Известия НАН Армении, Физика, т.48, №6, с.407-419 (2013)

УДК 548.0

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА В АНИЗОТРОПНЫХ МЕТАМАТЕРИАЛАХ. I. ДИСПЕРСИОННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

А.А. ГЕВОРГЯН*, М.С. РАФАЕЛЯН

Ереванский государственный университет, Армения
*e-mail: agevorgyan@ysu.am

(Поступила в редакцию 24 июня 2013 г.)

Рассмотрены особенности решения дисперсионного уравнения волны в безграничной индефинитной среде при прозвольно ориентированной по отношению к направления оптической оси системе координат. Описаны все возможные дисперсионные поверхности, возникающие в этой среде, и получены условия их возникновения. Показано, что могут возникать только определенные пары дисперсионных поверхностей. Получено дисперсионное уравнение для граничной задачи и исследованы зависимости дисперсионных кривых от ориентации оптической оси. Показано существование невзаимности преломления в данных средах.

1. Введение

Метаматериал – это система искусственных структурных элементов, сконструированных для достижения полезных и/или необычных электромагнитных свойств. Они демонстрируют такие линейные и нелинейные оптические свойства, как отрицательное преломление, обратный эффект Доплера, распространение энергии электромагнитной волны в сторону, обратную волновому вектору, и т.п. [1-5]. Можно отметить также оптическое таммовское состояние таких сред, гигантский рост плотности оптических состояний молекул или квантовой точки, размещенной в такой среде, значительное сокращение времени флуоресценции молекул на поверхности такой среды, гигантский рост инфракрасного излучения нагретого тела в присутствии слоя такой среды, и т.д. Они находят такие замечательные применения, как совершенные линзы [6], невидимая маскировка [7,8], совершенные поглотители [9], и т.д. Хотя отрицательное преломление наиболее легко обнаруживается в изотропных метаматериалах, оно может наблюдаться также в анизотропных метаматериалах. В последнем случае нет необходимости требовать, чтобы все элементы тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей принимали отрицательные значения [10]. Более того, все их элементы могут быть также положительно определенными [11]. В последнее время исследование таких анизотропных метаматериалов вызывает большой интерес [12-23]. В литературе, однако, в основном рассматриваются случаи, когда главные направления диэлектрической и магнитной проницаемостей либо параллельны, либо перпендикулярны границе раздела сред. В работе [16] исследованы особенности сверхсветового распространения света в анизотропном метаматериале – при произвольной ориентации оптической оси в плоскости падения света. В работе [18] исследовано всенаправленное (omnidirectional) полное прохождение и возможность существования отрицательного угла Брюстера на границе *изотропная среда–анизотропная среда,* с произвольной ориентацией оптической оси в случае $\hat{\mu} = \hat{I}$ ($\hat{\mu}$ – тензор магнитной проницаемости, $\hat{I}$ – единичная матрица). В работе [21] исследованы возможность полного отражения на границе изотропная среда–анизотропный метаматериал и получены условия полного отражения. В работе [22] исследованы возможности отрицательного полного отражения на границе изотропная среда–анизотропная среда с произвольной ориентацией оптической оси, снова при $\hat{\mu} = \hat{I}$. В работе [15] классифицированы дисперсионные уравнения для анизотропных метаматериалов.

В данной работе исследованы особенности решения дисперсионного уравнения волны в безграничной индефинитной среде в прозвольно ориентированной по отношению к направлению оптической оси системе координат.

2. Безграничная среда. Дисперсионные поверхности

В этом разделе мы выведем уравнение Френеля для рассматриваемой среды, рассмотрим, какие поверхности волновых нормалей могут возникать и, наконец, какие пары поверхностей возникают. Эти вопросы особенно важны в оптике, в частности, в кристаллооптике. Будем предполагать, что длина волны электромагнитной волны намного больше характерной длины структурных элементов метаматериала, так что среда может быть рассмотрена как сплошная и характеризована матрицами диэлектрической и магнитной проницаемостей. Далее, будем также предполагать, что тензоры диэлектрической $\hat{\varepsilon}_0$ и магнитной $\hat{\mu}_0$ проницаемостей среды могут быть диагонализированы в одной и той же координатной системе и что эти тензоры в соответствующей системе координат имеют вид

$$\hat{\varepsilon}_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \ \hat{\mu}_0 = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Главные значения диэлектрической и магнитной проницаемостей являются комплексными числами: $\varepsilon_i = \varepsilon_i' + i\varepsilon_i''$ и $\mu_i = \mu_i' + i\mu_i''$, i = 1,2,3 (комплексная форма выбрана в виде exp($-i\omega t$), поэтому среды с положительными мнимыми частями волнового вектора соответствуют поглощающим средам, а с отрицательными – усиливающим средам). Реальные части диэлектрической и магнитной проницаемостей могут быть как положительными, так и отрицательными. Ниже будем предполагать, что среда одноосная, т.е. $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 \neq \varepsilon_1$ и $\mu_2 = \mu_3 \neq \mu_1$ и оптическая ось находится в плоскости xz и с осью x составляет угол ϕ, так что

$$\hat{\varepsilon} = \hat{T}\left[y,\phi\right]\hat{\varepsilon}_0\hat{T}\left[y,\phi\right]^{-1}, \tag{2}$$

$$\hat{\mu} = \hat{\mathrm{T}}\left[y,\phi\right]\hat{\mu}_0\hat{\mathrm{T}}\left[y,\phi\right]^{-1}, \tag{3}$$

