

УДК 621.315

## ЭЛЕКТРОННЫЕ СОСТОЯНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КВАНТОВОЙ ТОЧКЕ С МОДИФИЦИРОВАННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ ПЕШЛЯ–ТЕЛЛЕРА ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Д.Б. АЙРАПЕТЯН<sup>1,2</sup>, А.Ш. АЧОЯН<sup>1</sup>, Э.М. КАЗАРЯН<sup>1</sup>, О.Х. ТЕВОСЯН<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Российско-Армянский (Славянский) университет, Ереван

<sup>2</sup>Государственный инженерный университет Армении, Ереван

\*e-mail: hovhannes.tevosyan@gmail.com

(Поступила в редакцию 7 ноября 2012 г.)

Исследованы энергетические уровни электрона в цилиндрической квантовой точке с модифицированным потенциалом Пешля–Теллера при наличии внешнего однородного магнитного поля. Получены аналитические выражения для волновой функции и энергии электрона. Рассмотрены разные режимы магнитного квантования и выявлены особенности поведения энергетического спектра электрона от величины приложенного магнитного поля.

### 1. Введение

В последние два десятилетия резко возрос интерес к исследованию физических свойств квантовых точек (КТ) (см., например, [1-3]), уникальные свойства которых позволяют применять их в полупроводниковых устройствах нового поколения. Интерес к этим структурам обусловлен ярко выраженным эффектом размерного квантования во всех трех направлениях, благодаря чему характер энергетического спектра носителей заряда уподобляется атомарному, а плотность состояний имеет  $\delta$ -образный характер. Это делает полупроводниковые КТ легко управляемыми и привлекательными для приложений в микро- и нанoeлектронике [4]. На сегодняшний день реализованы полупроводниковые КТ сферической, эллипсоидальной, пирамидальной, цилиндрической и других геометрии (см., например, [5-12]).

Для математического описания поведения носителей заряда в КТ необходимо дать максимально приближенный к реальному вид потенциала ограничения КТ. Профиль этого потенциала зависит как от физико-механических и физико-химических характеристик КТ и окружающей среды, так и от метода выращивания изучаемого образца. В частности, если в ходе выращивания КТ имеет место диффузия между компонентами КТ и окружающей среды, то профиль потенциала ограничения сглаживается, и в первом приближении его можно аппроксимировать параболическим (см., например, [13,14]). Однако, в действительности, параболический потенциал реализуется только для сравнитель-

но нижних уровней энергетического спектра, а для высокоэнергетических электронов профиль потенциала ограничения будет отличаться от параболического [15-17].

В качестве более реалистичных потенциалов ограничения КТ были предложены потенциал Вуда–Саксона [18,19], Хюльтена [20], Пешля–Теллера [21-29], Винтерница–Сморозинского [30,31] и т.д..

Помимо размерного квантования энергетическими уровнями носителей заряда в КТ можно управлять с помощью внешних электрического и магнитного полей. При этом возникает интересная проблема выявления характера конкуренции размерного квантования с квантованием, обусловленным внешними полями. Следует отметить, что при наложении магнитного поля на КТ магнитное квантование проявляет себя только в поперечной к полю плоскости. Это обстоятельство в особенности упрощает описание физических свойств КТ с цилиндрической геометрией, когда поле направлено вдоль оси цилиндра [14,32-36].

В данной работе исследовано влияние магнитного поля на энергетический спектр электрона в цилиндрической КТ с модифицированным потенциалом Пешля–Теллера (МППТ). При этом предполагается, что на систему наложено внешнее однородное магнитное поле.

## 2. Теория

Рассмотрим движение электрона в цилиндрической КТ при наличии внешнего однородного магнитного поля, которое направлено по оси цилиндра (ось  $OZ$ ). В предложенной модели будем считать, что потенциал ограничения КТ вдоль оси цилиндра описывается МППТ, а в радиальном направлении – параболическим потенциалом. В цилиндрических координатах для ограничивающего потенциала можно записать:

$$U(\rho, Z) = \tilde{U}_0 - \frac{\tilde{U}_0}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{Z}{\tilde{\beta}}\right)} + \frac{m_e^* \omega^2 \rho^2}{2}, \quad (1)$$

где  $\tilde{U}_0$  и  $\tilde{\beta}$  – соответственно, глубина и полуширина МППТ.

