, $k = |\mathbf{k}|$. Постоянные разделения переменных $m_{\beta,n}$ определяются геометрией внутреннего пространства Σ и граничными условиями. Моды $\psi_\beta(x)$ являются собственными функциями оператора $\Delta_{(\gamma)} + \zeta R_{(\gamma)}$:

$$(\Delta_{(\gamma)} + \zeta R_{(\gamma)}) \psi_\beta(X) = -\lambda_\beta^2 \psi_\beta(X), \quad (6)$$

с собственными значениями λ_β^2 и с условием нормировки $\int d^{D_2} X \sqrt{\gamma} \psi_\beta(X) \psi_\beta^*(X) = \delta_{\beta\beta'}$. Здесь $\Delta_{(\gamma)}$ – оператор Лапласа–Бельтрами для метрики γ_{ij} . Подставляя собственные функции (5) в уравнение поля, с учетом (6) получим следующее уравнение для функции $f_n(y)$:

$$(-\partial_y^2 + m^2) f_n = (m_{\beta,n}^2 + \lambda_\beta^2) f_n. \quad (7)$$

Оператор в правой части не зависит от квантовых чисел β , соответствующих внутреннему подпространству. Поэтому собственные функции $f_n(y)$ и комбинация $m_n^2 = m_{\beta,n}^2 - \lambda_\beta^2$ не зависят от β . В результате зависящие от β и n части разделяются: $m_{\beta,n}^2 = m_n^2 + \lambda_\beta^2$.

Линейно независимыми решениями уравнения (7) являются $e^{\pm i k_y y}$, где $m_n^2 = k_y^2 + m^2$ и поэтому $m_{\beta,n}^2 = k_y^2 + m^2 + \lambda_\beta^2$. В области между пластинами, $a_1 < y < a_2$, решение, удовлетворяющее граничным условиям (3), может быть представлено в виде

$$f_n(y) = \cos[k_y |y - a_j| + \alpha_j], \quad (8)$$

где α_j определяется соотношениями

$$\sin \alpha_j = (k_y^2 \beta_j^2 + 1)^{-1/2}, \quad \cos \alpha_j = k_y \beta_j (k_y^2 \beta_j^2 + 1)^{-1/2}. \quad (9)$$

Собственные значения k_y определяются условиями (3) и являются решением уравнения

$$F(z) = (1 - b_1 b_2 z^2) \sin z - (b_1 + b_2) z \cos z = 0, \quad z = a k_y, \quad a = a_2 - a_1, \quad b_j = \beta_j / a. \quad (10)$$

Обозначим через $z = \gamma_n$, $n = 1, 2, \dots$, нули функции $F(z)$ в правой полуплоскости комплексной переменной z . Постоянная C_n определяется из условия нормировки и имеет вид

$$C_n^2 = (2\pi)^{(1-D_1)} (\omega a)^{-1} \left[1 + \sin(\gamma_n) \cos(\gamma_n + 2\alpha_j) / \gamma_n \right]. \quad (11)$$

3. Функция Уайтмена

Подстановка собственных функций (5) в выражение (4) приводит к следующему выражению для функции Уайтмена:

$$W(x, x') = \sum_\beta \frac{\psi_\beta(X) \psi_\beta^*(X')}{(2\pi)^{D_1-1} a} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_\beta(\gamma_n)}{1 + \sin(\gamma_n) \cos(\gamma_n + 2\alpha_j) / \gamma_n}, \quad (12)$$

где $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^{D_1-1})$ соответствует координатам в $R^{(D_1-1,1)}$,

$$h_{\beta}(z) = e^{-i\omega_{\beta}(z)\Delta t} \cos(zy_j + \alpha_j) \cos(zy'_j + \alpha_j) / \omega_{\beta}(z), \quad \Delta t = t - t'. \quad (13)$$

Здесь введены обозначения $y_j = |y - a_j| / a$, $y'_j = |y' - a_j| / a$ и

$$\omega_{\beta}(z) = \sqrt{k^2 + z^2 / a^2 + \lambda_{\beta}^2 + m^2}. \quad (14)$$

Поскольку нули γ_n заданы неявно, выражение (12) для функции Уайтмена неудобно для дальнейших вычислений вакуумного среднего квадрата поля. Эту трудность можно обойти, если воспользоваться формулой суммирования