где $\hat{T}\left[y,\phi\right]$ – матрица вращения на угол ϕ вокруг оси y. $\hat{T}\left[y,\phi\right]$ имеет вид:

$$\hat{T}\left[y,\phi\right] = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Из уравнения Максвелла для поля плоской монохроматической волны получаем следующее дисперсионное уравнение для волнового вектора:

$$\begin{aligned} &\left(n^2(1-\delta_\varepsilon) + \mu_m\,\varepsilon_m\left(\delta_\varepsilon^2 - 1\right)\left(1-\delta_\mu\right) + \delta_\varepsilon\xi\right)\left(n^2(1-\delta_\mu) + \right.\\ &\left. + \mu_m\,\varepsilon_m\left(\delta_\mu^2 - 1\right)\left(1-\delta_\varepsilon\right) + \delta_\mu\xi\right) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где $n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$, $\xi = 2\left(n_x\cos\phi + n_z\sin\phi\right)^2$, $\varepsilon_\mathrm{m} = \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)/2$, $\mu_m = \left(\mu_1 + \mu_2\right)/2$, $\varepsilon_\mathrm{m} = \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)/2$, $\delta_\mu = \left(\mu_1 - \mu_2\right)/\left(\mu_1 + \mu_2\right)$, $n_x = \dfrac{\lambda}{2\pi}k_x$, $n_y = \dfrac{\lambda}{2\pi}k_y$, $n_z = \dfrac{\lambda}{2\pi}k_z$, а k_x, k_y, k_z – компоненты волнового вектора, λ – длина волны света в вакууме. Дисперсионное уравнение (5) эквивалентно двум уравнениям:

$$n^2(1-\delta_\varepsilon) + \mu_m\,\varepsilon_m\left(\delta_\varepsilon^2 - 1\right)\left(1-\delta_\mu\right) + \delta_\varepsilon\xi = 0, \tag{5a}$$

$$n^2(1-\delta_\mu) + \mu_m\,\varepsilon_m\left(\delta_\mu^2 - 1\right)\left(1-\delta_\varepsilon\right) + \delta_\mu\xi = 0. \tag{5b}$$

Здесь (5a) является дисперсионным уравнением для электрической моды, а (5a) – для магнитной моды.

Приведем дисперсионное уравнение (5a) к каноническому виду. Для этого представим n_x, n_y и n_z в виде

$$n_x = a\,n_1 + n_2 + n_3,\; n_y = n_1 + b\,n_2,\; n_z = n_1 + n_2 + c\,n_3, \tag{6}$$

где

$$a = 1,\; b = 2\frac{1+\delta_\varepsilon\sin 2\phi}{\delta_\varepsilon - 1},\; c = \frac{1+\delta_\varepsilon\cos 2\phi + \delta_\varepsilon\sin 2\phi}{-1+\delta_\varepsilon\cos 2\phi - \delta_\varepsilon\sin 2\phi}.$$

Тогда (5a) принимает вид

$$\frac{n_1^2}{\lambda_1} + \frac{n_2^2}{\lambda_2} + \frac{n_3^2}{\lambda_3} = 1, \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \varepsilon_m\mu_m\left(3 - \delta_\varepsilon + 2\delta_\varepsilon\sin 2\phi\right)\left(\delta_\varepsilon^2 - 1\right)\left(1-\delta_\mu\right),\\ \lambda_2 &= 2\varepsilon_m\mu_m\left(1+\delta_\varepsilon\sin 2\phi\right)\left(1-\delta_\mu\right),\\ \lambda_3 &= 2\varepsilon_m\mu_m\left(1+\delta_\varepsilon\sin 2\phi\right)\left(3-\delta_\varepsilon + 2\delta_\varepsilon\sin 2\phi\right)\left(1+\delta_\varepsilon\right)\left(1-\delta_\mu\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Такие же преобразования можно выполнить и для дисперсионного уравнения магнитной моды (5b).

Дисперсионные поверхности характеризуют зависимость преломления электромагнитной волны в среде от направления распространения волны. Плоские электромагнитные волны, распространяющиеся внутри среды, в зависимости от значений параметров λ_1, λ_2, λ_3 могут привести к дисперсионным поверхностям в виде эллипсоидов вращения, однополостных гиперболоидов, двухполостных гиперболоидов и т.д. Далее, в зависимости от ориентации оптической оси, пересечения этих поверхностей с фиксированными плоскостями (в частности, с плоскостью падения) могут дать круги, эллипсы, гиперболы или прямые линии. Ниже рассмотрим конкретные случаи.

I. Если в соотношении (7) λ_1, λ_2, λ_3 имеют положительные знаки, т.е.

$$\begin{cases} f = \varepsilon_m \mu_m \left(\delta_\varepsilon - 1\right)\left(\delta_\mu - 1\right) > 0, \\ g = \left(\delta_\mu + 1\right)\left(3 - \delta_\mu + 2\delta_\mu \sin 2\phi\right) > 0, \\ h = \left(\delta_\mu - 1\right)(1 + \delta_\mu \sin 2\phi) < 0, \end{cases}$$

то дисперсионная поверхность электрической моды представляет собой эллипсоид вращения с полуосями, направленными вдоль направлений $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$ и $\mathbf{n_3}$:

$$\mathbf{n_1} = \left(\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{x} + \hat{\mathbf{n}}_\mathbf{z}\right)\left(1 + \delta_\varepsilon \sin 2\phi\right) + \left(\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{x} - \hat{\mathbf{n}}_\mathbf{z}\right)\delta_\varepsilon \cos 2\phi + \hat{\mathbf{n}}_\mathbf{y}\left(1 - \delta_\varepsilon\right),$$

$$\mathbf{n_2} = \left(\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{x} + \mathbf{n_z} - 2\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{y}\right)\left(1 + \delta_\varepsilon \sin 2\phi\right) + \left(\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{x} - \hat{\mathbf{n}}_\mathbf{z}\right)\delta_\varepsilon \cos 2\phi,\ \mathbf{n_3} = \hat{\mathbf{n}}_\mathbf{x} - \hat{\mathbf{n}}_\mathbf{z},$$

где $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{x}$, $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{y}$ и $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{z}$ – орты осей x, y и z.