В предположении, что на бесконечности МППТ стремится к значению скачка потенциалов на границе перехода КТ–окружающая среда  $\tilde{U}_0$ , и путем его вписания в прямоугольную яму конечной высоты  $\tilde{U}_0$ , определим связь между высотой КТ  $h_0$  и полушириной МППТ следующим образом:  $h_0 = \delta\tilde{\beta}$ , где  $\delta$  – параметр, зависящий от конкретной структуры КТ. Что касается частоты  $\omega$ , то она может быть определена из квантовой вириальной теоремы и связана с радиусом сечения КТ  $R_0$  согласно соотношению  $\omega \sim \frac{\hbar}{m_e^* R_0^2}$ .

Вид МППТ в зависимости от полуширины и глубины потенциальной ямы, приведен на рис. 1.

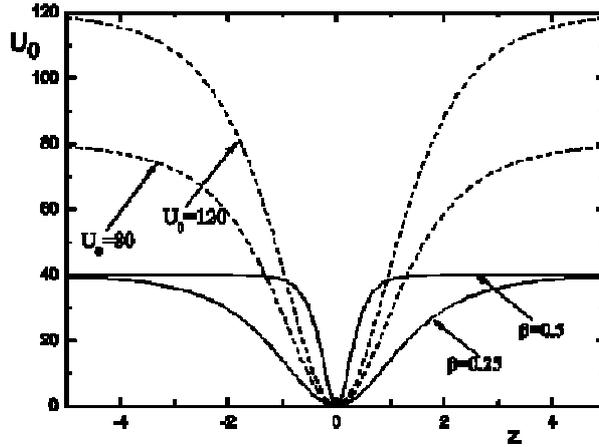


Рис.1. Модифицированный потенциал Пешля-Теллера для различных значений полуширины и глубины потенциальной ямы.

С учетом наличия внешнего магнитного поля, гамильтониан системы запишется в виде

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e^*} \left( \hat{\mathbf{P}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + U(\rho, Z), \quad (2)$$

где  $\mathbf{P}$  – оператор импульса частицы,  $\mathbf{A}$  – векторный потенциал магнитного поля,  $c$  – скорость света в вакууме,  $m_e^*$  – эффективная масса электрона,  $e$  – модуль заряда электрона. Выберем калибровку векторного потенциала в следующем виде:  $A_\rho = 0$ ,  $A_\varphi = \frac{1}{2} B\rho$ ,  $A_z = 0$ . Тогда для гамильтониана системы можем записать

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_e^*} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial^2}{\rho^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right] - i \frac{\hbar \omega_c}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{m_e^* \omega_c^2}{8} \rho^2 + \tilde{U}_0 - \frac{\tilde{U}_0}{\text{ch}^2\left(\frac{Z}{\beta}\right)} + \frac{m_e^* \omega^2 \rho^2}{2}, \quad (3)$$

где  $\omega_c = \frac{eB}{cm_e^*}$ . Полный гамильтониан системы в безразмерных величинах

можно представить в виде суммы гамильтонианов, описывающих состояние электрона вдоль поля и в плоскости, поперечной ее направлению:

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2, \quad (4)$$

где

$$\hat{H}_1 = U_0 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{U_0}{\text{ch}^2\left(\frac{z}{\beta}\right)}, \quad (5)$$

$$\hat{H}_2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) - i\gamma \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{4} \gamma^2 r^2 + \frac{1}{4} \gamma_0^2 r^2.$$

Здесь введены обозначения:  $r = \frac{\rho}{a_B}$ ,  $z = \frac{Z}{a_B}$ ,  $\hat{H} = \frac{\hat{H}}{E_R}$ ,  $\gamma_0 = \frac{2m_e^* \omega a_B^2}{\hbar}$ ,

$\gamma = \frac{\hbar \omega_c}{2E_R}$ ,  $\beta = \frac{\tilde{\beta}}{a_B}$ ,  $U_0 = \frac{\tilde{U}_0}{E_R}$ ,  $E_R = \frac{\hbar^2}{2m_e^* a_B^2}$  – эффективная энергия Ридберга,

$a_B = \frac{\kappa \hbar^2}{m_e^* e^2}$  – эффективный боровский радиус,  $\kappa$  – диэлектрическая проницаемость.

