

УДК 537.533

## **РЕЗОНАНСНЫЕ СВОЙСТВА ИЗЛУЧЕНИЯ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ В ДВУХСЛОЙНОМ ВОЛНОВОДЕ**

А.Г. ГРИГОРЯН\*

Институт синхротронных исследований "КЕНДЛ", Ереван, Армения  
Ереванский государственный университет, Армения

\*e-mail: grigoryan@asls.candle.am

(Поступила в редакцию 31 мая 2013 г.)

Получена аппроксимационная формула для низкоэнергетического импеданса двухслойного цилиндрического волновода, допускающая построение явных выражений для пространственно-временных функций, характеризующих излучение заряженной частицы в волноводе. Выявлены общие закономерности эволюции импеданса и кильватерных потенциалов с ростом энергии частицы и с изменением геометрических и электродинамических параметров волновода. Выделены приемлемые для экспериментальных исследований параметры волноводов, обладающих резонансными свойствами при энергиях порядка 20 МэВ.

### **1. Введение**

Получению высокочастотного когерентного излучения с использованием высокоэнергетичных сгустков заряженных частиц в однослойных и многослойных волноводах в настоящее время придается большое значение. По своим частотным, пространственным и мощностным характеристикам оно может быть сравнимо с излучением, получаемым с помощью лазеров на свободных электронах (ЛСЭ) [1]. Работы в этом направлении носят как экспериментальный, так и теоретический характер. В частности, рассматривался керамический волновод [1], волновод с металлизированной диэлектрической стенкой [2], волновод с гофрированной металлической стенкой [3] и т.п. Основная направленность исследований – выявление и использование резонансных свойств волновода в связи с возникающим в нем излучением. Необходимо, чтобы в результате взаимодействия волновода с пролетающим в нем зарядом возникало узкополосное резонансное излучение с единственной резонансной частотой, аккумулирующей большую часть энергии излучения в ее малой окрестности.

В этой связи примечателен двухслойный цилиндрический металлический волновод: при определенных условиях (главное из которых – высокая проводимость металла, заполняющего внешний, основной слой и низкая проводимость тонкого внутреннего металлического покрытия) частотное распределение излучения ультрарелятивистской частицы в волноводе подобного типа обладает

необходимыми характеристиками [4-6]. Его резонансные свойства и условия возникновения резонанса для ультрарелятивистского случая исследованы в работе [6]. Там же показана возможность получения узконаправленного когерентного излучения, исходящего из раскрыва полубесконечного волновода упомянутого типа.

В связи с возможностью экспериментальной проверки полученных результатов с помощью строящегося в CANDLE линейного ускорителя AREAL [7] с энергией пучков от 5 до 20 МэВ возникает необходимость их обобщения на случаи с низкими энергиями пучков. Проблемам, связанным с выявлением особенностей излучения низкоэнергетических заряженных частиц, посвящена данная работа.

## 2. Постановка задачи и импеданс структуры

Рассмотрим бесконечный однородный цилиндрический волновод с двухслойной металлической стенкой (рис.1). Внешний толстый высокопроводящий металлический слой стенки волновода (его толщину можно считать практически бесконечной) покрыт изнутри тонким низкопроводящим металлическим слоем.

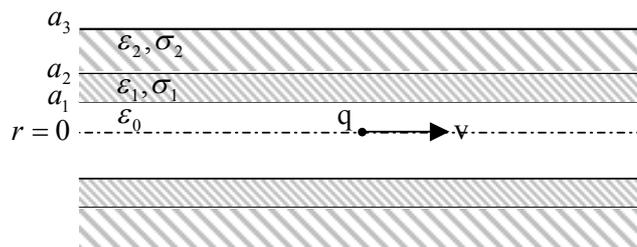


Рис.1. Двухслойный металлический волновод.

Основные геометрические параметры волновода – его внутренний ( $a_1$ ) и внешний ( $a_3$ ) радиусы, ограничивающие стенку волновода, и радиус  $a_2$  ( $a_1 < a_2 < a_3$ ), определяющий границу между слоями. Электродинамические свойства волновода определяются значениями проводимостей слоев – внутреннего  $\sigma_1$  и внешнего  $\sigma_2$ , причем  $\sigma_2 \gg \sigma_1$ . Мы полагаем металлические слои немагнитными, т.е. магнитные проницаемости  $\mu_{1,2}$  металлов, заполняющих слои, определяются магнитной проницаемостью вакуума  $\mu_0$  и  $\mu_{1,2} = \mu_0$ . Электрические проницаемости металлов, заполняющих слои, определяются их проводимостями  $\epsilon_{1,2} = \epsilon_0 + j\sigma_{1,2}/\omega$ , где  $\omega$  и  $\epsilon_0$  – частота и диэлектрическая проницаемость вакуума, соответственно. Вдоль оси волновода движется точечная заряженная частица с постоянной скоростью  $v$ , малой по сравнению со скоростью света  $c$ . Энергия частицы задается ее Лоренц-фактором  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ .

