

УДК 536.145

ЗАПУТАННОСТЬ ТРЕХ ЭФФЕКТИВНО СВЯЗАННЫХ АТОМОВ

Л.А. ЧАХМАХЧЯН

Институт физических исследований НАН Армении, Аштарак, Армения

Laboratoire Interdisciplinaire Carnot de Bourgogne, Université de Bourgogne, France

Национальная научная лаборатория им. А.И. Алиханяна, Ереван, Армения

levonc@rambler.ru

(Поступила в редакцию 24 декабря 2012 г.)

Рассмотрена модель Дике для изучения запутанности и термодинамических свойств трех связанных атомов. Показаны две качественно отличные области, различающиеся знаком эффективной константы взаимодействия. Смещение Штарка, индуцированное вакуумом, значительно видоизменяет физическую картину обеих областей. Свойства запутанности проявляются ярче в области с отрицательной константой взаимодействия: атомы запутаны в более широкой области температур и частот атомного перехода. Изучены также критические температуры и частоты атомного перехода, соответствующие исчезновению запутанности.

1. Введение

Квантовая запутанность, как одна из наиболее интересных особенностей квантовой теории, является предметом интенсивных исследований. Запутанность является ценным ресурсом в обработке квантовой информации и создании квантовых коммуникаций [1-3], играет важнейшую роль в схемах квантовой телепортации [4-6], квантовых вычислениях [7,8] и многих квантово-криптографических протоколах [9,10]. Помимо этого, выявление ее свойств открывает новые перспективы для понимания механизма квантовых фазовых переходов (КФП) в физике многочастичных и твердотельных систем. В частности, последние исследования указывают на связь между запутанностью многочастичных квантовых систем, КФП и скэйлингом [11,12]. Несмотря на предположение, согласно которому запутанность не должна проявляться в макроскопических объектах, теоретически было доказано, что запутанные состояния должны существовать при конечных температурах [13]. Эти допущения были подтверждены экспериментально в работах [14-16]. Более того, последние экспериментальные наблюдения указали на возможность запутывания макроскопических образцов алмаза при комнатных температурах [17]. При этом были также приложены усилия к нахождению связи между термодинамическими свойствами и свойствами запутанности [18,19].

Отметим, что обработка квантовой информации может также осуществляться в системах, отличных от твердотельных, например, таких, как системы атомов, взаимодействующих с полями [20-22]. В частности, представляет интерес модель Дике (МД), которая описывает взаимодействие одномодового бозонного поля с ансамблем двухуровневых атомов [23,24]. В работах [25,26] экспериментальным и теоретическим путем было выявлено, что МД проявляет как равновесные, так и неравновесные КФП. Между тем, связь между КФП, хаосом и запутанностью была выведена в работах [27,28].

Часто МД рассматривается в приближении вращающейся волны, когда связь между

атомами и полем сравнительно слаба. Это упрощает анализ таких важных явлений как сверхизлучение, коллапс и возобновление осцилляций Раби, сжатие и т.д. [29,30].

В данной работе мы рассмотрим важный частный случай МД, соответствующий так называемому дисперсионному пределу, который также широко используется в задачах квантовой информатики [31,32]. В этом случае эффективное взаимодействие между атомами опосредовано радиационным полем и имеет природу диполь-дипольного взаимодействия, которое сохраняет число возбужденных атомов и фотонов радиационного поля. Особое внимание уделено обсуждению свойств запутанности трех атомов, связанных описанным выше взаимодействием. В качестве меры запутанности используется согласованность [33-36]. Отметим, что член взаимодействия эффективной МД в дисперсионном пределе может быть также рассмотрен как гейзенберговское обменное взаимодействие. Следуя этому замечанию, мы находим сильную связь между нашей моделью, фрустрированным магнетизмом и системой взаимодействующих магнитных спинов [37,38]. Как будет показано в последующих разделах, эффективная константа взаимодействия в дисперсионном приближении становится зависимой от отстройки между частотой атомного перехода и частотой резонатора. Это дает возможность относительно легко манипулировать силой взаимодействия между атомами, что сравнительно затруднительно в случае твердотельных систем. С другой стороны, ввиду того, что спаривание атомов опосредовано радиационным полем, атомы могут взаимодействовать на произвольном расстоянии в пределах резонатора. Отметим, что в эффективной модели также присутствует смещение Штарка, индуцированное вакуумом, которое вносит качественные изменения в структуру основного состояния системы.