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi f(\gamma_n)}{1 + \sin(\gamma_n) \cos(\gamma_n + 2\alpha_j) / \gamma_n} = -\frac{\pi f(0) / 2}{1 - b_1 - b_2} + \int_0^{\infty} + i \int_0^{\infty} dz \frac{f(iz) - f(-iz)}{(b_1 z - 1)(b_2 z - 1) e^{2z} - 1} \cdot (15)$$

$$(b_1 z + 1)(b_2 z + 1)$$

Эта формула позволяет представить функцию Уайтмена в виде

$$W(x, x') = W_1(x, x') + \frac{2^{1-D_1}}{\pi^{D_1} a} \sum_{\beta} \psi_{\beta}(X) \psi_{\beta}^*(X') \int d\vec{k} e^{i\vec{k}\Delta\vec{x}} \times \int_{ak_{\beta}}^{\infty} dz \frac{\cosh(\Delta t \sqrt{z^2 / a^2 - k_{\beta}^2})}{(b_1 z - 1)(b_2 z - 1) e^{2z} - 1} \frac{F(z)}{(b_1 z + 1)(b_2 z + 1) \sqrt{z^2 / a^2 - k_{\beta}^2}}, \quad (16)$$

где $k_{\beta} = \sqrt{k^2 + \lambda_{\beta}^2 + m^2}$ и

$$F(z) = \cosh(z\Delta y_j) + \frac{z^2 b_j^2 + 1}{z^2 b_j^2 - 1} \cosh[z(y_j + y'_j)] - \frac{2z b_j}{z^2 b_j^2 - 1} \sinh[z(y_j + y'_j)]. \quad (17)$$

Первое слагаемое в (16) определяется выражением

$$W_1(x, x') = \frac{2^{1-D_1}}{\pi^{D_1}} \sum_{\beta} \psi_{\beta}(X) \psi_{\beta}^*(X') \int d\vec{k} e^{i\vec{k}\Delta\vec{x}} \times \int_0^{\infty} dz \cos(z |y - a_j| + \alpha_j) \cos(z |y' - a_j| + \alpha_j) \frac{e^{-i\Delta t \sqrt{z^2 + k_{\beta}^2}}}{\sqrt{z^2 + k_{\beta}^2}}. \quad (18)$$

В пределе $a \rightarrow \infty$ при фиксированных y , y' и y_j второе слагаемое в (16) стремится к нулю, а первое слагаемое не зависит от a . Отсюда следует, что функция (18) соответствует функции Уайтмена в геометрии одиночной пластины с $y = a_j$.

Функцию Уайтмена (18) можно представить в виде, более удобном для вычислений. Для этого произведение тригонометрических функций представим в виде

$$2 \cos(z |y - a_j| + \alpha_j) \cos(z |y' - a_j| + \alpha_j) = \cos(z(y - y')) + \cos(z |y + y' - 2a_j| + 2\alpha_j). \quad (19)$$

Вклад слагаемого $\cos(z(y - y'))$ в (18) соответствует функции Уайтмена в геометрии без границ:

$$W_0(x, x') = \sum_{\beta} \frac{\Psi_{\beta}(X) \Psi_{\beta}^*(X')}{(2\pi)^{D_1}} \int d\mathbf{k} e^{ik\Delta x} \int_0^{\infty} dz \frac{\cos[z(y - y')]}{\sqrt{z^2 + k_{\beta}^2}} \exp(-i\Delta t \sqrt{z^2 + k_{\beta}^2}). \quad (20)$$

Во втором слагаемом в правой части (19) представим функцию косинус в виде суммы экспонент. В интеграле с $\exp(iz |y + y' - 2a_j| + 2i\alpha_j)$ ($\exp(-iz |y + y' - 2a_j| - 2i\alpha_j)$) произведем поворот контура интегрирования на $\pi/2$ ($-\pi/2$). В результате функция Уайтмена (18) представится в виде

$$W_1(x, x') = W_0(x, x') + \sum_{\beta} \frac{\Psi_{\beta}(X) \Psi_{\beta}^*(X')}{(2\pi)^{D_1}} \int d\mathbf{k} e^{ik\Delta x} \int_{k_{\beta}}^{\infty} dz \frac{\beta_j z + 1}{\beta_j z - 1} \frac{\cosh(\Delta t \sqrt{z^2 - k_{\beta}^2})}{\sqrt{z^2 - k_{\beta}^2}} e^{-z|y + y' - 2a_j|}, \quad (21)$$

где второе слагаемое в правой части индуцировано наличием границы с $y = a_j$. Отсюда следует, что последнее слагаемое в (16) обусловлено наличием границы с $y = a_{j'}$, где $j' \neq j$.

Заметим, что функцию Уайтмена в геометрии без границ можно представить также в виде

$$W_0(x, x') = \frac{(2\pi)^{-(D_1+1)/2}}{[|\Delta \mathbf{x}|^2 - (\Delta t)^2]^{(D_1-1)/2}} \sum_{\beta} \Psi_{\beta}(X) \Psi_{\beta}^*(X') f_{(D_1-1)/2}(\sqrt{\lambda_{\beta}^2 + m^2} \sqrt{|\Delta \mathbf{x}|^2 - (\Delta t)^2}), \quad (22)$$

где введено обозначение $f_{\nu}(x) = x^{\nu} K_{\nu}(x)$, $K_{\nu}(x)$ – функция Макдональда.