I. Если $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_3 < 0$ (т.е. при $f < 0$, $g > 0$ и $h < 0$), то мода, представленная уравнением (5а), является эванесцентной.

II. Если один из параметров λ_1, λ_2, λ_3 отрицателен, а остальные положительны (т.е. при $f < 0$ и $g < 0$ или при $f < 0$ и $h > 0$), то дисперсионная поверхность является однополостным гиперболоидом с полуосями вдоль направлений $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$ и $\mathbf{n_3}$.

III. Если один из параметров λ_1, λ_2, λ_3 положителен, а остальные отрицательны (т.е. при $f > 0$ и $g < 0$, или при $f > 0$ и $h > 0$), то дисперсионная поверхность является двухполостным гиперболоидом, с полуосями вдоль направлений $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$ и $\mathbf{n_3}$.

IV. Если $\delta_\varepsilon = 1$, то дисперсионная поверхность есть плоскость, поскольку в этом случае из (5а) получаем $n_x \cos\phi + n_z \sin\phi = 0$.

Отметим также, что при $\delta_\varepsilon = -1$ дисперсионное уравнение принимает вид $n_y^2 + \left(n_z \cos\phi - n_x \sin\phi\right)^2 = 0$. Это означает, что при $n_y = 0$ дисперсионная поверхность есть прямая $n_z = n_x \operatorname{tg}\phi$. В противном случае мода эванесцентна. Подчеркнем, что плоскость возникает только при $\delta_\varepsilon = 1$, а прямая только при $\delta_\varepsilon = -1$.

На рис.1 представлены возможные пары дисперсионных поверхностей (одна для электрической моды, другая для магнитной) при различных параметрах задачи. Они определяются из дисперсионного уравнения (5). Отметим, что в общем случае невозможно получить следующие пары: эллипсоид вращения с однополостным гиперболоидом, однополостный гиперболоид с двухполостным гиперболоидом, одна эванесцентная мода с двухполостным гиперболоидом. Это

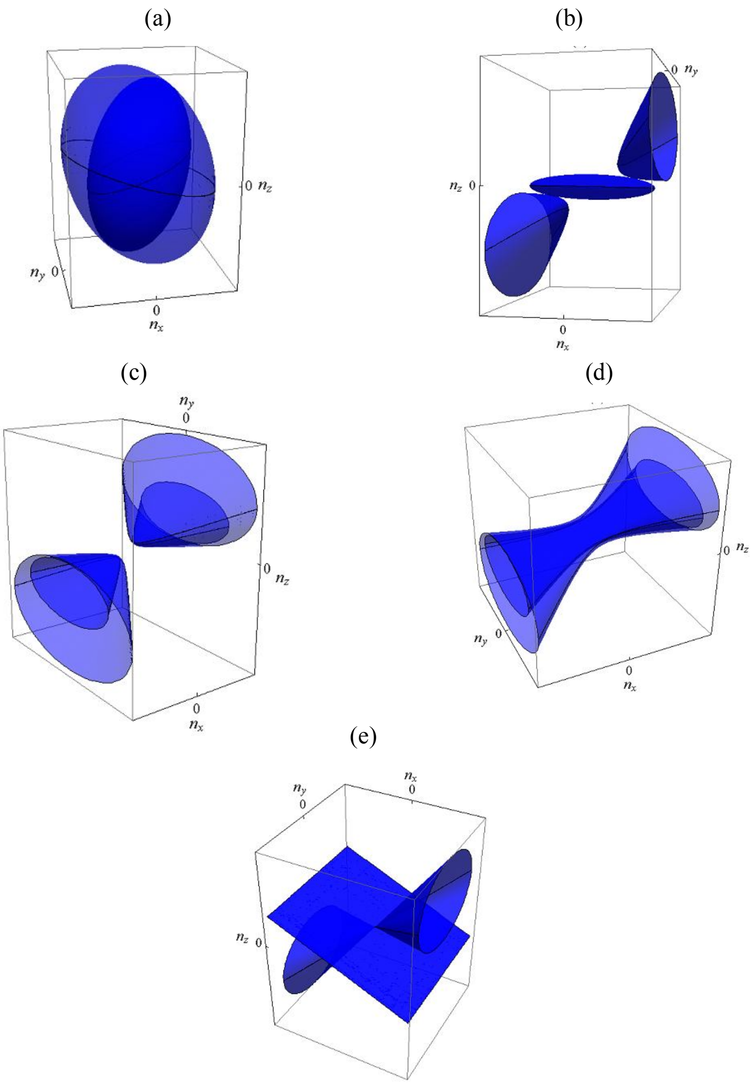

Рис.1. Пары дисперсионных поверхностей при различных параметрах среды: a) $\varepsilon_1 = 2.5$, $\varepsilon_2 = 1.5$, $\phi = \pi/3$, $\mu_1 = 1.7$, $\mu_2 = 2.9$; b) $\varepsilon_1 = 3.1$, $\varepsilon_2 = 2.5$, $\phi = \pi/4$, $\mu_1 = -1.3$, $\mu_2 = 2.2$; c) $\varepsilon_1 = 1.2$, $\varepsilon_2 = -1.5$, $\phi = \pi/5$, $\mu_1 = 1.3$, $\mu_2 = -1.1$; d) $\varepsilon_1 = -2.2$, $\varepsilon_2 = 3$, $\phi = \pi/4$, $\mu_1 = 1.3$, $\mu_2 = -2.2$; e) $\varepsilon_1 = 2.5$, $\varepsilon_2 = 0$, $\phi = \pi/4$, $\mu_1 = -0.9$, $\mu_2 = 3.7$.