Уравнение Шредингера для первой подсистемы примет следующий вид:

$$\chi''(z) + \left( \varepsilon_z - U_0 + \frac{U_0}{\text{ch}^2(z/\beta)} \right) \chi(z) = 0. \quad (6)$$

После несложных преобразований уравнения (6) получаем уравнение Куммера, решения которого задаются гипергеометрическими функциями Гаусса [37] и окончательно, для волновой функции первой подсистемы получаем:

$$\chi(z) = \left( 1 - \text{th}^2\left(\frac{z}{\beta}\right) \right)^{\varepsilon_z/2} {}_2F_1 \left\{ \varepsilon_z - s, \varepsilon_z + s + 1, \varepsilon_z + 1, \frac{1 - \text{th}(z/\beta)}{2} \right\}, \quad (7)$$

где  $s = (1/2) \left[ -1 + \sqrt{1 + 4\beta^2 U_0} \right]$ . А энергия подсистемы будет определяться выражением

$$\varepsilon_z = U_0 - \frac{1}{4\beta^2} \left[ -(1 + 2n_z) + \sqrt{1 + 4\beta^2 U_0} \right]^2, \quad (8)$$

где  $n_z$  – квантовое число и принимает значения  $n_z = 0, 1, 2, \dots$

Перейдем к рассмотрению задачи нахождения волновых функций и энергетического спектра электрона для второй подсистемы. Ищем волновую функцию второй подсистемы в виде  $\psi(r, \varphi) = e^{im\varphi} R(r)$  и, подставляя ее в соответствующее уравнение Шредингера, получаем:

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) - \left( \frac{m^2}{r^2} + m\gamma - \frac{(\gamma^2 + \gamma_0^2)}{4} r^2 \right) R(r) = \varepsilon_r R(r), \quad (9)$$

где  $m$  – магнитное квантовое число и принимает значения  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Решения для уравнения (9) хорошо известны и задаются вырожденными гипергеометрическими функциями [35]:

$$R(\xi) = e^{-\frac{\sqrt{\gamma^2 + \gamma_0^2}}{4} r^2} \left( \frac{\sqrt{\gamma^2 + \gamma_0^2}}{2} r^2 \right)^{|m|/2} {}_1F_1 \left\{ - \left( \frac{\varepsilon_r}{2\sqrt{\gamma^2 + \gamma_0^2}} - \frac{|m|+1}{2} \right), |m|+1, \frac{\sqrt{\gamma^2 + \gamma_0^2}}{2} r^2 \right\}. \quad (10)$$

Из стандартных условий для энергии поперечного поля движения окончательно находим

$$\varepsilon_r = m\gamma + 4\sqrt{\gamma^2 + \gamma_0^2} (N+1), \quad (11)$$

где введено обозначение  $N = 2n_r + |m|$ ,  $N = 0, 1, 2, \dots$ . Здесь  $n_r$  и  $N$  – соответственно, радиальное и осцилляторное квантовые числа. Полная энергия системы будет суммой энергий подсистем:

$$\varepsilon = U_0 - \frac{1}{4\beta^2} \left[ -(1 + 2n_z) + \sqrt{1 + 4\beta^2 U_0} \right]^2 + m\gamma + 4\sqrt{\gamma^2 + \gamma_0^2} (N+1). \quad (12)$$

Перейдем к рассмотрению различных режимов магнитного квантования. Рассмотрим сперва случай экстремально сильного магнитного поля. Тогда, в выражении (11) можно пренебречь членом  $\gamma_0$ , и зависимость энергии радиальной подсистемы от величины магнитного поля будет линейной:

$$\varepsilon_r = \gamma(m + 4(N+1)). \quad (13)$$

В этом предельном случае движение частицы в основном обусловлено магнитным квантованием [38]. Отметим, что в основном состоянии ( $m = 0, N = 0$ ) энергия электрона для радиальной части принимает значение  $\varepsilon_r = 4\gamma$ . В случае, если поле недостаточно сильное, чтобы пренебречь  $\gamma_0$  по сравнению с  $\gamma$ , однако  $\gamma$  все еще значительно превышает  $\gamma_0$ , можно разложить последний член в уравнении (11) в ряд. Тогда энергетический спектр для радиальной подсистемы будет иметь вид

$$\varepsilon_r = m\gamma + 4\gamma \left( 1 + \frac{\gamma_0^2}{2\gamma^2} \right) (N+1). \quad (14)$$