4. Вакуумное среднее квадрата поля

Одним из важных характеристик вакуумного состояния является среднее значение квадрата поля. С помощью приведенного выше выражения для функции Уайтмена, в пределе $x' \rightarrow x$ получим следующую формулу для вакуумного среднего квадрата поля:

$$\langle 0 | \varphi^2 | 0 \rangle = \langle \varphi^2 \rangle_0 + \langle \varphi^2 \rangle_b^j + \frac{2A_{D_1}}{a^{D_1-1}} \sum_{\beta} |\Psi_{\beta}(X)|^2 \int_{m_{\beta}}^{\infty} dz \frac{(z^2 - m_{\beta}^2)^{D_1/2-1} F_0(x)}{(b_1 z - 1)(b_2 z - 1) e^{2z} - 1}, \quad (23)$$

где введены обозначения $A_{D_1} = (4\pi)^{-D_1/2} / \Gamma(D_1/2)$,

$$F_0(z) = 1 + \frac{z^2 b_j^2 + 1}{z^2 b_j^2 - 1} \cosh(2zy_j) - \frac{2zb_j}{z^2 b_j^2 - 1} \sinh(2zy_j), \quad (24)$$

и $y_j = |y - a_j|/a$. Второе слагаемое в правой части (23) представляет вакуумное среднее, индуцированное пластиной с $y = a_j$, когда вторая пластина отсутствует:

$$\langle \varphi^2 \rangle_b^{(j)} = A_{D_1} \sum_{\beta} |\Psi_{\beta}(X)|^2 \int_{\sqrt{\lambda_{\beta}^2 + m^2}}^{\infty} dx (x^2 - \lambda_{\beta}^2 - m^2)^{D_1/2-1} \frac{x\beta_j + 1}{x\beta_j - 1} e^{-2x|y - a_j|}. \quad (25)$$

Для граничных условий Дирихле и Неймана имеем $\beta_j = 0$ и $\beta_j = \infty$, соответственно, и

$$\langle 0 | \varphi^2 | 0 \rangle = \langle \varphi^2 \rangle_0 + \langle \varphi^2 \rangle_b^j + \frac{2A_{D_1}}{a^{D_1-1}} \sum_{\beta} |\psi_{\beta}(X)|^2 \int_{m_{\beta}}^{\infty} dz \frac{(z^2 - m_{\beta}^2)^{D_1/2-1}}{e^{2z} - 1} [1 \mp \cosh(2zy_j)], \quad (26)$$

$$\langle \varphi^2 \rangle_b^{(j)} = \mp \frac{(2|y - a_j|)^{1-D_1}}{(2\pi)^{(D_1+1)/2}} \sum_{\beta} |\psi_{\beta}(X)|^2 f_{(D_1-1)/2}(2|y - a_j| \sqrt{\lambda_{\beta}^2 + m^2}), \quad (27)$$

где верхний/нижний знак соответствует условию Дирихле–Неймана.

Рассмотрим простой пример внутреннего пространства с $D_2 = 1$ и направление $x^D = X$ компактировано на окружность с длиной L : $0 \leq x^D \leq L$. В этом случае $\Sigma = S^1$. Будем предполагать, что вдоль компактного измерения поле удовлетворяет условию

$$\varphi(t, x^1, \dots, x^{D-1}, x^D + L) = e^{i\alpha} \varphi(t, x^1, \dots, x^{D-1}, x^D), \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi, \quad (28)$$

с постоянной фазой α . Соответствующие собственные функции имеют вид $\psi_{\beta}(X) = e^{iKX} / \sqrt{L}$, где собственные значения K находим из условия (28):

$$K = K_{\beta} = (2\pi\beta + \alpha) / L, \quad \beta = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \lambda_{\beta}^2 = K_{\beta}^2. \quad (29)$$

Рассмотрим сначала функцию Уайтмена в геометрии без границ, определяемую выражением (22). Для суммирования по β воспользуемся обобщенной формулой суммирования Абеля–Плана:

$$\sum_{\beta=-\infty}^{+\infty} g(\beta + \frac{\alpha}{2\pi}) f(|\beta + \frac{\alpha}{2\pi}|) = \int_0^{\infty} du [g(u) + g(-u)] f(u) + i \sum_{\lambda=\pm 1} \int_0^{\infty} du g(i\lambda u) \frac{f(iu) - f(-iu)}{e^{2\pi u + i\lambda\alpha} - 1}. \quad (30)$$