естественно, так как можно аналитически доказать, что $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6 > 0$, т.е что существует только четное число отрицательных λ_i. Здесь λ_4, λ_5, λ_6 – соответствующие коэффициенты дисперсионного уравнения для магнитной моды, приведенной к каноническому виду. Они получаются из λ_1, λ_2, λ_3 заменой $\delta_\varepsilon \to \delta_\mu$ и $\mu_m \to \varepsilon_m$ в (8). Заметим также, что если дисперсионная поверхность одной из мод есть плоскость, то другая – либо коническая поверхность, представленная на рис.1e (превращающаяся в частных случаях либо в плоскость, либо в прямую), либо эванесцентна. Действительно, при $\delta_\varepsilon = 1$ (частный случай) дисперсионное уравнение для магнитной моды имеет вид $pn_x^2 + qn_y^2 + rn_z^2 + sn_x n_z = 0$, где p, q, r, s – некоторые параметры, характеризующие среду. Это означает, что либо соответствующая дисперсионная поверхность коническая, либо мода эванесцентная.

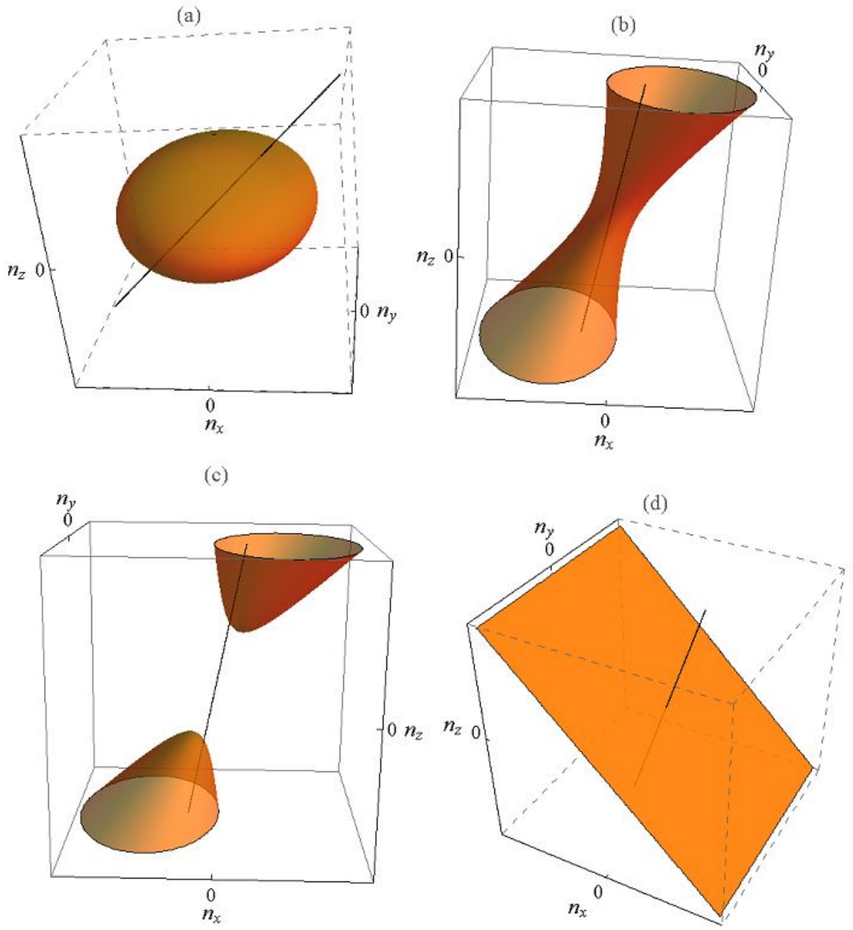

Рис.2. Дисперсионные поверхности в случае, когда одна из них прямая: a) $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0.7$, $\phi = \pi/3$, $\mu_1 = 1.2$, $\mu_2 = 1.1$; b) $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0.7$, $\phi = \pi/3$, $\mu_1 = 1.2$, $\mu_2 = -1.5$; c) $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0.7$, $\phi = \pi/3$, $\mu_1 = -1.2$, $\mu_2 = 1.5$; d) $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0.7$, $\phi = \pi/3$, $\mu_1 = 1.5$, $\mu_2 = 0$.

Если же дисперсионная поверхность одной из мод прямая, то другая может быть эллипсоидом вращения, однополостным или двухполостным гиперболоидом, плоскостью (рис.2). Наконец, если обе поверхности являются прямыми, то они обязательно совпадают.

3. Отражение от полупространства

Рассмотрим отражение и преломление света на границе изотропная непоглощающая среда–анизотропный метаматериал. Геометрия задачи представлена на рис.3. Среда занимает полупространство $z \geq 0$, т.е. граница раздела сред совпадает с плоскостью xy, а плоскость падения совпадает с плоскостью xz (xyz – лабораторная система). Электромагнитная волна частоты ω падает из среды 1 на рассматриваемое полупространство (среда 2) под углом α. Среда 1 однородна и изотропна, с параметрамы ε_l и μ_l (диэлектрическая и магнитная проницаемости среды).

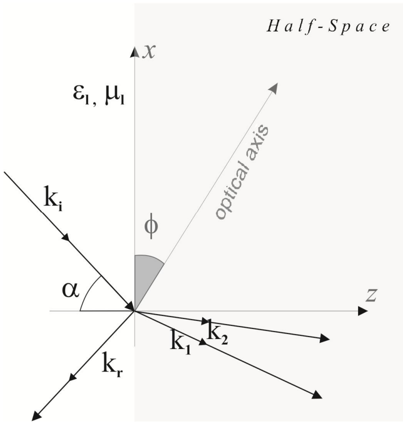

Рис.3. Геометрия задачи.