Задача заключается в исследовании особенностей частотного и пространственно-временного распределения излучения частицы, т.е. продольных импедансов и кильватерных потенциалов. Необходимо также вывести упрощенные аналитические формулы для импеданса, которые, без ущерба для точ-

ности, можно использовать для эффективного расчета кильватерных потенциалов и полей излучения из открытого конца волновода в случае малых энергий частиц, испускающих кильватерные поля. Последнее важно для планирования экспериментов на строящемся линейном ускорителе AREAL [7].

Определяя импеданс круглого многослойного волновода для частицы с произвольной энергией, мы следуем работам [5,8], в которых из полного поля частицы выделяется ее поле излучения, обусловленное конечной проводимостью стенок. Точное аналитическое выражение для продольного импеданса в двухслойной металлической трубе может быть получено на основе результатов работ [4,5]. Для частицы с заданной энергией и с идеальной проводимостью внешнего слоя оно записывается следующим образом:

$$Z_{\parallel} = \frac{j\varepsilon_0\tau Z_0}{G(x,y)} I_0(\lambda r), \quad (1)$$

$$G(x,y) = 2\pi a_1\beta I_0(x)(\varepsilon_0 I_1(x) + d_1\varepsilon_1 k_v \tau I_0(x) \operatorname{cth} y/y), \quad x = a_1 k_v \tau, \quad y = \chi_1 d_1, \quad (2)$$

где  $Z_0 = 120\pi\Omega$  – импеданс свободного пространства,  $I_{0,1}(x)$  – модифицированные функции Бесселя первого рода [9],  $d_1 = a_2 - a_1$  – толщина внутреннего слоя,  $\lambda = k_v \tau$ ,  $\tau = \gamma^{-1}$ ,  $\chi_1 = \sqrt{k_v^2 \tau^2 - j\omega\mu_0\sigma_1}$  – поперечное волновое число,  $k_v = \omega/v$ ,  $\beta = v/c$ . При  $\tau = 0$  соотношения (1), (2) стремятся к ультрарелятивистскому пределу:

$$Z_{\parallel} = j \frac{Z_0}{\pi k a_1^2} \left( 1 + \frac{2}{a_1} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0 \chi_1} \operatorname{cth}(\chi_1 d_1) \right)^{-1}, \quad k = \omega/c. \quad (3)$$

В последнем случае (3) распределение импеданса в поперечном сечении равномерно (нет зависимости от радиальной координаты  $r$ ), тогда как при малых энергиях (1) имеет место заметная радиальная зависимость в поперечном сечении волновода. Выражения для импеданса (1), (2) достаточно просты и пригодны для численных расчетов. Вызывает затруднение, однако, их использование для расчета кильватерных потенциалов. Кильватерный потенциал представляется в виде обратного преобразования Фурье от импеданса [10]:

$$W_{\parallel}(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_{\parallel}(\omega) e^{-j\frac{\omega}{v}s} d\omega, \quad (4)$$

где  $s$  – расстояние от ведущей до тестовой частицы, следующей вслед за ней с той же скоростью  $v$ . В однородных структурах, подобных рассматриваемой, понятие продольного кильватерного потенциала эквивалентно нормированной на заряд продольной электрической компоненте поля излучения частицы. Подынтегральная функция в (4) содержит быстроосциллирующий экспоненциальный множитель, что, в принципе, не препятствует, но значительно затрудняет ее непосредственное численное интегрирование. В отличие от ультрарелятивистского случая [6], допускающего простое суммирование вычетов от двух полюсов при интегрировании аналитического продолжения подынтегральной функции на комплексной плоскости, здесь интегрирование затруднено наличием бесконечного числа беспорядочно разбросанных полюсов и разрыва аналитичности у подынтегральной функции. Помимо вышесказанного, принципиаль-

ные трудности могут возникнуть при расчете дальнезонных характеристик поля излучения из открытого конца полубесконечного волновода (ср. с ультрарелятивистским случаем [6]): период осцилляций у подынтегральной функции убывает с увеличением расстояния от раскрыва до точки наблюдения [6].

Пути преодоления вышеупомянутых трудностей видятся в переходе от модифицированных функций Бесселя первого рода и гиперболической функции,  $\text{cth } y/y$  входящих в выражение (2), к их разложениям в степенные ряды [9]: при использовании достаточного количества членов они адекватно описывают исходную функцию для сколь угодно больших аргументов. В результате в знаменателе функции (1) формируется степенной алгебраический многочлен, численный расчет комплексных нулей которого не представляет особых трудностей: их можно определить с высокой точностью, например, с помощью соответствующей стандартной подпрограммы NSolve, встроенной в пакет программ Mathematica–8 [11].