2. Модель Дике в дисперсионном приближении

Рассмотрим N двухуровневых атомов, взаимодействующих с одномодовым полем резонатора. Гамильтониан системы (модель Дике) в приближении вращающейся волны может быть записан в виде (в системе единиц, где $\hbar = 1$)

$$H = H_0 + V, \quad H_0 = \omega_0 a^+ a + (1/2) \sum_{i=1}^N (\omega_i S_i^z + \lambda a^+ a), \quad V = g \sum_{i=1}^N (a^+ S_i^- + a S_i^+), \quad (1)$$

где $S_i^+ = |1_i\rangle\langle 0_i|$, $S_i^- = |0_i\rangle\langle 1_i|$, $S_i^z = |1_i\rangle\langle 1_i| - |0_i\rangle\langle 0_i|$ ($|0_i\rangle$ и $|1_i\rangle$ — соответственно, основные и возбужденные состояния i -ого атома), a^+ и a — операторы рождения и уничтожения моды резонатора, ω_i — частота атомного перехода i -ого атома, ω_0 — частота моды резонатора, g — сила взаимодействия между атомами и модой резонатора [23,24].

В настоящей работе нас интересует дисперсионный предел [31,32], т.е. режим, в котором

$$|\omega_i - \omega_0| \ll g\sqrt{\bar{n} + 1}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

где \bar{n} — среднее число фотонов в резонаторе. В данном пределе эффективный гамильтониан системы может быть представлен в следующем виде:

$$H'_{eff} = \omega_0 a^+ a + \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} \omega_i + \lambda a^+ a \right) S_i^z + \lambda \left(\sum_{i=1}^N |1_i\rangle\langle 1_i| + \sum_{i \neq j} S_i^+ S_j^- \right), \quad (3)$$

где $\lambda = g^2/\delta$ — эффективная константа взаимодействия, а $\delta = \omega_i - \omega_0$ — отстройка. В этом пределе обмен фотонов между атомной системой и резонатором отсутствует. Разрешенные переходы происходят между состояниями с равными числами возбужденных атомов. Член $\sum_{i=1}^N \lambda a^+ a S_i^z$ в гамильтониане (3) соот-

ветствует динамическому эффекту Штарка, в то время как $\sum_{i=1}^N \lambda |1_i\rangle\langle 1_i|$ можно интерпретировать как смещение Штарка, индуцированное вакуумом. Эффективное взаимодействие $\sum_{i \neq j} S_i^+ S_j^-$ между атомами опосредовано модой резонатора.

Оно имеет диполь-дипольный характер и может быть также рассмотрено как гейзенберговское обменное взаимодействие. Отметим, что важным свойством конечной модели является настраиваемость константы связи. Последняя может быть модифицирована, например, изменением отстройки δ (в то время как в твердотельных системах константа связи фиксирована). Более того, знак константы связи может быть изменен сменой знака отстройки. В магнитных системах этому соответствует переход из ферромагнитного состояния ($\lambda < 0$) в антиферромагнитное ($\lambda > 0$). Как будет показано ниже, различные знаки λ соответствуют различным физическим картинам. Как видно из уравнения (3), фотонные и атомные степени свободы не запутаны и, следовательно, можно фиксировать состояние моды резонатора. Мы рассмотрим случай, когда резонаторная мода находится в вакуумном состоянии $|\text{vac}\rangle$. В итоге окончательный гамильтониан получает следующий вид:

$$H_{eff} = \lambda \left(\sum_{i=1}^N |1_i\rangle\langle 1_i| + \sum_{i \neq j} S_i^+ S_j^- \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \omega_i S_i^z. \quad (4)$$

Подчеркнем, что гамильтониан (4) также эквивалентен коллективной спиновой модели [39-41]. Экспериментальная реализация систем этого класса довольно затруднительна, так как она обладает бесконечным (или дальним) порядком взаимодействия. Тем не менее, квантовоэлектродинамический резонатор позволяет коллективное спаривание между атомами и, следовательно, осуществляется бесконечный порядок взаимодействия, ввиду того, что фотоны распределены между всеми атомами.

