УДК 621.315

ЭЛЕКТРОННЫЕ И ДЫРОЧНЫЕ СОСТОЯНИЯ В УЗКОЗОННОЙ ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ ПЛЕНКЕ InSb В ПРИСУТСТВИИ ОДНОРОДНОГО ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

В.А. АРУТЮНЯН¹, В.А. ГАСПАРЯН¹, Э.М. КАЗАРЯН¹, А.А. САРКИСЯН^{1,2}*

¹Российско-армянский (Славянский) университет, Ереван

²Ереванский государственный университет, Ереван, Армения *e-mail: shayk@ysu.am

(Поступила в редакцию 15 октября 2012 г.)

Теоретически рассмотрены состояния носителей заряда в узкозонной полупроводниковой пленке InSb, помещенной в однородное электростатическое поле. Обсуждается случай, когда зона тяжелых дырок описывается стандартной дисперсией, а для легких дырок и электронов имеет место дисперсия Кейна в рамках двухзонной зеркальной модели. Определен интервал значений внешнего поля, для которого возможно получить аналитические выражения для энергетического спектра и огибающих волновых функций носителей заряда.

1. Введение

Изучение полупроводниковых структур пониженной размерности имеет как чисто научное, так и прикладное значение и диктуется потребностями быстро прогрессирующих современных нанотехнологий [1-3]. В частности, в квантовых ямах, благодаря размерному квантованию носителей заряда в одном направлении, проявляются коренным образом отличающиеся от случая массивного образца, совершенно новые свойства двумерной электронной подсистемы, чем обусловлено широкое применение этих структур в качестве активного элемента в различных устройствах квантовой электроники [3-7]. Одним из удобных механизмов управления энергетическим спектром носителей заряда в изучаемых образцах является наложение на систему внешнего электрического поля [8-11]. Именно модуляция оптического поглощения в квантовых ямах внешним электростатическим полем лежит в основе действия квантовых электрооптических модуляторов и фотодетекторов [12-16].

Следует отметить, что в последние годы особо актуальной становится проблема создания гетероструктурных лазеров, сенсоров, различных датчиков и т.п., работающих в инфракрасном частотном диапазоне [17]. В частности, создание и широкое внедрение гетероструктурных лазеров ближнего инфракрасного диапазона инициирует целый класс оптико-физических задач, в

которых центральную роль будут играть квантовые переходы между близко расположенными уровнями [18]. Одним из наиболее перспективных кандидатов в качестве элементной базы для приборов инфракрасного диапазона является соединение InSb. Наряду с узкой запрещенной зоной ($E_a = 0.13$ эВ), особенностью этого соединения является сложная структура валентной зоны, состоящей из зон легких и тяжелых дырок, а также зоны спин-орбитального взаимодействия [19]. При этом, если зона тяжелых дырок описывается квадратичной зависимостью энергии от импульса, то в случае легких дырок и электронов закон дисперсии по форме совпадает с релятивистским, где роль скорости света играет параметр межзонного взаимодействия $s \sim 10^8$ см Π с. Ясно, что поведение электронов и легких дырок в InSb нужно рассматривать в рамках уравнения Клейна-Гордона [20,21]. Это приводит к существенно новым результатам и эффектам [22]. В силу сказанного ясно, что представляет интерес теоретическое исследование поведения носителей заряда в узкозонных квантованных пленках при наличии внешнего электрического поля, с целью нахождения нужных решений задачи именно в аналитическом виде.

В настоящей работе для определенного интервала значений внешнего поля рассмотрен энергетический спектр носителей заряда в узкозонной пленке и получены выражения для спектра и волновых функций электрона, а также тяжелой и легкой дырок в аналитическом виде.

2. Одночастичные состояния в пленке InSb в присутствии внешнего поля

Валентная зона InSb распадается на подзоны тяжелых ($\mu_{hh} = 0.5m_0, m_0 -$ масса свободного электрона) и легких ($\mu_{lh} \equiv \mu_c = 0.018 m_0$) дырок. В пренебрежении зоной спин-орбитального взаимодействия для тяжелых дырок (*hh*) закон дисперсии является квадратичным:

$$E_{hh}\left(\mathbf{p}\right) = \mathbf{p}^2 / 2\mu_{hh} \,, \tag{1}$$

а для легких дырок (*lh*) и электронов зоны проводимости (*c*) закон дисперсии задается следующим выражением [19]:

$$E_{c}(\mathbf{p},s) = E_{lh}(\mathbf{p},s) = \sqrt{\mathbf{p}^{2}s^{2} + \mu_{c}^{2}s^{4}}; \ \left(\mathbf{p} = \mathbf{p}(p_{x},p_{y},p_{z})\right).$$
(2)

При аппроксимации пленки в направлении квантования (z) бесконечно глубокой потенциальной ямой [22], для полной энергии и огибающих волновых функций носителей заряда получаем, соответственно [21]:

а) тяжелые дырки:

$$E_{n}^{hh}(\mathbf{p}) = \varepsilon_{v1}n^{2} + \frac{p^{2}}{2\mu_{hh}}; \left(\varepsilon_{v1} = \frac{\pi^{2}\hbar^{2}}{2\mu_{hh}L^{2}}\right);$$

$$\psi_{hh}^{(0)}(z) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\pi nz}{L}\frac{e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{p})}}{\sqrt{XY}}, (n = 1, 2, 3, ...),$$
(3)

b) легкие дырки:

$$E_{n}^{lh}(\mathbf{p}) = E_{n}^{c}(\mathbf{p}) = \left(\mu_{c}^{2}s^{4} + 2\mu_{c}s^{2}\varepsilon_{c1}m^{2} + \mathbf{p}^{2}s^{2}\right)^{1/2}; \quad \left(\varepsilon_{c1} = \frac{\pi^{2}\hbar^{2}}{2\mu_{c}L^{2}}\right);$$

$$\psi_{lh}^{(0)}(z) = \psi_{c}^{(0)}(z) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\pi mz}{L}\frac{e^{(i/\hbar)(\mathbf{p}\cdot\mathbf{p})}}{\sqrt{XY}}; \quad (m = 1, 2, 3, ...).$$
(4)

Здесь $\rho = \rho(x, y, 0)$ и $\mathbf{p} = \mathbf{p}(p_x, p_y, 0)$ – соответственно, двумерные радиус-вектор и квазиимпульс частицы в плоскости пленки, XY – нормировочная площадь образца. Ясно, что вследствие большого различия между массами носителей заряда, существенно будет отличаться друг от друга также и степень воздействия внешнего поля на состояния различных носителей.

Для сравнения отметим, что в случае тяжелых дырок при толщине слоя L = 10 нм $E_1^{hh}(p=0) = 8.972$ мэВ, $E_2^{hh}(p=0) = 35.888$ мэВ, а для легких дырок и электронов при том же значении $L E_1^{lh}(p=0) = 226$ мэВ, $E_1^{lh}(p=0) = 424$ мэВ.

Перейдем теперь к рассмотрению состояний носителей заряда в пленке в присутствии внешнего однородного электростатического поля. Направляя поле **F** вдоль оси квантования пленки (0, z), **F** = **F**(0, 0, F), для потенциальной энергии частицы U(z) получим

$$U(z,F) = \begin{cases} \infty; & z \le 0, \ z \ge L, \\ eFz; & 0 \le z \le L, \end{cases}$$
(5)

где eF – сила, действующая со стороны поля на частицу с зарядом e. Толщину пленки L предполагаем много меньшей боровского радиуса объемного экситона $a_B = 53$ нм в InSb: $L \square a_B$. Таким образом, кулоновским взаимодействием между электроном и дыркой в данном случае можно пренебречь. Рассмотрим, во-первых, действие поля на состояния тяжелых дырок.

2.1. Состояния тяжелых дырок во внешнем электрическом поле

Уравнение Шредингера для движения тяжелой дырки в электрическом поле в случае закона дисперсии (1) запишется в следующем виде:

$$-\frac{\hbar^{2}}{2\mu_{hh}}\frac{d^{2}}{dz^{2}}\psi_{hh}(z) - |e|Fz\psi_{hh}(z) = E^{hh}\psi_{hh}(z);$$

$$\psi_{hh}(z=0) = \psi_{hh}(z=L) = 0,$$
(6)

где E^{hh} – энергия частицы вдоль оси квантования. Обратим здесь внимание на следующее обстоятельство: когда на прямоугольную потенциальную яму налагается внешнее однородное поле U(z,F), то при сравнительно слабых полях все уровни E_1, E_2, E_3, \dots будут лежать выше максимального значения потенциальной энергии $U_{\max}(z,F)$. Однако с увеличением напряженности поля

энергия частицы, возрастая, достигает максимального значения потенциальной энергии, а при дальнейшем увеличении поля один, два, три и т.д. уровней оказываются уже ниже значения $U_{\max}(z,F)$, т.е. в треугольной части ямы (см. рис.1а-с). Рассмотрим подробнее каждый из указанных случаев.



Рис.1. Положение уровней в квантовой яме в зависимости от величины внешнего поля.

2.1.1. Состояния с *E* > *U*_{max} (рис.1a)

В уравнении (6) удобно перейти к новой переменной $\zeta = L - z$. Вводя обозначения (далее, во всех промежуточных выкладках, вплоть до окончательных результатов раздела, индексы *hh* опускаем) $\lambda^2 = -2\mu E'/\hbar^2$, $\beta = 2\mu |eF|/\hbar^2$, E' = E + |eF|L, перепишем его в виде

$$d^{2}\psi(\zeta)/d\zeta^{2} - \left[\lambda^{2} + g(\zeta)\right]\psi(\zeta) = 0; \quad \psi(\zeta = 0) = \psi(\zeta = L) = 0; \quad g(\zeta) = \beta\zeta.$$
(7)

С помощью подстановки

$$\Psi(\zeta) = \operatorname{const} \exp\left[\lambda \int u(\zeta) d\zeta\right] \tag{8}$$

уравнение (7) приводится к уравнению типа Риккати [23]:

$$\lambda du(\zeta)/d\zeta + \lambda^2 u^2(\zeta) - \lambda^2 - g(\zeta) = 0.$$
⁽⁹⁾

Решение этого уравнения приведено в Приложении 1.