В результате, функция Уайтмена представится в виде

$$W_0(x, x') = \frac{m^{D-1}}{(2\pi)^{(D+1)/2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in\alpha} f_{(D-1)/2}(mu_n), \quad (31)$$

где $u_n^2 = |\Delta \mathbf{x}|^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta X + nL)^2 - (\Delta t)^2$. В (31) слагаемое $n = 0$ соответствует функции Уайтмена в пространстве-времени Минковского с тривиальной топологией. В пределе $x' \rightarrow x$ расходится только это слагаемое. Перенормировка вакуумного среднего квадрата поля сводится к вычитанию из (31) вклада слагаемого с $n = 0$. Таким образом, перенормированное среднее в геометрии без границ имеет вид

$$\langle \varphi^2 \rangle_0 = \frac{2m^{D-1}}{(2\pi)^{(D+1)/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\alpha) f_{(D-1)/2}(nmL). \quad (32)$$

Соответствующие формулы в геометрии двух пластин получаются из приведенных выше общих формул (23) и (26) подстановкой $|\psi_{\beta}(X)|^2 = 1/L$ и замесами $D_1 = D - 1$, $\Sigma_{\beta} = \Sigma_{\beta=-\infty}^{+\infty}$, $m_{\beta} = \sqrt{(2\pi\beta + \alpha)^2 / L^2 + m^2}$.

4. Заключение

В данной работе рассмотрены функция Уайтмена скалярного поля и вакуумное среднее квадрата поля в геометрии плоскопараллельных пластин в пространстве с компактным подпространством. На границах поле удовлетворяет условиям Робина. Важными частными случаями последних являются гра-

ничные условия Дирихле и Неймана. Собственные значения нормальной к границам компоненты импульса являются решениями трансцендентного уравнения (10). Для суммирования ряда по этим собственным значениям мы воспользовались обобщенной формулой Абеля–Плана. Это позволяет явным образом выделить в выражении функции Уайтмена слагаемое, соответствующее геометрии без границ и представить индуцированную границами часть в виде интегралов, быстро сходящихся в пределе совпадения аргументов (см. формулы (16) и (21)). В результате, вакуумное среднее квадрата поля представится в виде (23), где часть, обусловленная одной границей, дается выражением (25). Более простые выражения получаются в случае граничных условий Дирихле и Неймана (формулы (26) и (27)). В качестве простого примера внутреннего пространства рассмотрен $\Sigma = S^1$ с условием квазипериодичности (28). В этом случае функция Уайтмена и вакуумное среднее квадрата поля в геометрии без границ даются выражениями (31) и (32).

С помощью найденной в данной работе функции Уайтмена можно исследовать вакуумное среднее тензора энергии-импульса и силы, действующие на границы. Результаты этих расчетов будут представлены во второй части работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **M. Bordag, G.L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V.M. Mostepanenko.** Advances in the Casimir Effect. Oxford, Oxford University Press, 2009.
2. Lecture Notes in Physics: Casimir Physics, Vol. 834, ed. by **D. Dalvit, P. Milonni, D. Roberts, F. da Rosa.** Berlin, Springer, 2011.
3. **G.L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V.M. Mostepanenko.** Rev. Mod. Phys., **81**, 1827 (2009).
4. **S. Bellucci, A.A. Saharian.** Phys. Rev. D, **79**, 085019 (2009).
5. **S. Bellucci, A.A. Saharian, V.M. Bardeghyan.** Phys. Rev. D, **82**, 065011 (2010).
6. **H.B. Cheng.** Phys. Lett. B, **643**, 311 (2006); **668**, 72 (2008).
7. **S.A. Fulling, K. Kirsten.** Phys. Lett. B, **671**, 179 (2009).
8. **K. Kirsten, S.A. Fulling.** Phys. Rev. D, **79**, 065019 (2009).
9. **L.P. Teo.** Phys. Lett. B, **672**, 190 (2009); Nucl. Phys. B, **819**, 431 (2009).
10. **E. Elizalde, S.D. Odintsov, A.A. Saharian.** Phys. Rev. D, **83**, 105023 (2011).

WIGHTMAN FUNCTION AND VACUUM POLARIZATION IN MODELS WITH NON-TRIVIAL TOPOLOGY IN THE PRESENCE OF BOUNDARIES

T.Sh. NAVASARDYAN, A.A. SAHARIAN

Wightman function and the vacuum expectation value of the scalar field squared are studied in models with a compact subspace in the presence of plane boundaries, on which the field obeys Robin boundary conditions. With the help of the generalized Abel-Plana formula we have explicitly extracted from the vacuum expectation values the parts induced by the boundaries. As a simple example a one-dimensional internal space is considered compactified on a circle.