Нас интересует случай идентичных атомов, т.е. $\omega_1 = \dots = \omega_N \equiv \omega$.

3. Согласованность в качестве меры запутанности трех атомов

Рассмотрим свойства запутанности трех атомов, связанных диполь-дипольным взаимодействием (4), индуцированным модой резонатора.

Собственные значения H_{eff} следующие:

$$\begin{aligned} E_1 &= -3\omega/2; & E_2 &= E_3 = -\omega/2; \\ E_4 &= 3\lambda - \omega/2; & E_5 &= E_6 = \lambda + \omega/2; \\ E_7 &= 4\lambda + \omega/2; & E_8 &= 3\lambda + \omega/2, \end{aligned} \quad (5)$$

с соответствующими собственными векторами:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= |000\rangle, & |\psi_2\rangle &= (1/\sqrt{3})(q|001\rangle + q^2|010\rangle + |100\rangle), \\ |\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(q^2|001\rangle + q|010\rangle + |100\rangle), & |\psi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle), \\ |\psi_5\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(q|110\rangle + q^2|101\rangle + |011\rangle), & |\psi_6\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(q^2|110\rangle + q|101\rangle + |011\rangle), \\ |\psi_7\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|110\rangle + |101\rangle + |011\rangle), & |\psi_8\rangle &= |111\rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

где $q = e^{i2\pi/3}$. Состояния полной системы, включая поле, имеют вид $|\psi_i\rangle \otimes |\text{vac}\rangle$,

$i = 1, \dots, 8$. Из соображений удобства мы опускаем вакуумное состояние поля. При данном выборе собственные векторы (6) являются также собственными векторами оператора циклического перемещения с собственными значениями $1, q$ и q^2 ($q^2 + q + 1 = 0$).

Как уже было отмечено в предыдущем разделе, H_{eff} связывает лишь состояния с равными числами возбужденных атомов. Это является следствием того, что гамильтониан (4) коммутативен с оператором $\sum_{i=1}^N S_i^z$. Другими словами, полный псевдоспин системы есть сохраняющаяся величина.

В качестве меры запутанности мы используем согласованность [33,34], которая определяется следующим образом:

$$C(\rho) = \max(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0), \quad (7)$$

где λ_i — квадратные корни собственных значений (в убывающем порядке) соответствующего оператора матрицы плотности ρ_{12} :

$$\bar{\rho}_{12} = \rho_{12} (\sigma_1^y \otimes \sigma_2^y) \rho_{12}^* (\sigma_1^y \otimes \sigma_2^y). \quad (8)$$

Так как мы рассматриваем двухчастичную запутанность, то редуцируем полную матрицу плотности ρ , беря частичный след по третьему атому: $\rho_{12} = \text{Tr}_3 \rho$ [35]. Полная матрица плотности, которая учитывает тепловое смешивание всех собственных состояний (6), имеет следующий вид:

$$\rho = \frac{1}{Z} \sum_{k=1}^8 \exp\left(-\frac{E_k}{T}\right) |\Psi_k\rangle \langle \Psi_k|, \quad (9)$$

где $Z = \text{Tr} \rho$ — статистическая сумма (здесь и далее используется система единиц, где константа Больцмана $k_B = 1$).

Так как в нашем случае система трех атомов имеет трансляционную симметрию, то не имеет значения, по какому атому производится частичный след. Имея также в виду, что гамильтониан удовлетворяет условию $[S_z, H_{eff}] = 0$, получаем [42,43]:

$$\rho_{12} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & y & 0 \\ 0 & y & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Здесь u, w , и y есть некоторые функции от температуры T , константы связи \square и частоты атомного перехода \square . Матрица ρ_{12} есть частный случай так называемого X -состояния, согласованность которого определяется как [44,45]

$$C(\rho) = (2/Z) \max(|y| - \sqrt{uv}, 0). \quad (11)$$

Перед рассмотрением структуры основного состояния системы заметим, что состояния $|\Psi_i\rangle$ с $i = 2, 3, \dots, 7$ запутаны со значением $C(\rho) = 2/3$, в то время как остальные состояния факторизируемы (не запутаны).