Принимая во внимание малую толщину внутреннего слоя и полагая  $|\chi_1|d_1 \ll 1$ , функцию  $\text{cth } y/y$  в (2) можно заменить первыми двумя членами ее разложения по малому аргументу:

$$\text{cth } y/y = 1/y^2 + 1/3. \quad (5)$$

Разлагая, далее, функцию  $G(x, y)$  по малому параметру  $x = a_1 k_v \tau$  и оставляя первые  $N$  членов разложения, получаем окончательно в знаменателе функции (1) алгебраический степенной многочлен по степеням  $\omega$  порядка  $N + 3$ . В частности, при  $N = 20$  имеем:

$$Z_{||} = 1.12103 \times 10^{14} \frac{\sigma_1 Z_0^2}{\pi (a_1 \tau / v)^{22} \tilde{G}(\omega) d_1} \omega \left( 1 + j \frac{\epsilon_0 \tau^2}{\sigma_1 \beta^2} \omega \right). \quad (6)$$

Здесь

$$\tilde{G}(\omega) = \sum_{k=0}^{N+3} c_k \omega^k = \prod_{i=1}^{23} (\omega - \omega_i) \quad (7)$$

есть многочлен порядка  $N + 3$ ,  $\omega_i$  – его корни. Старший коэффициент  $c_{23}$  многочлена равен единице.

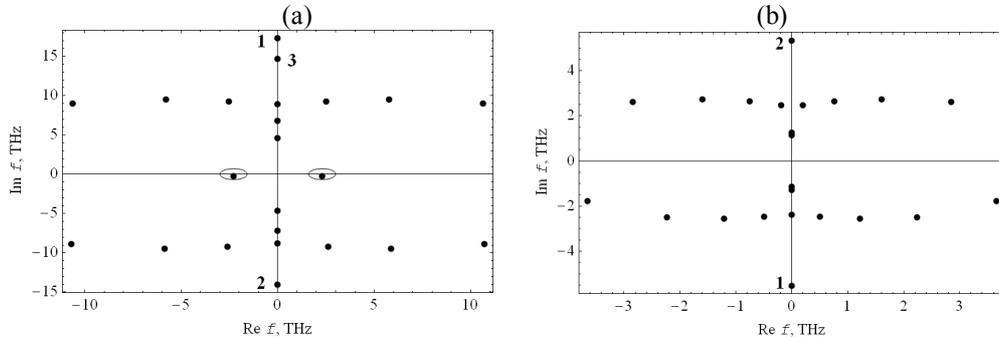


Рис.2. Корни уравнения  $\tilde{G}(\omega) = 0$  при  $\gamma = 40$  (а) и при  $\gamma = 10$  (б),  $a_1 = 1$  мм,  $d_1 = 1$  мкм,  $\sigma_1 = 3 \times 10^4 \Omega^{-1} \text{ м}^{-1}$  и  $N = 20$ . Масштабы пронумерованных мнимых корней для удобства изображения уменьшены (при  $\gamma = 40$ : 1) в  $5 \times 10^4$ , 2) в 50, 3) в 10 раз; при  $\gamma = 10$ : 1) в  $10^2$ , 2) – в  $10^4$  раза).

На рис.2 схематически изображено расположение корней многочлена  $\tilde{G}(\omega)$  на комплексной плоскости для двух различных случаев:  $\tau = 0.025$  ( $\gamma = 40$ ) и  $\tau = 0.1$  ( $\gamma = 10$ ) для идентичных геометрических и электродинамических параметров двухслойного волновода. Как видно из рисунка, корни многочлена являются либо комплексными, либо чисто мнимыми. Действительные корни отсутствуют, однако при  $\tau = 0.025$  (на рис.2a), в отличие от случая, изображенного на рис.2b ( $\tau = 0.1$ ) имеются комплексные корни с малой отрицательной мнимой составляющей, примыкающие к действительной оси со стороны нижней полуплоскости. Имеется равное количество комплексных корней с положительной ( $\omega_i^{(+)}$ ) и отрицательной ( $\omega_i^{(-)}$ ) действительной составляющей и они симметричны относительно мнимой оси:  $\omega_i^{(-)} = -\omega_i^{(+)*}$ . В связи с этим многочлен  $\tilde{G}(\omega)$  может быть записан в симметричной форме:

$$\tilde{G}(\omega) = \prod_{i=1}^{23} (\omega - \omega_i) = \prod_{i=1}^{N'} (\omega - \omega_j^{(+)}) \prod_{i=1}^{N'} (\omega + \omega_j^{(+)*}) \prod_{i=1}^{N-2N'+3} (\omega - \omega_j^{(0)}), \quad (8)$$