Для энергии и огибающих волновых функций тяжелой дырки в присутствии электрического поля, удовлетворяющего условию E' > FL, получаем следующие выражения [23,24]:

$$E_n^{hh}(F) = \alpha_n \varepsilon_{\nu 1} - |eF|L, \quad \alpha_n = E'/\varepsilon_{\nu 1}, \quad (10)$$

$$\psi_n(\eta,\alpha_n,t) = \sqrt{\frac{2}{L}} C_n \sin\left\{\frac{\pi \alpha_n^{3/2}}{\eta} \left[1 - (1 - \frac{\eta}{2\alpha_n} + \frac{\eta t}{2\alpha_n})^2\right]\right\} \left(1 - \frac{\eta}{2\alpha_n} + \frac{\eta t}{2\alpha_n}\right)^{-1/2}, \quad (11)$$
$$(t = z/L; \eta = FL/\varepsilon_{v1}).$$

Здесь *С_n* – безразмерный нормировочный коэффициент (см.(П.1.10)).

2.1.2. Состояния *E* < *U*_{max} (рис.1b,c).

При увеличении внешнего поля частица будет "захвачена" ямой, создаваемой непосредственно самим полем. В схеме энергетической шкалы это соответствует такой ситуации, когда некоторое число энергетических уровней будет располагаться ниже значения $U_{\max}(z, F)$. Рассмотрим эти состояния для случая сильных внешних полей. В данной задаче количественным критерием сильного поля является условие

$$\eta = \frac{|eF|L}{\varepsilon_{vl}} \square 1.$$
(12)

В этих состояниях частица практически уже не "чувствует" наличия второй стенки (z = L) первоначальной ямы и положение уровней при $E_n(F) < |F|L$ будет определяться напряженностью внешнего поля.

При рассмотрении квантовых размерных эффектов, как известно, реальный физический интерес представляют именно низшие энергетические состояния [22]. В данном случае, при выполнении условия (12) воспользуемся вариационным методом и определим значения энергии и огибающие волновые функции для основного и первого возбужденного состояний тяжелых дырок в пленке.

а) Сильные поля: основное состояние (рис.1b).

Пробную функцию представим в виде

$$\psi_1(\zeta) = B\zeta \exp\left(-\frac{\tau\zeta^2}{2}\right),\tag{13}$$

где *В* – нормировочная константа, τ – вариационный параметр. Для энергии и волновой функции основного состояния получим

$$E_{1}^{hh}(\tau_{0}) \cong 2.345 \left(\frac{\hbar^{2} F^{2}}{2\mu_{hh}}\right)^{1/3} - |eF|L, \quad \left(\tau_{0} = \sqrt[3]{\frac{16\mu_{hh}^{2} F^{2}}{9\pi\hbar^{4}}}\right), \tag{14}$$

$$\psi_1(\zeta) = 2\left(\frac{\tau_0^3}{\pi}\right)^{1/4} \zeta \exp\left(-\frac{\tau_0\zeta^2}{2}\right).$$
(15)

b) Сильные поля: первое возбужденное состояние (рис.1с).

Для этого случая пробную функцию выбираем в виде

$$\psi_2(\zeta) = D\zeta (1 - \chi \zeta^2) \exp(-\gamma \tau_0 \zeta^2/2), \qquad (16)$$

где D – нормировочная постоянная, χ , γ – вариационные параметры. Требование ортогональности функций $\psi_1(\zeta)$ и $\psi_2(\zeta)$ приводит к следующему соотношению между вариационными параметрами:

$$\chi = (\tau_0/3)(1+\gamma). \tag{17}$$

Проведя теперь стандартные для вариационного подхода вычисления, для энергии и огибающей волновой функции первого возбужденного уровня, соответственно, получим

1/2

$$E_{2}^{hh} \cong 4.109 \left(\frac{F^{2}\hbar^{2}}{2\mu_{hh}}\right)^{1/3} - |eF|L,$$

$$\psi_{2}(\zeta) = D\zeta \left(1 - \chi_{0}\zeta^{2}\right) \exp\left(-\gamma_{0}\frac{\tau_{0}\zeta^{2}}{2}\right),$$
(18)

$$\chi_0 = \frac{\tau_0}{3} (1 + \gamma_0), \quad D^2 = \frac{48\gamma_0^{7/2}\tau_0^{3/2}}{\sqrt{\pi} (5\gamma_0^2 - 2\gamma_0 + 5)}, \quad \gamma_0 \cong 0.814.$$
(19)

2.2. Состояния легких дырок и электронов во внешнем электрическом поле

С учетом выражений (2) и (5) для гамильтониана электрона и легкой дырки в пленке при наличии внешнего поля имеем

$$H_{c}(\mathbf{p},s,F) = H_{lh}(\mathbf{p},s,F) = \sqrt{\mathbf{p}^{2}s^{2} + \mu_{c}^{2}s^{4}} + eFz.$$
 (20)

После ряда преобразований для описания этих состояний придем к уравнению шредингеровского типа:

$$-\frac{\hbar^{2}}{2\mu_{c}}\Delta\Psi_{c}(x,y,z) = \frac{\left(E_{c}-eFz\right)^{2}-\mu_{c}^{2}s^{4}}{2\mu_{c}s^{2}}\Psi_{c}(x,y,z),$$
(21)

где $E^{c} \equiv E^{c}(F) = E^{lh}(F)$ – полная энергия частицы в пленке в присутствии внешнего поля.

К определению энергетического спектра и огибающих собственных функций этого уравнения мы обратимся в следующем разделе.