4. Положительная константа связи

Рассмотрим случай положительной константы связи ($\lambda > 0$). По аналогии с магнитными системами, для которых магнитное поле соответствует частоте атомного перехода ω , а сила связи \square параметру λ , это состояние можно отождествить с антиферромагнитным.

Рис.1 показывает зависимость согласованности $C(\rho)$ от частоты атомного перехода ω при различных значениях температуры. При нулевой температуре система не запутана в силу того, что основным состоянием является насыщенное $|\psi_1\rangle$. Твердотельные системы с антиферромагнитным спариванием имеют фрустрированное основное состояние, которое сохраняется до некоторого критического значения ω , соответствующего переходу между фрустрированным и насыщенным состояниями. Тем не менее, в данной модели этого не происходит ввиду смещения Штарка, индуцированного вакуумом. Между тем в пределе $\omega \rightarrow 0$ основное состояние трехкратно вырождено: оно содержит $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ и $|\psi_3\rangle$. Система описывается матрицей плотности, состоящей из этих трех состояний и имеющей значение согласованности $C(\rho) = 2/3$.

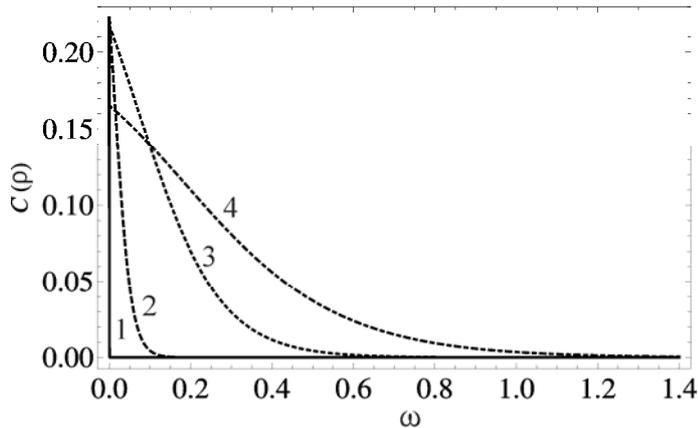


Рис.1. Зависимость безразмерной согласованности $C(\rho)$ от частоты атомного перехода ω (в единицах $\lambda > 0$) при различных значениях температуры T (в единицах $\lambda > 0$): 1) 0, 2) 0.02, 3) 0.1, 4) 0.2.

Присутствие ненулевой температуры сглаживает ступенчатое поведение $C(\square)$. Температура, которая смешивает все состояния системы, индуцирует так называемую тепловую запутанность (несмотря на незапутанное основное состояние). В частности, температура приводит к более высокому значению $C(\square)$ при значениях \square близких к нулю (см. рис.2). Более того, кривая зависимости согласованности от T выказывает локальный максимум, соответствующий оптимальному смешиванию собственных состояний системы. Тем не менее, квантовые корреляции между атомами исчезают при некоторой критической температуре T_c . Из рис.2 можно заметить, что чем выше частота атомного перехода \square , тем выше температура T_c , но имеется определенная температура $T_s < T_c$, удовлетворяющая условию $\lim_{\omega \rightarrow \infty} T_c = T_s$ (см. также следующий раздел).

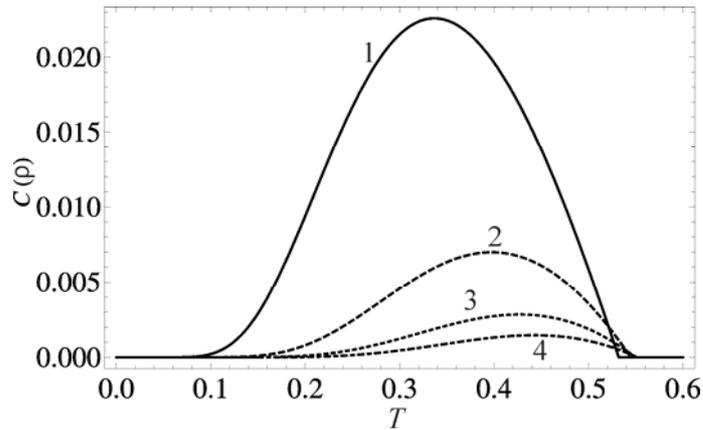


Рис.2. Зависимость безразмерной согласованности $C(\rho)$ от температуры T (в единицах $\lambda > 0$) при различных значениях частоты атомного перехода ω (в единицах $\lambda > 0$): 1) 0.8, 2) 1.3, 3) 1.7, 4) 2.