Согласно методу 4x4 матриц Берремана, систему уравнений Максвелла можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{\psi} = -ik_0\hat{\Delta}\boldsymbol{\psi}\,, \tag{9}$$

где вектор-столбец $\boldsymbol{\psi}$ и 4x4 матрица Берремана $\hat{\Delta}$ имеют вид:

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} E_x & H_y & E_y & -H_x \end{bmatrix}^T, \tag{10}$$

$$\hat{\Delta} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{33}}n_x & \hat{\mu}_{22} - \dfrac{\mu_{23}^2}{\mu_{33}} - \dfrac{n_x^2}{\varepsilon_{33}} & \left(\dfrac{\mu_{23}}{\mu_{33}} - \dfrac{\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{33}}\right)n_x & \mu_{21} - \dfrac{\mu_{23}\mu_{31}}{\mu_{33}} \\ \dfrac{\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{13}^2}{\varepsilon_{33}} & -\dfrac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33}}n_x & \dfrac{\varepsilon_{12}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{13}\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{33}} & 0 \\ 0 & \mu_{12} - \dfrac{\mu_{13}\mu_{32}}{\mu_{33}} & \dfrac{\mu_{13}}{\mu_{33}}n_x & \mu_{11} - \dfrac{\mu_{13}^2}{\mu_{33}} \\ \varepsilon_{21} - \dfrac{\varepsilon_{23}\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{33}} & \left(\dfrac{\mu_{32}}{\mu_{33}} - \dfrac{\varepsilon_{23}}{\varepsilon_{33}}\right)n_x & \varepsilon_{22} - \dfrac{\varepsilon_{23}^2}{\varepsilon_{33}} - \dfrac{n_x^2}{\mu_{33}} & \dfrac{\mu_{31}}{\mu_{33}}n_x \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $n_x = \sqrt{\varepsilon_l\mu_l}\sin\alpha$, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_m\left(1 + \delta_\varepsilon\cos 2\phi\right)$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_m\left(1 - \delta_\varepsilon\right)$,

$$\varepsilon_{13}=\varepsilon_{31}=\varepsilon_m\delta_\varepsilon\sin 2\phi,\ \varepsilon_{33}=\varepsilon_m\left(1-\delta_\varepsilon\cos 2\phi\right),\ \varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}=0,\ \varepsilon_{23}=\varepsilon_{32}=0,$$
$$\mu_{22}=\mu_m\left(1-\delta_\mu\right),\ \mu_{33}=\mu_m\left(1-\delta_\mu\cos 2\phi\right),\ \mu_{11}=\mu_m\left(1+\delta_\mu\cos 2\phi\right),$$
$$\mu_{12}=\mu_{21}=0,\ \mu_{13}=\mu_{31}=\mu_m\delta_\mu\sin 2\phi,\ \mu_{23}=\mu_{32}=0.$$

Так как для однородной анизотропной среды $\hat{\Delta}$ постоянна и не зависит от z, то зависимость полей от z можно представить в виде

$$\mathbf{\Psi}(z)=\mathbf{\Psi}_j(0)\exp(ik_{jz}z),\qquad j=1,2,3,4. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (9), получим матричное уравнение для собственных значений:

$$\left(k_z\hat{I}-\frac{\omega}{c}\hat{\Delta}\right)\mathbf{\Psi}(0)=0, \tag{13}$$

где $\hat{I}$ – единичная матрица. Собственные значения этого уравнения являются корнями алгебраического уравнения четвертой степени:

$$\begin{gathered}\left(n^2(1-\delta_\varepsilon)+\mu_m\,\varepsilon_m\left(\delta_\varepsilon^2-1\right)\left(1-\delta_\mu\right)+\delta_\varepsilon\xi\right)\left(n^2(1-\delta_\mu)+\right.\\ \left.+\,\mu_m\,\varepsilon_m\left(\delta_\mu^2-1\right)\left(1-\delta_\varepsilon\right)+\delta_\mu\xi\right)=0,\end{gathered} \tag{14}$$

где $n^2=n_x^2+n_z^2$.

Отметим, что дисперсионное уравнение не является биквадратным, каковым оно является для изотропных или анизотропных сред в случаях, когда оптическая ось перпедикулярна (или параллельна) границам раздела сред.

Решения уравнения (14) имеют вид

$$n_{z1,2}=\frac{\pm A-n_x\delta_\varepsilon\sin 2\phi}{1-\delta_\varepsilon\cos 2\phi},\ n_{z3,4}=\frac{\pm B-n_x\delta_\mu\sin 2\phi}{1-\delta_\mu\cos 2\phi}, \tag{15}$$

где

$$\begin{gathered}A=\sqrt{\left(\delta_\varepsilon^2-1\right)\left(n_x^2+\varepsilon_m\mu_m\left(\delta_\mu-1\right)\left(1-\delta_\varepsilon\cos 2\phi\right)\right)}\\ B=\sqrt{\left(\delta_\mu^2-1\right)\left(n_x^2+\varepsilon_m\mu_m\left(\delta_\varepsilon-1\right)\left(1-\delta_\mu\cos 2\phi\right)\right)}\end{gathered}. \tag{16}$$

Разность в модулях двух идущих вперед и назад волн, определяемых решениями (15) (т.е. разность в модулях между n_{1z} и n_{2z} и аналогично между n_{3z} и n_{4z}), свидетельствует о наличии невзаимодействия волн в рассматриваемой системе:

$$n(\mathbf{k},\omega)\neq n(-\mathbf{k},\omega). \tag{17}$$

Теперь перейдем к исследованию особенностей зависимости z-компонент фазовой и групповой скоростей от ориентации оптической оси по отношению к граничной поверхности. На рис.4 представлены зависимости n_{iz} от угла ϕ. Как видно из рисунка, возможны самые различные ситуации, а именно, ситуация, когда n_{iz} для двух мод положительны, а для двух других отрицательны, ситуация, когда n_{iz} для трех мод положительны, а для одного отрицательно, ситуация, когда n_{iz} для всех четырех мод положительны, и наоборот. То есть система обладает фазовой невзаимностью.