3. Обсуждение результатов

3.1. Состояния тяжелых дырок

Известно, что решение уравнения (6) в самом общем случае [8,9] задается в виде линейной комбинации функций Эйри первого рода $\operatorname{Ai}(-\xi)$ и второго рода $\operatorname{Bi}(-\xi)$:

$$\psi(\xi) = C_1 \operatorname{Ai}(-\xi) + C_2 \operatorname{Bi}(-\xi); \quad \xi = \left(z + \frac{E}{eF}\right) \left(\frac{2\mu eF}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$
 (22)

С учетом граничных условий энергетический спектр носителей заряда в пленке будет определяться при этом из соотношения

$$\operatorname{Ai}(-\xi_0)/\operatorname{Bi}(-\xi_0) = \operatorname{Ai}(-\xi_L)/\operatorname{Bi}(-\xi_L), \qquad (23)$$

где ξ_0 и ξ_L – значения переменной ξ при z = 0 и z = L, соответственно.

Однако, как энергетический спектр носителей, так и их волновые функции в этом случае поддаются определению только с помощью численных методов. Исключение составляет только случай слабых полей, когда применима теория возмущений [8]. Предлагаемый же в данной работе подход, как было показано выше, позволяет получить явные выражения для спектра и огибающих функций одночастичных состояний для тяжелых дырок в определенном, довольно широком, интервале значений внешнего поля. В табл.П2.1, П2.2, П2.3 приведены значения энергетического параметра тяжелых дырок $\alpha_n \equiv \alpha_{vn}$ для E' > |eF|L, рассчитанных состояний, когда численным способом ИЗ соотношения (23) с использованием аналитического выражения (П.1.8). Как видно из приведенных в таблицах данных, результаты, полученные аналитическим путем, с точностью до 10² и более совпадают с результатами, полученными путем численного решения уравнения (23).

На рис.2 приведены графики плотности вероятностей, определяемых посредством огибающих функций (11), при различных значениях напряженности внешнего поля.



Рис.2. Распределение плотности вероятностей $y_1(\eta, \alpha_1, t) = (L/2) \times |\psi_1(\eta, \alpha_1, t)|^2$ (t = z/L) для основного состояния тяжелых дырок при различных значениях параметра $\eta \equiv \eta_{bb}$.

Обратимся теперь к случаю, когда часть энергетических уровней частицы оказывается ниже значения $U_{\max}(z,F)$, т.е. в треугольной части потенциальной ямы (5). Когда внешнее поле возрастает от η_{01} до η_{02} , то ниже значения $U_{\max}(z,F)$ будет находиться один уровень (E_1^{hh}) , а когда поле возрастает в интервале $\eta_{02} < \eta < \eta_{03}$, то в треугольной части ямы будут находиться уже два уровня $(E_1^{hh}$ и $E_2^{hh})$.

В табл.П2.4, П2.5 приведены значения первых двух уровней тяжелых дырок для интервалов полей, удовлетворяющих условию (12), рассчитанных численно из соотношения (23) и вариационным методом из соотношений (14) и (18). Данные этих таблиц также указывают на достаточную близость (с точностью до 10⁻¹ и более) результатов, полученных при помощи численного и аналитического подхода к задаче. На рис.3,4 приведены плотности вероятностей, определяемых, соответственно, огибающими функциями (15) и (19) при различных значениях напряженности внешнего поля.



Рис.3. Распределение плотности вероятностей $u_1(\eta_{hh}, t) = (L/2) |\psi_1(t)|^2$, $(t = \zeta/L = 1 - z/L)$ при различных значениях параметра $\eta \equiv \eta_{hh}$.



Рис.4. Распределение плотности вероятностей $u_2(\eta_{hh}, t) = (L/2)|\psi_2(t)|^2$, $(t = \zeta/L = 1 - z/L)$ при различных значениях параметра $\eta \equiv \eta_{hh}$.

3.2. Состояния легких дырок и электронов

В приведенных выше расчетах состояний тяжелых дырок в присутствии внешнего поля в качестве верхнего предела для параметра $\eta_{\nu} = \eta_{hh} = |eF|L/\varepsilon_{\nu 1} = = |eF|L/\varepsilon_{hh1}$ было выбрано значение $\eta_{hh} \sim 20$, $|eF|L \in [0, 20\varepsilon_{\nu 1}]$.

В интервале изменения толщины пленки от 7 до 20 нм допустимый для применения предложенного подхода верхний предел напряженности будет меняться, соответственно, в интервале от 500 до 20 кВПсм. Из приведенных

выше численных параметров для InSb нетрудно вычислить, что в случае легких дырок и электронов, в том же интервале изменения толщины пленки, максимум потенциальной энергии будет меняться в следующих пределах:

$$|eF|L \sim (0.04 \div 0.02) E_1^{lh} (p=0).$$
 (24)

Это условие указывает, что в рассматриваемом интервале полей для определения состояний легких носителей, т.е. для решения уравнения (20) можно воспользоваться теорией возмущений. Действительно, с учетом выражений (4) и (20) в качестве точного количественного критерия применимости теории возмущений в данном случае получаем следующее условие:

$$|V_{21}| = \frac{16}{9\pi^2} |eF| L \square E_2^{lh} - E_1^{lh}; |eF| L \square 11 (E_2^{lh} - E_1^{lh}), \qquad (25)$$

где V_{21} – матричный элемент возмущения V(z) = eFz, построенный на невозмущенных волновых функциях (4).