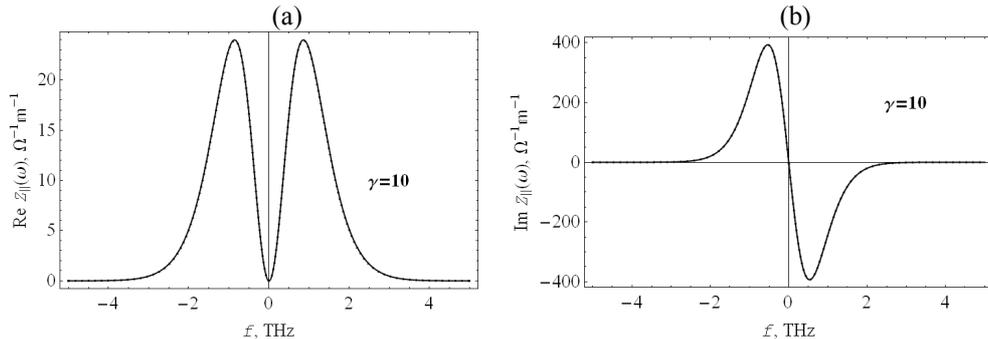
где  $N'$  – количество корней с положительной (отрицательной) действительной составляющей и  $\omega_j^{(0)}$  – чисто мнимые корни. Из соотношения (8) может быть получено важное свойство симметрии многочлена  $\tilde{G}(\omega)$  относительно мнимой оси:

$$\tilde{G}(-\omega) = c_{23} \prod_{i=1}^{N'} (-\omega - \omega_j^{(+)}) \prod_{i=1}^{N'} (-\omega + \omega_j^{(+)*}) \prod_{i=1}^{N-2N'+3} (-\omega - \omega_j^{(0)}) = -\tilde{G}^*(\omega). \quad (9)$$

Это соотношение имеет общий характер: оно обеспечивает выполнение фундаментального соотношения симметрии для продольного импеданса [10]:

$$Z_{\parallel}^0(-\omega) = Z_{\parallel}^{0*}(\omega). \quad (10)$$

Применимость представления (6) при конкретных энергиях частицы и параметрах волновода определяется при помощи сравнения графических представлений частотных распределений импедансов, полученных с помощью аппроксимации (6), с результатами, полученными с помощью формулы (1). Фиксируя параметры  $a_1$ ,  $d_1$ , и  $\sigma_1$  и полагая внешний слой идеально проводящим, приведем зависимости импедансов для различных значений  $\tau$ . Одновременно можно проследить за эволюцией формы частотного распределения импеданса с возрастанием энергии частицы (рис.3).



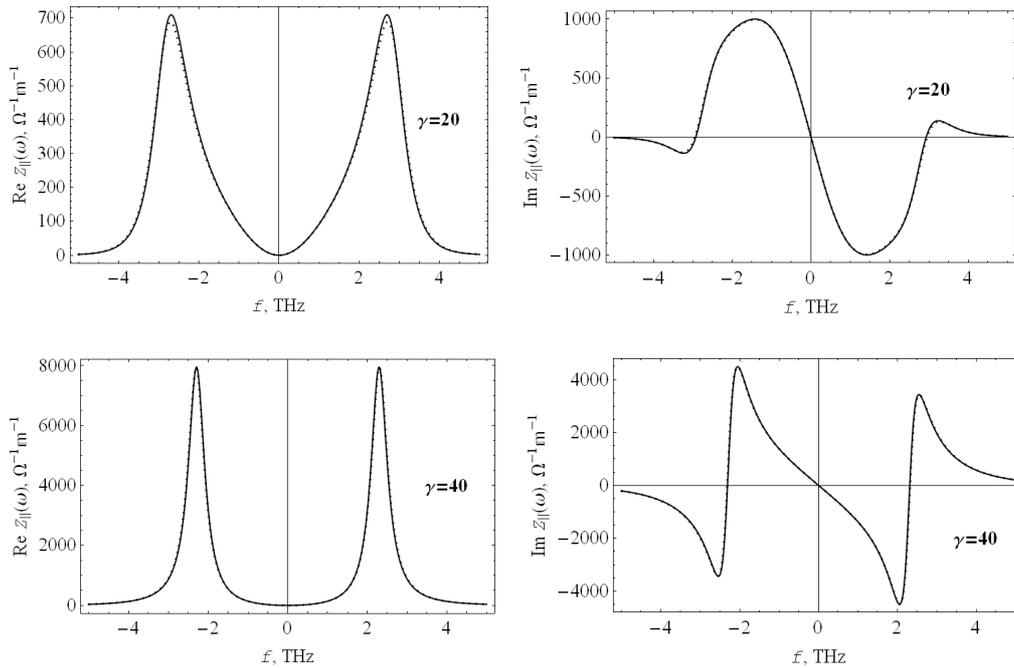


Рис.3. Действительная (а) и мнимая (б) составляющие продольного импеданса двухслойного металлического волновода при постепенно возрастающих значениях  $\gamma$ ;  $a_1 = 1$  мм,  $d_1 = 1$  мкм,  $\sigma_1 = 3 \times 10^4 \Omega^{-1} \text{м}^{-1}$ . Точки и сплошные кривые соответствуют точным расчетам и расчетам с помощью аппроксимации (6).