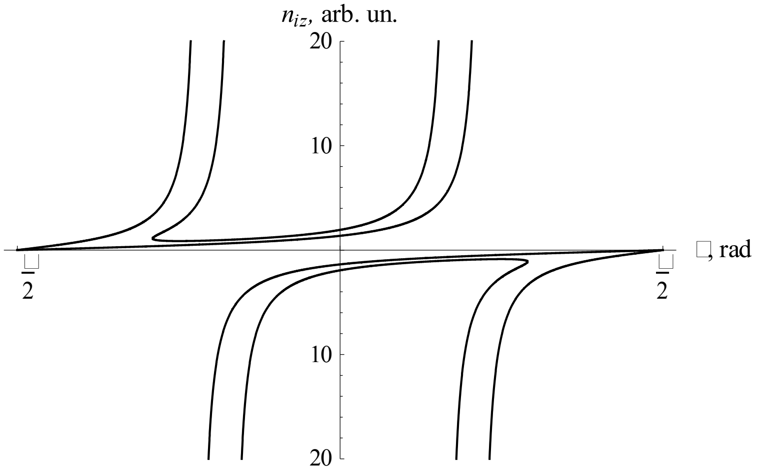

Рис.4. Зависимости фазовой скорости от ориентации оптической оси по отношению к граничной поверхности при $\varepsilon_1 = -1.5$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $\mu_1 = 1.5$, $\mu_2 = -1$, $\alpha = \pi/3$, $\varepsilon_l = 1$, $\mu_l = 1$.

Для x и z-компонент групповых скоростей электрических мод имеем

$$V_{gz1} = -c\frac{A}{\varepsilon_m\mu_m\left(\delta_\mu - 1\right)\left(\delta_\varepsilon^2 - 1\right)},\ V_{gz2} = c\frac{A}{\varepsilon_m\mu_m\left(\delta_\mu - 1\right)\left(\delta_\varepsilon^2 - 1\right)},$$

$$V_{gx1} = c\frac{n_x\left(1-\delta_\varepsilon^2\right) - \delta_\varepsilon A}{\varepsilon_m\mu_m\left(\delta_\mu - 1\right)\left(\delta_\varepsilon^2 - 1\right)\left(1-\delta_\varepsilon\cos 2\phi\right)},$$

$$V_{gx2} = c\frac{n_x\left(1-\delta_\varepsilon^2\right) + \delta_\varepsilon A}{\varepsilon_m\mu_m\left(\delta_\mu - 1\right)\left(\delta_\varepsilon^2 - 1\right)\left(1-\delta_\varepsilon\cos 2\phi\right)},$$

а x и z-компоненты групповых скоростей магнитных мод получаются заменой $\delta_\varepsilon \to \delta_\mu$ и $\mu_\mathrm{m} \to \varepsilon_\mathrm{m}$. На рис.5 представлены зависимости V_{giz} от угла ϕ. Как видно из рисунка, эти кривые симметричны относительно оси ϕ. И невозможна ситуация, когда три V_{giz} имеют один знак, а другие – обратный знак.

В заключение этого раздела отметим, что явный вид матрицы $\hat{\Delta}$ и решения дисперсионного уравнения позволяют построить трансфер-матрицу $\hat{P}(d)$, что, в свою очередь, позволяет исследовать особенности неоднородных анизотропных сред и многослойных структур. Это мы намерены сделать в нашей следующей работе.

Перейдем к подробному анализу дисперсионного уравнения (14). Исследуем зависимость дисперсионных кривых от ориентации оптической оси. Дисперсионное уравнение (14) эквивалентно следующим двум уравнениям:

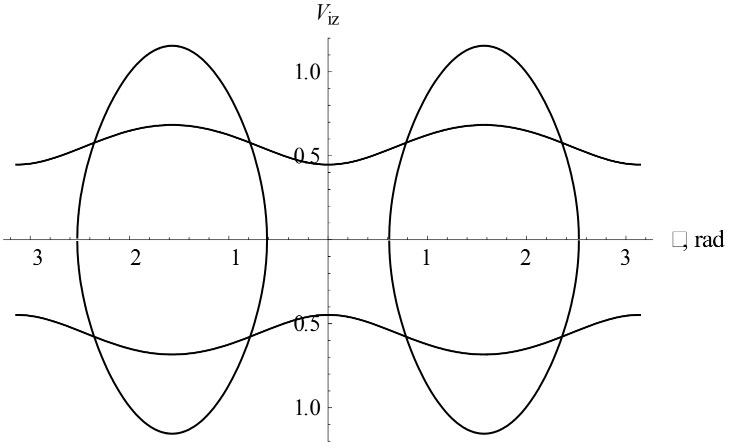

Рис.5. Зависимости групповой скорости от угла ориентации оптической оси по отношению к граничной поверхности при $\varepsilon_1 = 2.5$, $\varepsilon_2 = 1.5$, $\mu_1 = -0.5$, $\mu_2 = 1$, $\alpha = \pi/3$, $\varepsilon_l = 1$, $\mu_l = 1$.

$$n^2(1-\delta_\varepsilon) + \mu_m\, \varepsilon_m \left(\delta_\varepsilon^2 - 1\right)\left(1-\delta_\mu\right) + \delta_\varepsilon \xi = 0\,, \tag{18}$$

$$n^2(1-\delta_\mu) + \mu_m\, \varepsilon_m \left(\delta_\mu^2 - 1\right)\left(1-\delta_\varepsilon\right) + \delta_\mu \xi = 0\,. \tag{19}$$

Произведя соответствующее вращение в плоскости *xz*, получаем нормальную форму уравнения (18):

$$\frac{n_1^2}{\lambda_1} + \frac{n_2^2}{\lambda_2} = 1\,, \tag{20}$$

где

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu_m\, \varepsilon_m \left(1-\delta_\mu\right)\left(1-\delta_\varepsilon^2\right)\left(1+\delta_\varepsilon \cos 2\phi\right),\ n_1 = n_x\left(1+\delta_\varepsilon \cos 2\phi\right) + n_z \delta_\varepsilon \sin 2\phi\,, \\ \lambda_2 = \mu_m\, \varepsilon_m \left(1-\delta_\mu\right)\left(1+\delta_\varepsilon \cos 2\phi\right),\ n_2 = n_z. \end{cases} \tag{21}$$

Дисперсионное уравнение для магнитной моды имеет аналогичный вид, но в этом случае в выражениях для λ_1, λ_2 и n_1, n_2 в (21) следует произвести следующие перестановки: $\delta_\varepsilon \to \delta_\mu$, $\mu_m \to \varepsilon_m$.