Из условий (24) и (25) можно сделать два следующих заключения: а) в рассматриваемом интервале значений действие внешнего поля на состояния легких дырок и электронов с большой точностью можно рассматривать как возмущение; б) учитывая расположение уровней в невозмущенной яме, в данном случае реальный смысл имеет рассмотрение возмущающего действия поля только на основное состояние легких носителей в пленке.

Пользуясь известными методами теории возмущений [25], для возмущенных частей энергии и огибающей волновой функции первого уровня размерного квантования легких дырок и электронов получим

$$\left|\Delta E_{1}^{lh}(F)\right| = \left|\Delta E_{1}^{c}(F)\right| = \frac{\left|eF\right|L}{2} + \frac{256}{81\pi^{4}} \frac{\left(eFL\right)^{2}}{\Delta_{12}^{c}},$$
(26)

$$\left| \Psi_{lh}^{(1)}(z) \right|_{n=1} = \left| \Psi_{c}^{(1)}(z) \right|_{n=1} = \eta_{hh} \frac{32}{9\pi^{2}} \frac{\varepsilon_{\nu 1}}{\left| \Delta_{12}^{c} \right|} \sin \frac{\pi z}{L} \cos \frac{\pi z}{L},$$
(27)

где $\Delta_{12}^c = E_1^c - E_2^c$ — разность между энергиями основного и первого возбужденного состояний легкой дырки (или электрона). Поправка к волновой функции имеет положительный знак в случае электронов (*c*) и отрицательный знак в случае легких дырок (*lh*). На рис.5,6 приведены распределения вероятностей основного состояния электронов и легких дырок, определяемых возмущенными огибающими функциями

$$\Psi_{lh,c}(z)\Big|_{n=1} = \Psi_{lh,c}^{(0)}\Big|_{n=1} + \Psi_{lh,c}^{(1)}\Big|_{n=1} \cong \sqrt{\frac{2}{L}} \left(1 \pm \eta_{hh} \frac{32}{9\pi^2} \frac{\varepsilon_{v1}}{\left|\Delta_{12}^c\right|} \cos\frac{\pi z}{L}\right) \sin\frac{\pi z}{L}, \quad (28)$$

при различных значениях внешнего поля. Из рисунков видно, что с ростом электрического поля пики кривых для электрона и дырки смещаются в противоположные стороны.



Рис.5. Распределение плотности вероятностей $g_1(t) = (L/2) \times \times \left[1 + \eta_{hh} \left(32/9\pi^2\right) \left(\epsilon_{\nu_1} / |\Delta_{12}^c|\right) \cos \pi t\right]^2 (\sin \pi t)^2$ для различных значений параметра $\eta \equiv \eta_{hh}$ при толщине пленки L = 15 нм; (t = z/L).



Рис.6. Распределение плотности вероятностей $g_2(t) = (L/2) \times \times \left[1 - \eta_{hh} \left(\frac{32}{9\pi^2}\right) \left(\epsilon_{v1} / \left|\Delta_{12}^c\right|\right) \cos \pi t\right]^2 \left(\sin \pi t\right)^2$ для различных значений параметра $\eta \equiv \eta_{hh}$ при толщине пленки L = 15 нм; (t = z/L).

4. Заключение

Основные результаты, полученные в работе, можно сформулировать следующим образом:

1) Состояния тяжелых дырок в квантовой яме узкозонного полупроводника физически адекватно описываются в рамках предложенной

теоретической модели в довольно широком интервале изменений электрического поля;

 Допустимый верхний предел применимости предложенного подхода определяется шириной квантовой ямы (толщиной пленки);

3) В том же интервале изменений внешнего поля состояния легких носителей (электронов в зоне проводимости и легких дырок в валентной зоне) с большой точностью могут быть описаны методом теории возмущений;

4) Полученные в работе теоретические результаты могут быть использованы для точного количественного описания кинетических, оптических и ряда других явлений в узкозонных размерно-квантованных структурах при наличии однородного электростатического поля.

Приложение 1.

Определение собственных функций и собственных значений уравнения (10)

Подставим ряд $u(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\zeta) \lambda^{-k}$ в уравнение (9). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной, для первых трех значений $u_k(\zeta)$ получим

$$u_0 = \pm 1; \quad u_1 = du_0/d\zeta = 0; \quad u_2 = \left(g(\zeta) - u_1' - u_1^2\right)/2u_0 = \beta\zeta/2u_0. \quad (\Pi.1.1)$$

Для вычисления остальных членов ряда с $k \ge 2$ воспользуемся следующим рекуррентным соотношением [23]:

$$u_{k+1} = -\frac{1}{2u_0} \left[u_k' + \sum_{p=1}^k u_p u_{k+1-p} \right]. \tag{\Pi.1.2}$$

Перейдя теперь к безразмерным энергетическим параметрам

$$\begin{split} \eta_{hh} &= \eta_{\nu} = \eta = \left| eF \right| L / \varepsilon_{\nu 1}, \left(\beta = \eta_{\nu} \pi^2 / L^3 \right); \quad \alpha_{\nu} = \alpha = E' / \varepsilon_{\nu 1}, \left(\lambda^2 = -\alpha_{\nu} \pi^2 / L^2 \right); \\ \varepsilon_{\nu 1} &= \pi^2 \hbar^2 / 2\mu_{hh} L^2; \quad \alpha_{\nu} > 1 \end{split}$$