Как видно из (14), зависимость энергии от параметра  $\omega$  принимает квадратичный характер ( $\gamma_0 \sim \omega$ ). При этом, наложение даже слабого магнитного поля приводит к полному снятию вырождения по магнитному квантовому числу  $m$ , так как скрытая симметрия, характерная для кругового осциллятора, благодаря наложению поля исчезает [39].

### 3. Обсуждение

Перейдем к обсуждению полученных результатов. Следует отметить, что численные расчеты сделаны для цилиндрической КТ из GaAs, для которой введенные выше параметры имеют следующие значения:  $m_e^* = 0.067m_e$ ,  $\kappa = 13.8$ ,  $E_R = 5.275$  мэВ,  $a_B = 104$  Å.

На рис.2 приведена зависимость энергии частицы от параметра  $\gamma$  при фиксированных значениях остальных параметров КТ, когда  $m = 0$  и  $n_z = 0$ . Как видно из рисунка, при увеличении значения магнитного поля энергия частицы

возрастает, так как вклад магнитного квантования в энергию частицы возрастает. Это обусловлено тем, что магнитное поле локализует движение ча-

стицы в области с радиусом  $a = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$ . Отметим, что с увеличением параметра

$\gamma$  увеличиваются межуровневые расстояния. Так, например, когда  $\gamma = 0.2$  (что соответствует значению магнитного поля 0.03 Т), расстояние между первыми двумя уровнями энергетического спектра составляет  $\Delta E \approx 2.6E_R$ , а частота перехода –  $\omega_{10} = 0.85 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ , а когда  $\gamma = 3.5$  (0.58 Т), межуровневое расстояние равно  $\Delta E \approx 11.8E_R$ , а частота перехода –  $\omega_{10} = 3.86 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ .

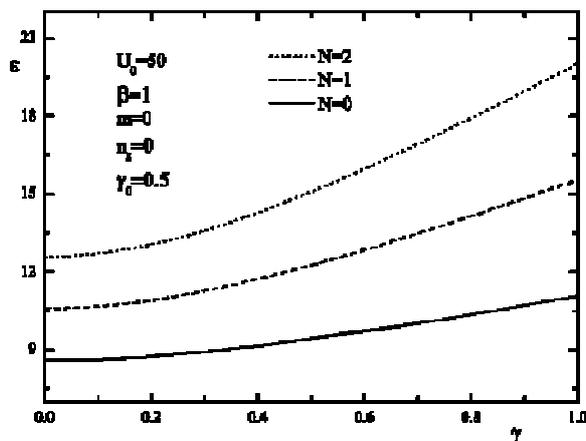


Рис.2. Зависимость энергии частицы в цилиндрической КТ с МППТ от величины магнитного поля.

Нужно особо отметить, что при больших полях в системе реализуется ландауподобный спектр. В результате зависимость энергии от значения магнитного поля становится линейной. Такая зависимость приведена на рис.3, когда

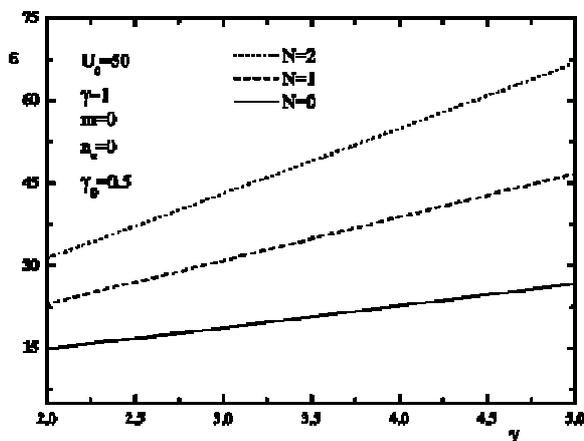


Рис.3. Зависимость энергии частицы в цилиндрической КТ с МППТ от величины магнитного поля для случая сильных магнитных полей.