При избранных параметрах кривые, рассчитанные по точным формулам и с помощью аппроксимации (6), практически полностью совпадают. Относительно эволюции характера импеданса и его резонансных свойств можно сказать, что с ростом энергии частицы возрастает резонансная частота, которая, впрочем, довольно быстро (уже при  $\gamma = 20$ ) достигает некоторого предельного значения. При очень малых энергиях ( $\gamma \leq 10$ ) резонанс имеет широкополосный характер и его мнимая часть значительно превышает действительную. При этом действительные и мнимые составляющие сохраняют знак, что говорит о преимущественно емкостном характере импеданса. С ростом энергии ( $\gamma = 20$ ) мнимая часть импеданса становится знакопеременной и уже при  $\gamma = 40$  импеданс становится чисто индуктивным и узкополосным и приобретает черты, характерные для ультрарелятивистского импеданса [4-6]: его резонансная частота близка к частоте резонанса излучения ультрарелятивистской частицы  $f_{rez} = c\sqrt{2/a_1 d_1}/2\pi = 2.15$  ТГц [6].

Наличие узкополосного резонанса при  $\gamma = 40$ , что соответствует энергиям порядка 20 МэВ, указывает на принципиальную возможность получения высокочастотного (терагерцового) когерентного излучения на линейном электронном ускорителе AREAL [7]. Совпадение результатов точных расчетов и расчетов на основе аппроксимационных формул позволяет провести корректное

планирование эксперимента, осуществить предсказание результатов измерений и их последующую обработку.

Использование 20 членов разложения в (6) во многих случаях избыточно, однако оно оправдано тем, что обеспечивает адекватный расчет параметров излучения для широкого диапазона энергий частицы и геометрических и электродинамических параметров двухслойного волновода. Это видно на примере десятикратного увеличения радиуса волновода (рис.4), что, кстати, существенно облегчит подготовку и проведение эксперимента на AREAL.

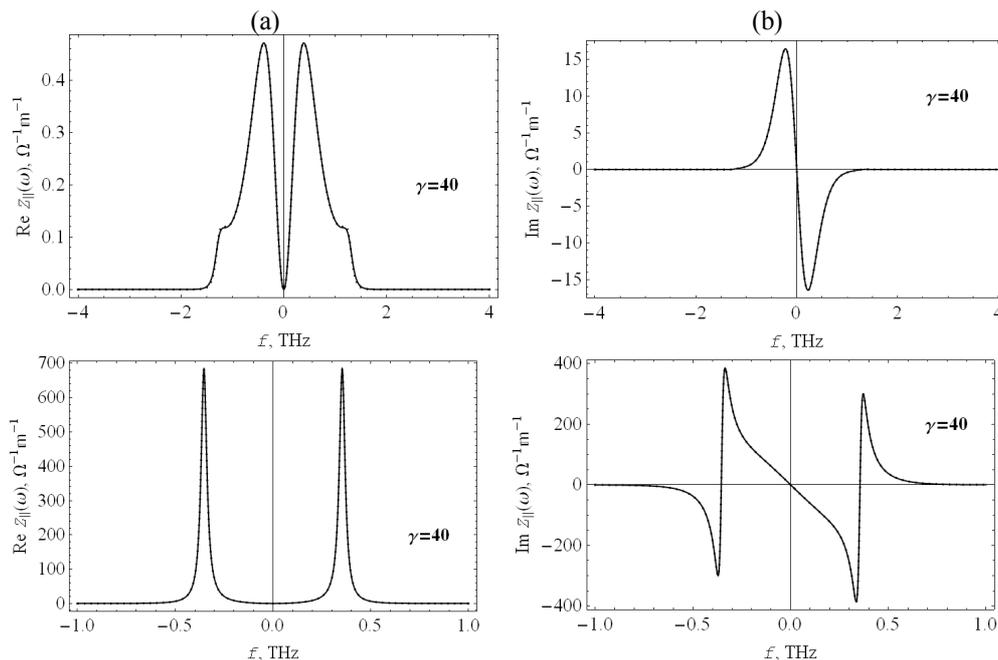


Рис.4. Действительная (а) и мнимая (б) составляющие продольного импеданса двухслойного металлического волновода при  $\gamma = 40$  и  $a_1 = 1$  см :  $d_1 = 1$  мкм ,  $\sigma_1 = 3 \times 10^4 \Omega^{-1} \text{м}^{-1}$  (верхний ряд);  $d_1 = 5$  мкм ,  $\sigma_1 = 3 \times 10^3 \Omega^{-1} \text{м}^{-1}$  (нижний ряд). Точки и сплошные кривые соответствуют точным расчетам и расчетам с помощью аппроксимации (6).