и проведя в (8) интегрирование, нетрудно видеть, что получающаяся последовательность

$$\begin{split} f\left(\zeta\right) &= \lambda \int u(\zeta) d\zeta = \lambda \zeta + \frac{\beta \zeta^2}{4\lambda} - \frac{\beta \zeta}{4\lambda^2} - \frac{\beta^2 \zeta^3}{24\lambda^3} + \frac{\beta^2 \zeta^2}{8\lambda^4} + \\ &+ \left(\frac{\beta^3 \zeta^4}{64} - \frac{5\beta^2 \zeta}{32}\right) \frac{1}{\lambda^5} - \frac{\beta^3 \zeta^3}{12\lambda^6} + \dots \cong i\pi \sqrt{\alpha} \left[\left(1 + \frac{5\eta^2}{32\pi^2 \alpha^3}\right) t - \\ &- \left(\frac{\eta}{4\alpha} - \frac{25\eta^3}{128\pi^2 \alpha^4}\right) t^2 - \frac{\eta^2 t^3}{24\alpha^2} - \left(\frac{\eta^3}{64\alpha^3} - \frac{175\eta^4}{768\pi^2 \alpha^5}\right) t^4 - \frac{5\eta^4 t^5}{640\alpha^4} \right] + \\ &+ \left[\frac{\eta}{4\alpha} \left(1 - \frac{15\eta^2}{16\pi^2 \alpha^3}\right) t + \frac{\eta^2 t^2}{8\alpha^2} + \frac{\eta^3 t^3}{12\alpha^3} + \frac{\eta^4 t^4}{16\alpha^4} \right] = f\left(t\right) \equiv if_1\left(t\right) + f_2\left(t\right); \\ \left(t = \zeta/L \le 1\right), \end{split}$$

будет сходиться только в том случае, если выполняется условие

$$\eta/\alpha = |eF|L/E' < 1. \tag{\Pi.1.4}$$

Решение (8) можно представить теперь в виде следующей линейной комбинации:

$$\psi(t) = C_1 \exp\left[f_2(t)\right] \cos\left[f_1(t)\right] + C_2 \exp\left[f_2(t)\right] \sin\left[f_1(t)\right],$$

$$\psi(t=0) = \psi(t=1) = 0.$$
(II.1.5)

Граничные условия (7) и (П.1.5) приводят к следующим требованиям:

$$f_1(t=0) = f_1(t=1) = \pi n.$$
(II.1.6)

Пренебрегая членами высокого порядка малости, для определения энергетического спектра частицы в присутствии поля из выражений (П.1.3), (П.1.6) приходим к следующему уравнению относительно а :

$$\alpha^{3} - \left(\eta + n^{2}\right)\alpha^{2} + \left(\frac{n^{2}\eta}{2} + \frac{7\eta^{2}}{24}\right)\alpha - \frac{\eta^{2}}{16}\left(n^{2} + \frac{\eta}{2} - \frac{5}{\pi^{2}}\right) = 0, \ \left(n = 1, 2, 3, ...\right). \quad (\Pi.1.7)$$

Физический корень этого кубического уравнения [24] имеет следующий вид:

$$\alpha_{n} = \frac{n^{2} + \eta}{3} \left[1 + 2\sqrt{1 - \frac{12\eta n^{2} + 7\eta^{2}}{8(n^{2} + \eta)^{2}} \cos\frac{\varphi(n, \eta)}{3}} \right],$$

$$\varphi(n, \eta) = \arccos\left\{ \frac{2\left(\frac{\eta + n^{2}}{3}\right)^{3} - \frac{\eta + n^{2}}{3}\left(\frac{\eta n^{2}}{2} + \frac{7\eta^{2}}{24}\right) + \frac{\eta^{2}}{16}\left(n^{2} + \frac{\eta}{2} - \frac{5}{\pi^{2}}\right)}{2\left[\frac{(\eta + n^{2})^{2}}{9} - \frac{\eta}{6}\left(n^{2} + \frac{7\eta}{12}\right)\right]^{3/2}} \right\}.$$
(II.1.8)

В том же приближении для волновой функции (8) получим

$$\Psi(t,\eta,\alpha) \cong C \sin\left\{\pi \frac{\alpha^{3/2}}{\eta} \left[1 - \left(1 - \frac{\eta t}{2\alpha}\right)^2\right]\right\} \left(1 - \frac{\eta t}{2\alpha}\right)^{-1/2}.$$
 (II.1.9)

Нормировочная постоянная C (вернее, $C\sqrt{L/2}$) также вычисляется точно и в явном виде:

$$\frac{L}{2}C^{2} \equiv B^{2} = \frac{\eta}{\alpha} \left\{ \cos\left(\frac{2\pi\alpha^{\frac{3}{2}}}{\eta}\right) \operatorname{ci}\left[\frac{2\pi\alpha^{\frac{3}{2}}}{\eta}\left(1-\frac{\eta}{2\alpha}\right)^{2}\right] - \cos\left(\frac{2\pi\alpha^{\frac{3}{2}}}{\eta}\right) \operatorname{ci}\left[\frac{2\pi\alpha^{\frac{3}{2}}}{\eta}\right] + \sin\left(\frac{2\pi\alpha^{\frac{3}{2}}}{\eta}\right) \operatorname{si}\left[\frac{2\pi\alpha^{\frac{3}{2}}}{\eta}\left(1-\frac{\eta}{2\alpha}\right)^{2}\right] - \sin\left(\frac{2\pi\alpha^{\frac{3}{2}}}{\eta}\right) \operatorname{si}\left[\frac{2\pi\alpha^{\frac{3}{2}}}{\eta}\right] - 2\ln\left(1-\frac{\eta}{2\alpha}\right)^{-1}, \quad (\Pi.1.10)$$

где ci(x) и si(x) – интегральные косинус и синус, соответственно.