Дисперсионные поверхности (20) также можно систематизировать с помощью анализа знаков величин λ_1 и λ_2. В общем случае нужно различать следующие случаи:

I. Если λ_1 и λ_2 положительны, т.е

$$\begin{cases} \mu_m\, \varepsilon_m \left(1-\delta_\mu\right)\left(1+\delta_\varepsilon \cos 2\phi\right) > 0, \\ 1-\delta_\varepsilon^2 > 0, \end{cases} \tag{22}$$

то сечение дисперсионных поверхностей и плоскости падения дают эллипсы с полуосями вдоль направлений $\mathbf{n_1} = \mathbf{\hat{n}_x}\left(1+\delta_\varepsilon \cos 2\phi\right) + \hat{n}_z \delta_\varepsilon \sin 2\phi$ и $\mathbf{n_2} = \mathbf{\hat{n}_z}$.

II. Если λ_1 и λ_2 отрицательны, т.е

$$\begin{cases} \mu_m\, \varepsilon_m \left(1-\delta_\mu\right)\left(1+\delta_\varepsilon \cos 2\phi\right) < 0, \\ 1-\delta_\varepsilon^2 < 0, \end{cases} \tag{23}$$

то моды, представленные уравнением (18), являются эванесцентными. В этом случае анизотропный слой конечной толщины может стать идеальным зеркалом, и свет, падающий на такой слой, полностью отразится при произвольных углах падения и поляризации. Следовательно, такой слой является всенаправленным (omnidirectional) отражателем.

III. Если λ_1 и λ_2 противоположны, т.е $\delta_\varepsilon^2 > 1$, то дисперсионные кривые – гиперболоиды с полуосями вдоль направлений $\mathbf{n_1}$ и $\mathbf{n_2}$.

IV. Если $\delta_\varepsilon = \pm 1$, то дисперсионные кривые являются прямыми (заметим, что прямые возникают только в этом случае).

Перейдем, наконец, к исследованию зависимости дисперсионных кривых от параметра ϕ, характеризующего ориентацию оптической оси. На рис.6a представлена зависимость дисперсионных кривых от угла ϕ при тех параметрах задачи, при которых дисперсионная кривая есть эллипс. Если угол вращения оптической оси ϕ равен $\pi k/2$ (k – целое число), то полуоси эллипса направлены вдоль $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{x}$ и $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{z}$, что видно также на рис.6a. При других значениях этого угла полуоси эллипсов смещены от направлений $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{x}$ и $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{z}$, что также видно на рис.6a.

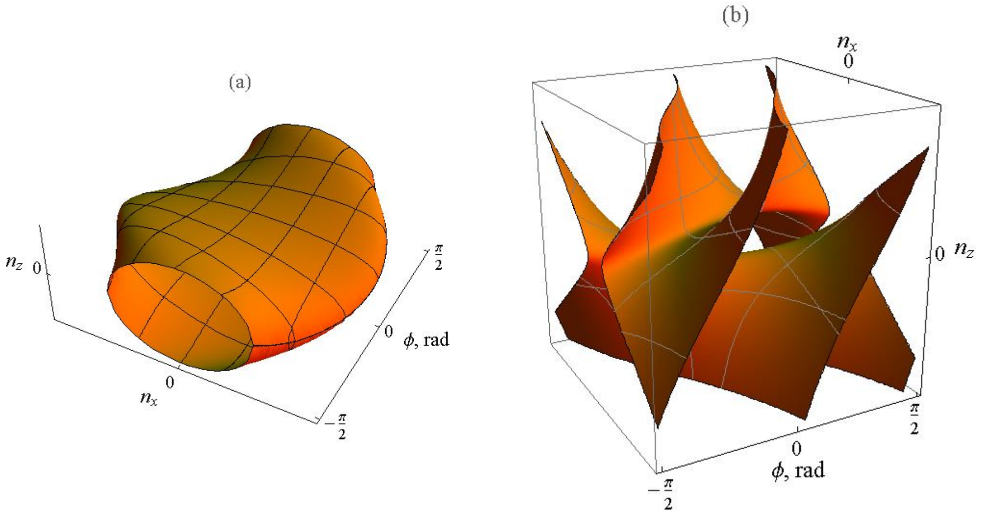

Рис.6. Зависимости дисперсионных кривых от угла ориентации оптической оси при различных параметрах среды: a) $\varepsilon_1 = 1.2$, $\varepsilon_2 = 3.8$, $\mu_1 = 1.5$, $\mu_2 = 1.1$; b) $\varepsilon_1 = 1.2$, $\varepsilon_2 = -0.7$, $\mu_1 = 1.5$, $\mu_2 = 1.2$.

На рис.6b представлены зависимости дисперсионных кривых от угла ϕ при тех параметрах задачи, при которых дисперсионная кривая есть гипербола. Как видно из рисунка, при изменении угла ϕ дисперсионные кривые, представляющие собой гиперболы, поворачиваются в плоскости $n_x n_z$, и при определенных значениях этого угла оси $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{x}$ и $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{z}$ превращаются в асимптоты.