Как видно из рисунка, увеличение внутреннего радиуса волновода в десять раз, при неизменных остальных его параметрах  $d_1$  и  $\sigma_1$ , меняет характер импеданса – он становится преимущественно емкостным и теряет свои резонансные свойства.

Добиться сохранения индуктивного характера импеданса с узкополосным резонансом можно при одновременном увеличении толщины покрытия и уменьшении проводимости заполняющего его материала. При этом, естественно, понижается резонансная частота и ослабляется интенсивность излучения (ср. рис.3 и 4). Отметим также полное совпадение результатов расчетов по точным формулам и с помощью полученной аппроксимации.

### 3. Кильватерные потенциалы

Напомним, что основной целью вывода аппроксимационного соотношения (6) являлась не необходимость упрощения расчетных формул для построения импедансных кривых и их исследования (эффективное выполнение подобного рода расчетов возможно с помощью выражений (1)). Их эффективность проявляется при расчетах пространственно-временных характеристик волновода: таких, как кильватерные потенциалы или поле излучения из раскрыва полубесконечного круглого волновода [6].

Расчет кильватерных потенциалов, как уже отмечалось, производится по формуле (4). Явные выражения для них (с применением аппроксимации (6)) могут быть получены как непосредственным интегрированием вдоль действительной оси, так и с помощью интегрирования вдоль замыкающегося на бесконечности контура на комплексной плоскости. В последнем случае интергал вдоль действительной оси дополняется равным нулю интегралом вдоль полуокружности бесконечного радиуса  $R$  (рис.5).

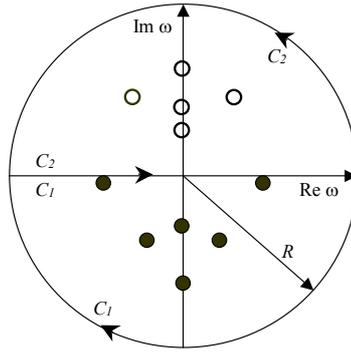


Рис.5. Схематическое изображение полюсов и охватывающих их контуров интегрирования  $C_1$  и  $C_2$ .

При определении потенциала позади сгустка ( $s > 0$ ) полуокружность интегрирования расположена в нижней полуплоскости (контур  $C_1$ ,  $\text{Im}\omega < 0$  на рис.5). Излучение, опережающее сгусток ( $s < 0$ ), определяется интегралом, содержащим дугу, расположенную в верхней полуплоскости (контур  $C_2$ ,  $\text{Im}\omega > 0$  на рис.5). В обоих случаях интегрирование сводится к подсчету вкладов от простых полюсов, обусловленных корнями многочлена  $\tilde{G}(\omega)$ , расположенных в соответствующих полуплоскостях. В общем виде выражение для продольного кильватерного потенциала, согласно теореме о вычетах [12], может быть записано следующим образом:

$$W_{||}^0(s) = C \text{sign}(s) \sum_{k=1}^{23} (1 - \text{sign}(s \text{Im}\omega_k)) \frac{j\omega_k - \varepsilon_0 \tau^2 \omega_k^2 / \sigma_1 \beta^2}{(a_1 \tau / v)^{22} \prod_{i=1, i \neq k}^{23} (\omega_k - \omega_i)} e^{-j \frac{\omega_k}{v} s}, \quad (11)$$

$$C = 1.12105 \times 10^{14} a_1 \sigma_1 Z_0^2 / 2\pi d_1. \quad (12)$$

Множитель  $\text{sign}(s)$ , определяющий знак перед суммой в (11), обусловлен противоположной направленностью контуров: по часовой (контур  $C_2$ ) и против часовой стрелки (контур  $C_1$ ). Распределения кильватерных потенциалов приведены на рис.6 и 7.