Приложение 2.

Сравнение результатов численных и аналитических расчетов для энергетического спектра носителей заряда в пленке

Приведем для сравнения результаты численных (23) и аналитических (П.1.8) расчетов значений энергетического параметра α_n для состояний, когда E' > |eF|L.

Табл.П2.1. Значения энергетического параметра α_n в интервале значений поля $\eta \in [0, \eta_{01}], \eta_{01} = 1.92067$ при n = 1, 2, 3 (тяжелые дырки).

/	n		0.1	0.3	0.5	0.9	1.4	1.8
n	1,	чсл	1.049891	1.149025	1.247294	1.441242	1.678855	1.865133
	1	анл	1.049906	1.149102	1.247801	1.445313	1.689611	1.876104
n	2,	чсл	4.050032	4.1502904	4.250806	4.452602	4.706251	4.9102496
	2	анл	4.050033	4.150297	4.250895	4.452769	4.706856	4.911502
n	3,	чсл	9.050019	9.150173	9.250481	9.451558	9.703768	9.906226
	3	анл	9.050019	9.150174	9.250484	9.451572	9.703719	9.906331

Здесь и далее: чсл - результаты численных расчетов, анл - результаты аналитических расчетов.

Табл.П2.2. Значения энергетического параметра α_n в интервале значений поля $\eta \in [\eta_{01}, \eta_{02}], \quad \eta_{02} = 8.297$ при n = 2, 3, 4 (тяжелые дырки).

n			2	3	4	5	6	7
п	2,	чсл	5.012593	5.527461	6.046764	6.569221	7.093443	7.618051
	2	анл	5.014290	5.532892	6.059118	6.592564	7.132683	7.662713
п	3,	чсл	10.007685	10.517261	11.060308	11.547664	12.068344	12.592539

	3	анл	10.007825	10.517683	11.062146	11.549245	12.070817	12.612217
п	4,	чсл	17.004713	17.510601	18.018847	18.529442	19.042385	19.557671
	4	анл	17.01422	17.53101	18.0535	18.5810	19.1132	19.6495

Табл.П2.3. Значения энергетического параметра α_n в интервале значений поля $\eta \in [\eta_{02}, \eta_{03}], \eta_{03} = 19.172$, при n = 3, 4, 5 (тяжелые дырки).

n			9	10	12	15	17	19
п	3,	чсл	13.650889	14.184679	15.260339	16.889739	17.982763	19.077859
	3	анл	13.657399	14.193103	15.273897	16.916327	18.043489	19.139965
n	4,	чсл	20.595242	21.117511	22.168978	23.763064	24.836791	25.918927
	4	анл	20.595645	21.117791	22.168591	23.760362	25.837021	26.909691
n	5,	чсл	29.563427	30.078313	31.112795	32.676303	33.726501	34.782977
	5	анл	29.563435	30.078228	31.112334	32.674555	34.729099	34.777409

Значения η_{0i} определяются как корни уравнения (23), когда имеет место условие FL = E'.

Приведем аналогичные данные для случая "сильных" полей (Табл.П2.4, П2.5).

Табл.П2.4. Значения первого энергетического уровня тяжелых дырок для интервала полей $\eta_{01} < \eta < \eta_{02}$ с учетом условия (12).

E_1^{hh} η		4	4.5	5	6	7	8
\mathbf{F}^{hh}	чсл	1.1682	1.4613	1.7588	2.3661	2.9887	3.6251
\boldsymbol{L}_1	врц	1.2233	1.4966	1.7781	2.3617	2.9768	3.5926

Табл.П2.5. Значения первого и второго энергетических уровней тяжелых дырок для интервала полей $\eta_{02} < \eta < \eta_{03}$ с учетом условия (12).

E_n^{hh}	n	12	13	15	16	17	18
n 1	чсл	6.2837	6.9715	8.3693	9.0781	97929	10.5131
E_1^{hh}	врц	6.2647	6.9503	8.3448	9.0523	97658	10.4848
$n 2 E_2^{hh}$	чсл	1.7936	2.2888	3.2961	3.8009	4.3275	4.8525
	врц	1.8804	2.3258	3.2574	3.7412	4.2573	4.7629

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ж.И.Алферов.** ФТП, **32**, 3 (1998).