величина магнитного поля принимает экстремально большие значения и размерное квантование заглушается магнитным. На рис.4а и б приведены зависимости энергии электрона, соответственно, от полуширины и глубины МПШТ, когда фиксированы остальные параметры цилиндрической КТ, а также величина внешнего магнитного поля. Как видно из рисунков, при увеличении глубины

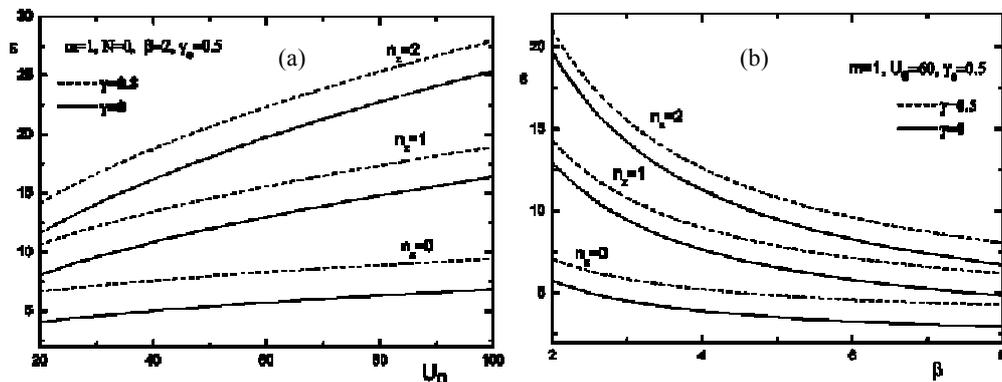


Рис.4. Зависимость энергии электрона в цилиндрической квантовой точке от глубины (а) и полуширины (б) модифицированного потенциала Пешля–Теллера при наличии магнитного поля.

МПШТ энергия электрона увеличивается, а при увеличении полуширины МПШТ – уменьшается. Это объясняется тем, что в первом случае вклад РК в энергию электрона увеличивается, а во втором – уменьшается. Наличие магнитного поля приводит к смещению всех кривых в сторону больших энергий, так как магнитное квантование дает положительный вклад в энергию частицы. Другими словами, магнитное квантование приводит к дополнительной локализации электрона и одинаковому смещению энергетических линий спектра.

В заключение авторы выражают благодарность профессору А.А. Саркисяну за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **P. Harrison.** Quantum wells, wires and dots. Theoretical and computational physics. John Wiley & Sons ltd, NY, 2005.
2. **R.K. Willardson.** Self-Assembled InGaAs-GaAs Quantum Dots. Academic Press, v. 60, 1999.
3. **Э.М. Казарян, С.Г. Петросян.** Физические основы полупроводниковой наноэлектроники. Ереван, изд. РАУ, 2005.
4. **D. Bimberg.** *Semicond.*, **33**, 951 (1999).
5. **M. Grundmann, O. Stier, D. Bimberg,** *Phys. Rev. B*, **52**, 11969 (1995).
6. **A. Mathew, M.K. Nandy.** *Physica E*, **42**, 1383 (2010).
7. **F. Adler et al.** *J. Appl. Phys.*, **80**, 4019 (1996).
8. **L.E. Oliveira, R. Perez-Alvarez.** *Phys. Rev. B*, **40**, 10460 (1989).
9. **Д.Б Айрапетян.** Изв. НАН Армении, Физика, **42**, 442 (2007).
10. **G. Cantele, D. Ninno, G. Iadonisi.** *J. of Phys.: Cond. Matt.*, **12**, 9019 (2000).
11. **A.H. Rodríguez et al.** *Phys. Rev. B*, **63**, 125319 (2001).
12. **A.J. Williamson, L.W. Wang, A. Zunger.** *Phys. Rev. B*, **62**, 12963 (2000).