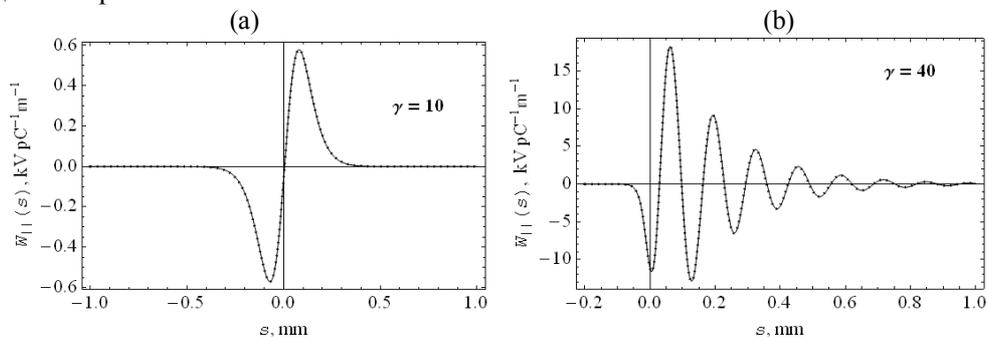


Рис.6. Кильватерные потенциалы двухслойного волновода для энергий  $\gamma = 10$  (a) и  $\gamma = 40$  (b); значения параметров равны:  $a_1 = 1$  мм,  $d_1 = 1$  мкм,  $\sigma_1 = 3 \times 10^4 \Omega^{-1} \text{м}^{-1}$ . Точки и сплошные кривые соответствуют точным расчетам и расчетам с помощью аппроксимации (6).

Распределения, приведенные на рис.6, иллюстрируют эволюцию кильватерной функции при увеличении энергии частицы и фиксированных параметрах волновода. С ростом энергии кильватерная функция преобразуется (соответственно преобразованию импеданса на рис.3) от чисто емкостного типа ( $\gamma = 10$ ) к индуктивному ( $\gamma = 40$ ). Для емкостного типа характерно симметричное распределение излучения впереди и позади сгустка при нулевом балансе теряемой и приобретаемой энергии. Индуктивный тип характеризуется преобладающим остаточным излучением позади сгустка с затухающими периодическими осцилляциями.

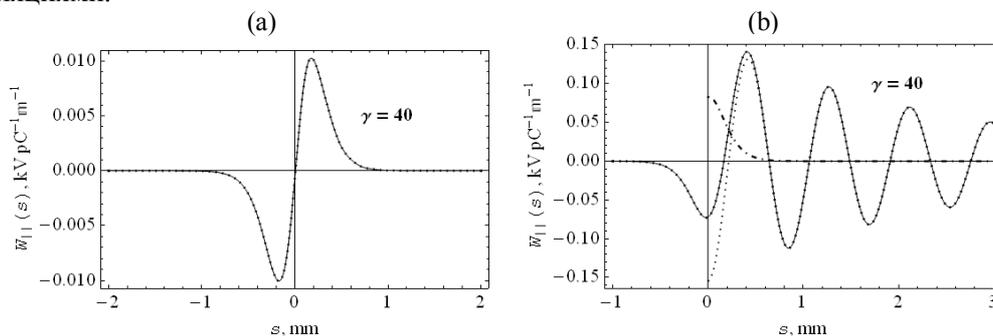


Рис.7. Кильватерные потенциалы двухслойного волновода;  $a_1 = 1$  см,  $\gamma = 40$ ; значения параметров равны:  $d_1 = 1$  мкм,  $\sigma_1 = 3 \times 10^4 \Omega^{-1} \text{м}^{-1}$  (a),  $d_1 = 5$  мкм,  $\sigma_1 = 3 \cdot 10^3 \Omega^{-1} \text{м}^{-1}$  (b). На рис.7b даны дополнительно вклад двух главных полюсов (пунктир); вклад остальных полюсов (штрих-пунктир). Точки и сплошные кривые соответствуют точным расчетам и расчетам с помощью аппроксимации (6).

Рис.7 соответствует распределениям импеданса, приведенным в нижнем

ряду на рис.4 и указывает на возможность и способ преобразования типа кильватерной функции от емкостного (слева) к индуктивному (справа) при неизменных энергии частицы и внутреннего радиуса волновода.

Наличие у индуктивного импеданса двух симметричных полюсов, обладающих сравнительно малой отрицательной мнимой составляющей (на рис.2 они помечены кружками), является главным заметным его отличием от импеданса емкостного типа. Естественно предположить, что эта пара полюсов играет существенную роль в формировании остаточного излучения. Действительно, как показывает рис.7б, их вклад является определяющим при формировании дальнего кильватерного поля. Их вклад в ближнее поле также является существенным: он соизмерим со вкладом остальных полюсов, расположенных в нижней полуплоскости.

Вклад двух главных полюсов – периодическая функция с убывающими осцилляциями, тогда как вклад остальных полюсов – монотонно-убывающая и быстро затухающая функция. По аналогии с [13], остаточное кильватерное поле, следующее за частицей, разбивается на “резонаторную” и “диффузионную” составляющие, образуемые соответственно вкладами двух главных и остальных полюсов. При  $\tau = 0$  [6] “диффузионная” составляющая зануляется и остаются только вклады от двух главных полюсов, образующих “резонаторную” составляющую. В соответствии с теоремой Вильсона о нагрузке [14], значение “резонаторной” составляющей вдвое превышает истинное значение кильватерного потенциала на частице ( $s = 0$ ), которое равно (с обратным знаком) “диффузионной” его составляющей.