5. Отрицательная константа связи

Перейдем к случаю отрицательной силы взаимодействия ($\lambda < 0$). На рис.3 показана зависимость согласованности $C(\rho)$ от частоты атомного перехода ω при различных значениях температуры T . При нулевой температуре система запутана, если ω ниже критического значения $\omega_c^- = 3\lambda$, где постоянно $|\psi_1\rangle$ пересекается с состоянием $|\psi_4\rangle$. При $\omega > \omega_c^-$ основным состоянием является насыщенное $|\psi_1\rangle$. На рис.3 наблюдается также локальная впадина в точке $\omega = \omega_d = -\lambda$, где имеет место переход между основными фрустрированными состояниями $|\psi_4\rangle$ ($\omega_d < \omega < \omega_c$) и $|\psi_7\rangle$ ($\omega < \omega_d$). При $\omega = \omega_d$ $|\psi_4\rangle$ и $|\psi_7\rangle$ образуют дважды вырожденное основное состояние со значением запутанности $C(\rho) = 1/4$ (несмотря на то, что запутанность каждого из этих состояний есть $C(\rho) = 2/3$). Заметим также, что в точке ω_d происходит переход между состояниями с равным значением запутанности, но разным числом возбужденных атомов. Такое поведение объясняется присутствием смещения Штарка, индуцированного вакуумом. Обратим внимание на состояние $|\psi_4\rangle$ ($|\psi_7\rangle$): вероятность нахождения одного из трех атомов в возбужденном (невозбужденном) состоянии равна $1/3$. Это аналог фрустрации магнитных систем [37,38].

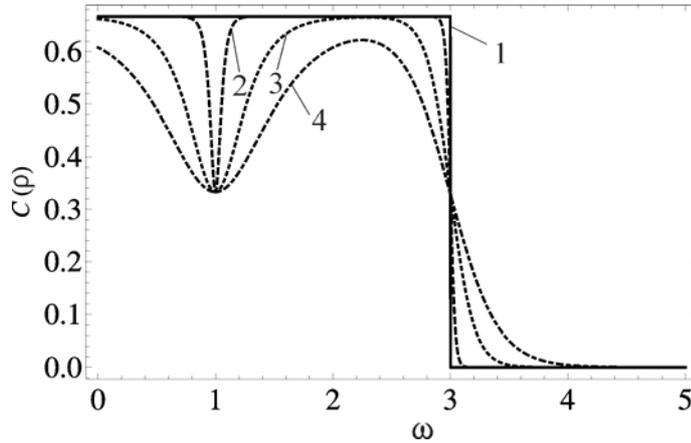


Рис.3. Зависимость безразмерной согласованности $C(\rho)$ от частоты атомного перехода ω (в единицах $-\lambda > 0$) при различных значениях температуры T (в единицах $-\lambda > 0$): 1) 0, 2) 0.02, 3) 0.1, 4) 0.2.

На рис.4 представлена зависимость согласованности $C(\square)$ от температуры T . Если основное состояние не запутано, то качественное поведение $C(\square)$ совпадает со случаем $\square > 0$ (см. рис.2), но здесь критическая температура T_c выше. Между тем, если основное состояние запутано, то согласованность $C(\square)$ понижается с повышением температуры и резко исчезает при температуре T_c .

Как было отмечено выше, существует некоторая температура насыщения $T_s < T_c$, удовлетворяющая условию $\lim_{\omega \rightarrow \infty} T_c = T_s$. Эта температура может быть найдена из следующего уравнения:

$$e^{\lambda/T_s} \sqrt{6e^{3\lambda/T_s} + 3} - |e^{3\lambda/T_s} - 1| = 0, \quad (12)$$

решение которого может быть представлено в виде $T_s/\lambda = -1.32639$ при $\lambda < 0$ и $T_s/\lambda = 0.554641$ при $\lambda > 0$.