13. **А.А. Костанян.** Изв. НАН Армении, Физика, **42**, 107 (2007).
14. **Н.А. Sarkisyan.** Modern Phys. Lett. B, **18**, 443 (2004).
15. **L.S. Costa et al.** Journ. of Phys. B, **32**, 2461 (1999).
16. **G. Todorović, V. Milanović, Z. Ikonić, D. Indjin.** Phys. Rev. B, **55**, 15681 (1997).
17. **Е.М. Kazaryan, А.А. Kostanyan, R G Poghosyan.** J. Phys.: Conf. Ser., **350**, 012020 (2012).
18. **Л.С. Петросян.** Изв. НАН Армении, Физика, **37**, 35 (2002)
19. **А.Кh. Manaselyan, А.А. Kirakosyan.** Physica E, **28**, p. 462 (2005).
20. **L.A. Juharyan, Е.М. Kazaryan, L.S. Petrosyan.** Solid State Comm., **139**, 537 (2006).
21. **A. Rodriguez, J.M. Cervero.** Phys. Rev. B, **74**, 104201 (2006).
22. **G. Wang, Q. Guo, L. Wu, X. Yang.** Phys. Rev. B, **75**, 205337 (2007).
23. **Д.Б. Айрапетян, К.Г. Двоян, Э.М. Казарян, А.А. Чанчапанян.** ДНАН Армении, **108**, 320 (2008).
24. **А. Hakimyfard, M.G. Barseghyan, С.А. Duque, А.А. Kirakosyan.** Phys. B, **404**, 5159 (2009).
25. **Ch. Jia, T. Chen, L. Cui.** Phys. Lett. A, **373**, 1621 (2009).
26. **W. Chen, G. Wei, W. Qiang.** Modern Phys. Lett. A, **24**, 1371 (2009).
27. **M.G. Barseghyan, А. Hakimyfard, S.Y. López, С.А. Duque, А.А. Kirakosyan.** Physica E, **42**, 1618 (2010).
28. **M. Rey, F. Michelot.** Phys. Lett. A, **374**, 4761 (2010).
29. **Н.Кh. Tevosyan, D.B. Hayrapetyan, К.Г. Dvoyan, Е.М. Kazaryan.** Int. Journ. of Mod. Phys., Conf. Ser., **15**, 204 (2012).
30. **А.К. Атаян, Э.М. Казарян, А.В. Меликсетян, А.А. Саркисян.** Изв. НАН Армении, Физика, **45**, 126 (2010)
31. **N.G. Aghekyan, Е.М. Kazaryan, А.А. Kostanyan, Н.А. Sarkisyan.** Proc. SPIE, **7998**, 79981 (2010).
32. **К.Г. Dvoyan, D.B. Hayrapetyan, Е.М. Kazaryan, А.А. Tshantshapanyan.** Nano-scale Research Letters, **2**, 601 (2007).
33. **А. Aghchegala, V.N. Mughnetsyan, А.А. Kirakosyan.** Proc. SPIE, **8414**, 84140F (2011).
34. **А.К. Атаян, Е.М. Kazaryan, Н.А. Sarkisyan.** Physica E, **31**, 83 (2006)
35. **Q. Wu, K. Guo, G. Liu, J. Wu.** Physica B, **410**, 206 (2013).
36. **G. Liu, K. Guo, Ch. Wang.** Physica B, **407**, 2334 (2012).
37. Справочник по специальным функциям. Под ред. **М. Абрамовица и И. Стиган.** М., Наука, 1979.
38. **Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.** Квантовая механика. М., Наука, 1989.
39. **D.B. Hayrapetyan, Е.М. Kazaryan, Н.Кh. Tevosyan.** Physica E, **46**, 274 (2012).

ELECTRONIC STATES IN A CYLINDRICAL QUANTUM DOT  
WITH THE MODIFIED PÖSCHL–TELLER POTENTIAL  
IN THE PRESENCE OF EXTERNAL MAGNETIC FIELD

D.B. HAYRAPETYAN, A.Sh. ACHOYAN, E.M. KAZARYAN, H.Kh. TEVOSYAN

Energy levels of an electron in a cylindrical quantum dot with a modified Pöschl-Teller potential in the presence of an external magnetic field are studied. Analytical expressions for the wave function and energy of the particle are obtained. The different regimes of magnetic quantization are considered and the dependences of the electron energy on the magnetic field are revealed for all regimes.