#### 4. Заключение

С помощью аппроксимационной формулы для продольного низкоэнергетического импеданса двухслойной металлической трубы получено явное выражение для кильватерного потенциала. Выделены его “резонаторная” и “диффузная” составляющие. Корректность аппроксимационных выражений апробирована сравнениями с точными численными расчетами. Последовательность графических примеров дает возможность проследить эволюцию форм и типов импедансных кривых и кильватерных потенциалов. В частности, выявлены закономерности, по которым они преобразуются – в зависимости от энергии частицы (при фиксированных параметрах волновода) и при вариациях параметров волновода (энергия частицы фиксирована).

Определены геометрические и электродинамические параметры волноводов, при которых возможно наблюдение узкополосного когерентного излучения в терагерцовом (или субтерагерцовом) диапазоне при энергиях пучка 20 МэВ, соответствующих параметрам строящегося линейного ускорителя AREAL.

В заключение автор выражает благодарность В.М.Цаканову и М.И.Иваняну за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **J. B. Rosenzweig et al.** AIP Conf. Proc., **1299**, 364 (2010).
2. **M. Ivanyan, A. Tsakanian.** Proc. of IPAC2011, San Sebastián, Spain, 2011, p.703.
3. **G. Stupakov, K.L.F. Bane.** Phys. Rev. ST-AB, **15**, 124401 (2012).
4. **M. Ivanyan, V. Tsakanov.** Phys. Rev. ST-AB, **7**, 114402 (2004).
5. **M. Ivanyan et al.** Phys. Rev. ST- AB, **11**, 084001 (2008).
6. **M. Ivanyan, V. Tsakanov, A. Grigoryan, A. Tsakanian.** <http://arxiv.org/abs/1301.7729>, 2013.
7. **B. Grigoryan et al.** IPAC2011, San Sebastian, Spain, Sept. 4-9, 2011, pp.1066-1068.
8. **A. Piwinski.** Report No DESY HERA 92-11, May 1992.
9. **M. Abramowitz, I.A. Stegun.** Handbook of Mathematical Functions. NBS, 1964.
10. **B.W. Zotter and S.A. Kheifetz.** Impedances and Wakes in High-Energy Particle Accelerators. Singapore, World Scientific, 1997.
11. [www.wolfram.com/mathematica](http://www.wolfram.com/mathematica).
12. **Г. Корн, Т. Корн.** Справочник по математике. М., Наука, 1971.
13. **K.L.F. Bane, M. Sands.** Report No SLAC-PUB-96-7074, 1995.
14. **P.B. Wilson.** Fermilab Summer School, 1981, AIP Conf. Proc., **87**, 450 (1982).

ՅԱԾՐ ԷՆԵՐԳԻԱՆԵՐԻ ԷԼԵԿՏՐՈՆԱՅԻՆ ՓՆՁԵՐԻ ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ  
ՌԵԶՈՆԱՆՍԱՅԻՆ ՀՍԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԵՐԿՇԵՐՏ ԱԼԻՔՍԱՐՈՒՄ

Ա.Հ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Երկշերտ գլանային ալիքատարի ցածր-էներգիական իմպեդանսի համար ստացված է մոտարկային բանաձև, որը հնարավորություն է տալիս բացահայտ ստանալ ալիքատարում լիցքավորված մասնիկի ճառագայթումը նկարագրող տարածա-ժամանակային ֆունկցիաներ: Բացահայտված են իմպեդանսի և քիլվատերային պոտենցիալների ձևափոխումների ընդհանուր օրինաչափությունները՝ կախված մասնիկի էներգիայից և ալիքատարի երկրաչափական և էլեկտրադինամիկական պարամետրերից: Բացահայտված են էքսպերիմենտալ հետազոտությունների համար ընդունելի այնպիսի ալիքատարների պարամետրերը, որոնք ռեզոնանսային հատկություններ են ձեռք բերում 20 ՄԷՎ էներգիաների դեպքում:

## RESONANCE PROPERTIES OF LOW-ENERGY ELECTRON BEAMS RADIATION IN A TWO-LAYER WAVEGUIDE

A.H. GRIGORYAN

We obtain an approximation formula for low-energy impedance of a two-layer cylindrical waveguide, allowing the construction of explicit expressions for the space-time functions that characterize the radiation of a charged particle in the waveguide. The general laws of evolution of impedance and wake potentials with increasing particle energy and with the change of geometric and electrodynamic parameters of the waveguide are obtained. The settings of waveguides convenient for experimental research and having the resonance properties at energies of 20 MeV are revealed.