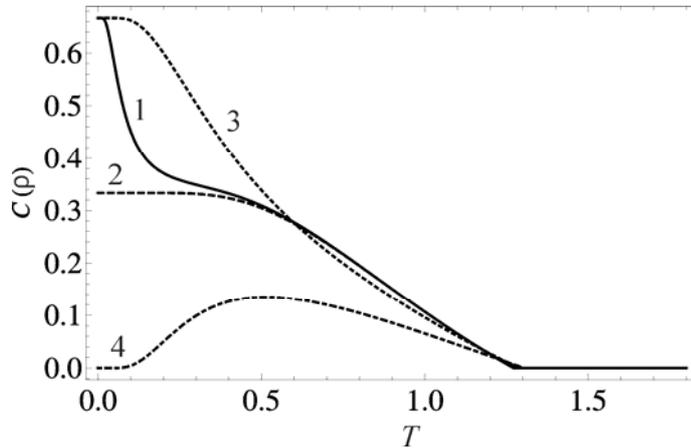


Рис.4. Зависимость безразмерной согласованности $C(\rho)$ от температуры T (в единицах $-\lambda > 0$) при различных значениях частоты атомного перехода ω (в единицах $-\lambda > 0$): 1) 0.8, 2) 1, 3) 2.5, 4) 3.5.

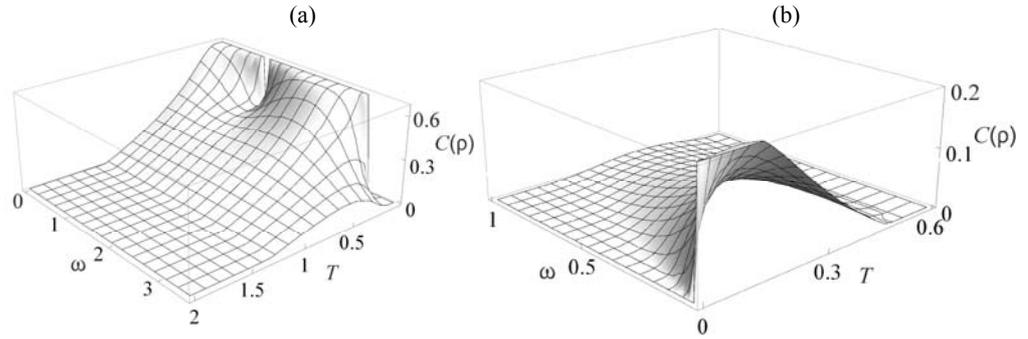


Рис.5. Зависимость безразмерной согласованности $C(\rho)$ от температуры T (в единицах $|\lambda|$) и частоты атомного перехода ω (в единицах $|\lambda|$), для (a) $\lambda < 0$; (b) $\lambda > 0$.

Для представления более целостной картины на рис.5 показана трехмерная зависимость $C(\rho)$ от температуры T и частоты ω . Сравнительный анализ приведенных выше двух областей показывает, что в случае $\lambda < 0$ свойства запутанности проявлены ярче: система запутана в более широкой области температур и частот атомного перехода.

6. Заключение

Исследованы свойства запутанности трех атомов, связанных диполь-дипольным взаимодействием, опосредованным модой резонатора (модель Дике в дисперсионном пределе). Эффективное взаимодействие происходит без обмена энергии между резонатором и атомной системой, так как число возбужденных атомов есть сохраняющаяся величина.

Исследована структура основного состояния системы взаимодействующих атомов и фотонов, и впервые выявлены две качественно различные области в зависимости от знака эффективной константы взаимодействия. Согласованность использована для количественной оценки запутанности. Нами рассмотрены критическая частота атомного перехода ω_c^- и критическая температура T_c , соответствующие исчезновению запутанности. Показано, что в области с отрицательной силой связи λ свойства запутанности проявлены ярче, т.е. квантовые корреляции присутствуют в системе в более широкой области температур и собственной атомной частоты. Этот режим достигается выбором отрицательной отстройки δ .