Отметим, что вышеизложенные рассуждения будут верны также для магнитных мод (достаточно сделать перестановки $\delta_\varepsilon \to \delta_\mu$, $\mu_m \to \varepsilon_m$).

3. Заключение

Мы исследовали особенности дисперсионных поверхностей для анизотропных метаматериалов с диэлектрической и магнитной анизотропиями. Показано, что при различных ориентациях оптической оси могут возникать следующие пары дисперсионных поверхностей: два эллипсоида вращения, эллипсоид вращения и двухполостный гиперболоид, два двухполостных гиперболоида, два однополостных гиперболоида, плоскость и коническая поверхность. Если одна из дисперсионных поверхностей превращается в прямую, то она может появляться вместе с дисперсионной поверхностью любого из перечисленных выше типов (кроме конической). В остальных случаях моды эванесцентны. Мы исследовали зависимости дисперсионных кривых от ориентации оптической оси. Как видно из канонического вида дисперсионного уравнения (20), невозможно изменением ориентации оптической оси (в плоскости падения) превратить дисперсионную кривую от эллипса в гиперболу, и наоборот. Изменение ориентации оптической оси приводит лишь к изменению модулей и вращению осей этих кривых.

Авторы выражают благодарность М.З. Арутюняну, С.Г. Рафаеляну и В.А. Арзуманяну за ценные обсуждения.

Работа поддержана грантом 13А-1с34 Государственного комитета по науке Министерства образования и науки Республики Армения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **V.G. Veselago.** Sov. Phys. Usp., **10**, 509 (1968).
2. **D.R. Smith, W.J. Padilla, et al.** Phys. Rev. Lett., **84**, 4184 (2000).
3. **R.A. Shelby, D.R. Smith, S. Schultz.** Science, **292**, 77 (2001).
4. **V.M. Shalaev.** Nature Photonics, **1**, 41 (2007).
5. **S.H. Lee, C.M. Park, Y.M. Seo, C.K. Kim.** Phys. Rev. B, **81**, 241102 (2010).
6. **J.B. Pendry, D. Schurig, D.R. Smith.** Science, **312**, 1780 (2006).
7. **A. Alu, N. Engheta.** Phys. Rev. E, **72**, 016623 (2005).
8. **U. Leonhardt.** Science, **312**, 1777 (2006).
9. **N.I. Landy, S. Sajuyigbe, et al.** Phys. Rev. Lett., **100**, 207402 (2008).
10. **I.V. Lindell, S.A. Tretyakov, K.I. Nikoskinen, S. Ilvonen.** Microw. Opt. Technol. Lett., **31**, 129 (2001).
11. **Р.А. Силин.** Необычные законы преломления. М., ФАЗИС, 1999.
12. **D.R. Smith, D. Schurig.** Phys. Rev. Lett., **90**, 077405 (2003).
13. **P.A. Belov.** Microw. Opt. Technol. Lett., **37**, 259 (2003).
14. **N.H. Shen, Q. Wang, J. Chen, et al.** Phys. Rev. B, **72**, 153104 (2005).
15. **R.A. Depine, M.E. Inchaussandague,** et al. J. Opt. Soc. Amer. A, **23**, 949 (2006).
16. **H. Luo, W. Hu, W. Shu, F. Li, Z. Ren.** Europhys. Lett., **74**,1081 (2006).
17. **Y.-J. Jen, A. Lakhtakia, C.-W. Yu, C.-T. Lin.** Eur. J. Phys., **30**,1381 (2009).
18. **H. Chen, Sh. Xu, J. Li.** Opt. Express, **17,** 19791 (2009).
19. **H. Liu, Q. Lv, H. Luo, et al.** J. Opt. A: Pure Appl. Opt., **11,** 105103 (2009).
20. **V.A. Markel, J.C. Schotland.** J. Opt., **12,** 01510 (2010).
21. **Y. Xiang, X. Dai, S. Wen.** Opt. Commun., **274,** 248 (2007).

22. **L. Yonghua, W. Pei, Y. Peijun, X. Jianping, M. Hai.** Opt. Commun., **246,** 429 (2005).
23. **J. Lekner.** JOSA A, **10**, 2059 (1993).

ԼՈՒՅՍԻ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՄԵՏԱՆՅՈՒԹԵՐՈՒՄ I. ԴԻՍՊԵՐՍԻՈՆ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԸ

Ա.Հ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ, Մ.Ս. ՌԱՖԱՅԵԼՅԱՆ

Քննարկված են դիսպերսիոն հավասարման լուծումները անեզր և անորոշ պարամետրերով միջավայրում՝ օպտիկական առանցքի նկատմամբ կամայական դասավորված կոորդինատական համակարգում: Նկարագրված են հնարավոր բոլոր դիսպերսիոն մակերևույթները և ստացված են վերջիններիս առաջանալու պայմանները: Ցույց է տրված, որ հնարավոր են միայն մակերևույթների որոշակի զույգեր: Սահմանային խնդրի համար նույնպես ստացված է դիսպերսիոն հավասարումը: Հետազոտված է դիսպերսիոն կորերի կախվածությունը օպտիկական առանցքի կողմնորոշումից: Ցույց է տրված, որ նշված համակարգում ալիքների ընթացքն անշրջելի է:

LIGHT PROPAGATION IN ANISOTROPIC METAMATERIALS. I. DISPERSION SURFACES

A.H. GEVORGYAN, M.S. RAFAYELYAN

Peculiarities of solutions of the wave dispersion equation in an infinite indefinite medium for arbitrary oriented optical axes are considered. All the possible dispersion surfaces arising in the mentioned medium are described, and the conditions of their existence are obtained. It is shown that only some specific couples of surfaces are possible. The dispersion equation for the boundary problem is obtained, as well as the dependences of dispersion curves on the orientation of optical axis. The nonreciprocity of the wave refraction in these media is shown.