- 2. Нано- и микросистемная техника. От исследований к разработкам. Сб. статей под ред. **П.П.Мальцева**. М., Техносфера, 2005.
- 3. Г.Г.Шишкин, И.М.Агеев. Наноэлектроника. Элементы, приборы, устройства. М., Бином. Лаборатория знаний, 2011.
- 4. Devices Based on Low-Dimensional Semiconductor Structures, NATO Science Partnership Sub-Series: 3; 14, 1996.
- 5. N.M.Ahmed, Z.Sauli, et al. Int. J. Nanoelectronics Mater., 2, 189 (2009).
- 6. Low-Dimensional Semiconductor Structures: Fundamentals and Device Applications. **K.Barnham. D.Vvedensky, ed.,** Cambridge University Press, 2008.
- S.A.Vanalakar, S.S.Mali, M.P.Suryavanshi, P.S.Patil. Digest J. Nanomaterials Biostructures, 5, 805 (2010).
- 8. S.Schmitt-Rink, D.S.Chemla, D.A.B.Miller. Adv. Phys., 38, 89 (1989).
- R.A.Rosas, R.Riera, J.L.Marin, G.Campoy. Electro-Optical and Transport Properties of Quasi-Two-Dimensional Nanostructured Materials, Handbook of Thin Film Materials, H.S.Nalwa, ed., vol. 5, Academic Press, San Diego, USA, 2002, pp.241–247.
- 10. Y.-H.Kuo, Y.K.Lee, Y.Ge, et al. Nature, 437, 1334 (2005).
- 11. M.Dhingra, A.Shankar, B.B.Tiwari. Indian J. Phys., 84, 1031 (2010).
- 12. **D.A.B.Miller.** Opt. Quant. Electron., **22**, S61 (1990).
- 13. M.Graf, G.Scalari, D.Hofstetter, et al. Appl. Phys. Lett., 84, 475 (2004).
- 14. I.Friel, C.Thomidis, T.D.Moustakas. J. Appl. Phys., 97, 123515 (2005).
- C.-K.Kao, A.Bhattachatyya, C.Thomidis, R.Paihella, T.D.Moustakas. J. Appl. Phys., 109, 083102 (2011).
- 16. P.Chaisakul, D.Marris-Morini, M.-S.Raufied, G.Isella, D.Chrastina, J.Frigero, X.L. Roux, S.Edmond, J.-R.Coudevylle, L.Vivien. Opt. Express, 20, 3219 (2012).
- 17. К.Д.Моисеев, Я.А.Пархоменко, А.В.Анкудинов, Е.В.Гущина, М.П.Михайлова, А.Н.Титков, Ю.П.Яковлев. Письма ЖТФ, **33** (7), 50 (2007).
- 18. К.Д.Моисеев, Я.А.Пархоменко, Е.В.Гущина, А.В.Анкудинов, М.П.Михайлова, Н.А.Берт, Ю.П.Яковлев. ФТП, 43, 1090 (2009)
- 19. И.М.Цидильковский. Электроны и дырки в полупроводниках. М., Наука 1972.
- 20. E.O.Kane. Semiconductors and Semimetals, R.K.Willardson, C.Beer., eds., New York-London, Academic Press, 1, p.75-80, 1966.
- 21. В.А.Арутюнян, Э.М.Казарян, А.А.Саркисян. Изв. НАН Армении, Физика, 46, 440 (2011).
- 22. Э.М.Казарян, С.Г.Петросян. Физичекие основы наноэлектроники. Ереван. изд. РАУ, 2005.
- 23. Э.Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Наука, 1970.
- 24. Г.Корн, Т.Корн. Справочник по математике. М., Наука, 1970.
- 25. **Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц.** Квантовая механика (нерелятивистская теория). М., Наука, 1963.

ԷԼԵԿՏՐՈՆԱՅԻՆ ԵՎ ԽՈՌՈՉԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿՆԵՐԸ InSb ՆԵՂԳՈՏԻԱԿԱՆ ԿԻՍԱՀԱՂՈՐԴՉԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՈՒՄ ԱՐՏԱՔԻՆ ՀԱՄԱՍԵՌ ԷԼԵԿՏՐԱՍՏԱՏԻԿ ԴԱՇՏԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ

Վ.Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Վ.Ա. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ, Է.Մ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Հ.Ա. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Տեսականորեն դիտարկված են լիցքակիրների վիձակները InSb նեղ արգելված գոտիական կիսահաղորդչային թաղանթում՝ տեղադրված համասեռ էլեկտրաստատիկ դաշտում։ Քննարկված է դեպք, երբ ծանր խոռոչների գոտին նկարագրվում է ստանդարտ դիսպերսիայով, իսկ թեթև խոռոչների և էլեկտրոնների համար տեղի ունի Քեյնի դիսպերսիան՝ երկգոտիական հայելային մոտավորությունը։ Արտաքին դաշտի որոշակի արժեքների միջակայքի համար ստացված են էներգիական սպեկտրի և թաղանթում լիցքակիրների ալիքային ֆունկցիաների բացահայտ արտահայտությունները։ Բերված են արտաքին դաշտի փոփոխության թույլատրելի միջակայքին համապատասխանող թվային արժեքները, որոնց համար քվանտային փոսի տրված պարամետրերի դեպքում առաջադրված մոտեցումը թույլ է տալիս խնդրի Ճշգրիտ վերլուծական լուծում։

ELECTRON AND HOLE STATES IN A NARROW-BAND SEMICONDUCTOR InSb FILM IN THE PRESENCE OF UNIFORM ELECTROSTATIC FIELD

V.A. HARUTYUNYAN, V.A. GASPARYAN, E.M. KAZARYAN, H.A. SARKISYAN

The states of charge carriers in InSb narrow-gap semiconductor film, placed in a uniform electrostatic field, are considered theoretically. We consider the case when the heavy holes are described by the standard dispersion, and Kane's dispersion law takes place for electrons and for light holes within the framework of two-band mirror model. For a certain range of values of the external field, explicit expressions of the energy spectrum and the envelope wave functions of charge carriers are obtained. Corresponding numerical estimations of allowed range of the external field are derived, for which the proposed approach allows exact analytical solutions.