С другой стороны, смещение Штарка, индуцированное вакуумом, приводит к нефрустрированному основному состоянию при $\square > 0$, в то время как при $\square < 0$ имеет место переход между состояниями с различным числом возбужденных атомов (в точке $\square = \square_d = -\square$). Наконец, по сравнению с твердотельными системами со схожим взаимодействием (известным как обменное), рассмотренная нами модель выказывает сравнительно легкий способ манипулирования эффективной константой связи \square . Модель также представляет собой возможную экспериментальную реализацию коллективной спиновой системы с дальним порядком взаимодействия.

Данная работа выполнена в рамках Международной Объединенной Лаборатории IRMAS (CNRS-Франция и ГКН-Армения), при поддержке программы ERA WIDE GA-INCO-295025-IPERA, французско-армянского гранта CNRS IE-017 и Национального Совета Бургундии (Conseil Régional de Bourgogne).

Автор благодарен Н. Ананикяну, С. Герину, Г. Григорян и К. Леруа за плодотворные обсуждения и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **L.Amico, R.Fazio, A.Osterloh, V.Vedral.** Rev. Mod. Phys., **80**, 517 (2008).
2. **O.Gëuhne, G.Toth.** Phys. Rep., **474**, 1 (2009).
3. **R.Horodecki et al.** Rev. Mod. Phys., **81**, 865 (2009).
4. **C.H.Bennett, G.Brassard, C.Crepeau, R.Jozsa, A.Peres, W.K.Wootters.** Phys. Rev. Lett., **70**, 1895 (1993).
5. **X.-M.Jin et al.** Nature Photonics, **4**, 376 (2010).
6. **G.Bjork, A.Laghaout, U.L.Andersen.** Phys. Rev. A, **85**, 022316 (2012).
7. **J.Kim, J.-S.Lee, S.Lee, C.Cheong.** Phys. Rev. A, **62**, 022312 (2000).
8. **A.Brodutch, D.R.Terno.** Phys. Rev. A, **83**, 010301(R) (2011).
9. **M.Sasaki et al.** Optics Express, **19**, 10387 (2011).
10. **A.Avella, G.Brida, I.P.Degiovanni, M.Genovese, M.Gramegna, P.Traina.** Phys. Rev. A, **82**, 062309 (2010).
11. **D.Larsson H.Johannesson.** Phys. Rev. Lett., **95**, 196406 (2005).
12. **V.Alba, L.Tagliacozzo, P.Calabrese.** Phys. Rev. B, **81**, 060411(R) (2010).
13. **M.C.Arnese, S.Bose, V.Vedral.** Phys. Rev. Lett., **87**, 017901 (2001).
14. **A.M.Souza, M.S.Reis, D.O.Souares-Pinto, I.S.Oliveira, R.S.Sarthour.** Phys. Rev. B, **77**, 104402 (2008).
15. **T.G.Rappoport, L.Ghivelder, J.C.Fernandes, R.B.Guimaraes, M.A.Continentino.** Phys. Rev. B, **75**, 054422 (2007).
16. **A.M.Souza et al.** Phys. Rev. B, **79**, 054408 (2009).
17. **K.C.Lee et al.** Science, **334**, 1253 (2011).
18. **N.S.Ananikian, L.N.Ananikyan, L.A.Chakhmakhchyan, A.N.Kocharian.** J. Phys. A, **44**, 025001 (2011).
19. **N.Ananikian, C.Burdik, H.Lazaryan.** J. Phys: Conf. Series, **343**, 012065 (2012).
20. **G.G.Grigoryan, G.V.Nikoghosyan, T.Halfmann, Y.T.Pashayan-Leroy, C.Leroy, S.Guérin.** Phys. Rev. A, **80**, 033402 (2009).
21. **G.G.Grigoryan, Y.T.Pashayan-Leroy, C.Leroy, S.Guérin.** Phys. Rev. A, **79**, 013813 (2009).
22. **G.G.Grigoryan, C.Leroy, Y.Pashayan-Leroy, L.Chakhmakhchyan, S.Guérin, H.R. Jauslin.** Eur. Phys. J. D, **66**, 256 (2012).
23. **K.Hepp, E.H.Lieb.** Phys. Rev. A, **8**, 2517 (1973).
24. **Y.K.Wang, F.T.Hioe.** Phys. Rev. A, **7**, 831 (1973).
25. **K.Baumann, R.Mottl, F.Brennecke, T.Esslinger.** Phys. Rev. Lett., **107**, 140402 (2011).
26. **K.Baumann, C.Guerlin, F.Brennecke, T.Esslinger.** Nature (London), **464**, 1301 (2010).
27. **K.Furuya, M.C.Nemes, G.Q.Pellegrino.** Phys. Rev. Lett., **80**, 5524 (1998).
28. **R.M.Angelo, K.Furuya, M.C.Nemes, G.Q.Pellegrino.** Phys. Rev. A, **64**, 043801 (2001).
29. **C.Leonardi, F.Persico, G.Vetri.** Riv. Nuovo Cimento, **9**, 1 (1986).
30. **B.W.Shore, P.L.Knight.** J. Mod. Opt., **40**, 1195 (1993).
31. **S.-B.Zheng.** Phys. Rev. Lett., **87**, 230404 (2001).
32. **S.-B.Zheng, G.-C.Guo.** Phys. Rev. A, **63**, 044302 (2001); Phys. Rev. Lett., **85**, 2392 (2000).
33. **S.Hill, W.K.Wootters.** Phys. Rev. Lett., **78**, 5022 (1997).
34. **W.K.Wootters.** Phys. Rev. Lett., **80**, 2245 (1998).
35. **N.S.Ananikian, L.N.Ananikyan, L.A.Chakhmakhchyan, O.Rojas.** J. Phys.: Condens. Matter, **24**, 256001 (2012).
36. **L.Chakhmakhchyan, N.Ananikian, L.Ananikyan, C.Burdik.** J. Phys: Conf. Series, **343**, 012022 (2012).

37. Frustrated Spin Systems. **H.T.Diep (ed.)**. Singapore, World Scientific, 2004.
38. **J.S.Gardner, M.J.P.Gingras, J.E.Greedan**. Rev. Mod. Phys., **82**, 53 (2010).
39. **S.Morrison, A.S.Parkins**. J. Phys. B, **41**, 195502 (2008).
40. **G.Chen, J.-Q.Liang, S.Jia**. Optics Express, **17**, 19682 (2009).
41. **Y.L.Zhou, M.Ortner, P.Rabl**. Phys. Rev. A, **84**, 052332 (2011).
42. **K.M.O'Connor, W.K.Wootters**. Phys. Rev. A, **63**, 052302 (2001).
43. **X.Wang, P.Zanardi**. Phys. Lett. A, **301**, 1 (2002).
44. **A.R.P.Ray**. J. Phys. A, **42**, 412002 (2009).
45. **A.R.P.Rau, M.Ali, G.Alber**. Eur. Phys. Lett., **82**, 40002 (2008).

ENTANGLEMENT OF EFFECTIVELY COUPLED THREE ATOMS

L.A. CHAKHMAKHCHYAN

We consider the Dicke model in the dispersive limit for the investigation of entanglement properties of three coupled atoms. Two regimes depending on the sign of the effective coupling constant are shown. The vacuum induced Stark shift modifies strongly the results of these regimes. The case of negative coupling strength exhibits entanglement in a wider range of the temperature and the atomic transition frequency values. The critical temperatures and atomic transition frequencies corresponding to vanishing of entanglement are studied.

ԷՖԵԿՏԻՎ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՄԲ ԿԱՊՎԱԾ
ԵՐԵՔ ԱՏՈՄՆԵՐԻ ԽՃՃՎԱԾՈՒԹՅՈՒՆԸ

Լ.Ա. ՉԱԽՄԱԽՉՅԱՆ

Երեք էֆեկտիվ կապով փոխազդող ատոմների խճճվածության հատկությունների ուսումնասիրության համար դիտարկված է Դիկեի մոդելը՝ դիսպերսային սահմանում: Հայտնաբերված են երկու տիրույթ՝ էֆեկտիվ կապի հաստատունի նշանից կախված: Վակուումային Շտարկի շեղումը զգալիորեն վերափոխում է այս տիրույթների արդյունքները: Ցույց է տրված, որ բացասական կապի հաստատունի դեպքում խճճվածության հատկություններն ավելի վառ են արտահայտված: Դիտարկված են նաև խճճվածության վերացմանը համապատասխանող կրիտիկական ջերմաստիճանները և ատոմային անցման հաճախականությունները: