

УДК 621.315

ПОТЕНЦИАЛ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА В ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ ГЕТЕРОСТРУКТУРЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

А.А. КИРАКОСЯН¹, Н.Г. МОВСИСЯН², Ш.Г. ГАСПАРЯН¹

¹Ереванский государственный университет, Армения

²Капанский филиал ГИУА, Армения

(Поступила в редакцию 3 августа 2012 г.)

Выведены общие выражения для потенциала точечного заряда в коаксиальной полупроводниковой гетероструктуре, состоящей из трех цилиндрических областей с различными значениями диэлектрических постоянных, при произвольном положении точечного заряда в гетероструктуре.

1. Введение

Развитие твердотельной микроэлектроники и переход к наноэлектронике связаны с использованием полупроводниковых и диэлектрических наноматериалов, в том числе квантоворазмерных систем – квантовых ям (КЯ), квантовых проволок (КП) и квантовых точек (КТ), а также с применением нанотехнологий, обладающих атомной точностью при получении наноструктур с заданным химическим составом и конфигурацией [1]. Свойства систем, состоящих из полупроводниковых и диэлектрических наноматериалов, названных нанокомпозитами, могут значительно отличаться от свойств как объемных материалов, так и отдельных частиц, формирующих композит, на основе которых создаются новые материалы с заданными структурами, электронными и оптическими свойствами, зависящими от размеров, формы и упорядоченности составляющих их наночастиц [2].

При исследовании различных физических характеристик таких неоднородных систем важное значение имеет знание электростатического потенциала точечного заряда или системы зарядов в рассматриваемой гетероструктуре. Ввиду различных значений диэлектрических постоянных (ДП) компонент гетероструктуры, электростатическое поле в системе существенно меняется при переходе из одной области в другую. Это, в свою очередь, приводит к существенной зависимости параметров гетеросистемы от конкретных значений ДП, а также от формы и геометрических размеров составных частей гетеросистемы [3].

Учет влияния диэлектрической неоднородности на различные физические характеристики особенно важен в системах пониженной размерности,

представляющих собой, как правило, неоднородные полупроводниковые гетероструктуры [4]. Дело в том, что из-за эффекта локализации носителей заряда (НЗ), имеющего место в низкоразмерных структурах, взаимодействие между заряженными примесными центрами и НЗ в них может осуществляться как через среду нахождения НЗ, так и через окружение [5]. Если, например, ДП окружения меньше, чем ДП системы, то взаимодействие становится сильнее, чем в диэлектрически однородной системе [6,7].

Во многих работах, посвященных исследованию электронных состояний в квантовых гетероструктурах, пренебрегается влиянием различия ДП на характеристики системы (см. ссылки, приведенные в [8]).

В настоящее время имеются работы, в которых исследовано влияние диэлектрической неоднородности на примесные состояния [9-12], на подвижность носителей [13,14] и на экситонный спектр [15] в квантовых проволоках, а также на оптические свойства квантовых трубок [16]. Следует отметить, однако, что в большинстве работ, как правило, электронные характеристики диэлектрических неоднородных систем вычисляются или в предположении, что точечный заряд расположен на оси симметрии системы, или вариационным методом [11,17-20].

В данной работе выведены общие выражения для потенциала электростатического поля точечного заряда в коаксиальной полупроводниковой гетероструктуре, состоящей из бесконечного кругового цилиндра, покрытого цилиндрическим слоем, окруженным бесконечной средой, имеющими различные диэлектрические постоянные.

2. Теория

Вычислим электростатическое поле точечного заряда q в системе, состоящей из длинных коаксиальных цилиндрических областей с ДП ϵ_1 и ϵ_2 и с радиусами a и b , погруженных в бесконечную среду с ДП ϵ_3 . Ось z полярной системы координат направлена вдоль оси цилиндров, а полярная ось x – через начало координат и точку нахождения заряженного центра $(r_0, 0, 0)$ (рис.1).

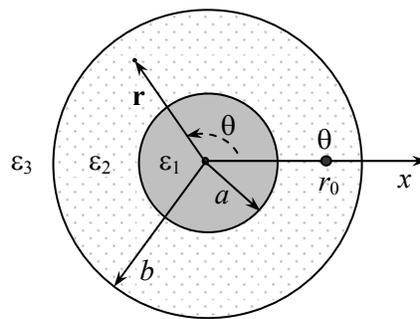


Рис. 1. Сечение системы в плоскости, перпендикулярной оси z .

Электростатический потенциал заряженного центра с радиус-вектором \mathbf{r}_0 и зарядом q в среде с ДП ϵ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\Phi = -(4\pi q/\varepsilon)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (1)$$

стандартным граничным условиям [21], а также условиям симметрии

$$\Phi(r, \theta, -z) = \Phi(r, \theta, z), \quad (2)$$

$$\Phi(r, 2\pi - \theta, z) = \Phi(r, \theta, z), \quad (3)$$

и периодичности

$$\Phi(r, \theta + 2\pi, z) = \Phi(r, \theta, z). \quad (4)$$

С учетом условий (2)–(4) решение уравнения (1) представим в виде разложения Фурье

$$\Phi(r, \theta, z) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk \cos kze^{im\theta} \varphi(k, m, r), \quad (5)$$

где неизвестными являются фурье-коэффициенты разложения $\varphi(k, m, r)$, k – волновое число, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Обозначим через Φ_{li} потенциал в i -той области, когда заряд находится в l -ой области, и рассмотрим три возможных случая его расположения в гетероструктуре.

1. Заряженный центр находится в цилиндре с ДП ε_1 ($l=1$): $0 \leq r_0 < a$ (I область). В этой области ($0 \leq r \leq a$) потенциал $\Phi_{11}(r, \theta, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Phi_{11} = -(4\pi q/\varepsilon_1 r_0)\delta(r - r_0)\delta(\theta)\delta(z), \quad (6)$$

а в областях II ($a \leq r \leq b$) и III ($b \leq r \leq \infty$) – уравнениям

$$\Delta\Phi_{li} = 0, \quad (i=2,3). \quad (7)$$

После подстановки выражения (5) в (6) и (7) и использования интегральных представлений функций $\delta(\theta)$ и $\delta(z)$, для фурье-коэффициентов φ_{li} в трех областях получим уравнения

$$\frac{d^2\varphi_{11}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi_{11}}{dr} - \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2}\right)\varphi_{11} = -\frac{4\pi q}{\varepsilon_1 r_0} \delta(r - r_0), \quad (8)$$

$$\frac{d^2\varphi_{li}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi_{li}}{dr} - \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2}\right)\varphi_{li} = 0 \quad (i=2,3). \quad (9)$$

Решение уравнения (8) в области $r < r_0$, с учетом конечности потенциала в точке $r = 0$, имеет вид

$$\varphi_{11} = A_{11} I_m(kr), \quad (10)$$

где $I_m(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка m [22], A_{11} – неизвестный коэффициент. В области $r_0 < r < a$

$$\tilde{\varphi}_{11} = A_{12}I_m(kr) + B_{12}K_m(kr), \quad (11)$$

где $K_m(x)$ – функция Макдональда [22]. Из условия непрерывности потенциала в точке $r = r_0$ следует, что

$$(A_{12} - A_{11})I_m(kr_0) + B_{12}K_m(kr_0) = 0. \quad (12)$$

Как следует из выражений (10), (11) и (8), разрыв первой производной $\varphi_{11}(r)$ в точке r_0 имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv \varphi'_{11}(r_0 + 0) - \varphi'_{11}(r_0 - 0) = \\ &= k \left[A_{12}I'_m(kr_0) + B_{12}K'_m(kr_0) - A_{11}I'_m(kr_0) \right] = -\frac{4\pi q}{\varepsilon_1 r_0}, \end{aligned} \quad (13)$$

где штрих означает производную по аргументу функции.

В области II ($a \leq r \leq b$) фурье-коэффициенты потенциала $\Phi_{12}(r, \theta, z)$ имеют вид

$$\varphi_{12} = A_{13}I_m(kr) + B_{13}K_m(kr), \quad (14)$$

а в области III ($b \leq r \leq \infty$), с учетом условия $\Phi_{13}(\infty) = 0$ имеем

$$\varphi_{13}(r) = B_{14}K_m(kr). \quad (15)$$

С учетом граничных условий, налагаемых на границе двух сред с различными ДП, для определения неизвестных коэффициентов A_{11} , A_{12} , A_{13} , B_{12} , B_{13} и B_{14} получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (A_{12} - A_{11})I'_m(kr_0) + B_{12}K'_m(kr_0) &= -4\pi q / \varepsilon_1 r_0 k, \\ (A_{12} - A_{11})I_m(kr_0) + B_{12}K_m(kr_0) &= 0, \\ A_{12}I_m(ka) + B_{12}K_m(ka) &= A_{13}I_m(ka) + B_{13}K_m(ka), \\ A_{13}I_m(kb) + B_{13}K_m(kb) &= B_{14}K_m(kb), \\ A_{12}I'_m(ka) + B_{12}K'_m(ka) &= [A_{13}I'_m(ka) + B_{13}K'_m(ka)](\varepsilon_2 / \varepsilon_1), \\ A_{13}I'_m(kb) + B_{13}K'_m(kb) &= B_{14}K'_m(kb)(\varepsilon_3 / \varepsilon_2). \end{aligned} \quad (16)$$

После простых, но довольно длинных вычислений для неизвестных коэффициентов получаем

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{4\pi q}{\varepsilon_1} \left[K_m(kr_0) + D_m^{(1)}(k)I_m(kr_0) \right], \quad A_{12} = \frac{4\pi q}{\varepsilon_1} D_m^{(1)}(k)I_m(kr_0), \\ A_{13} &= -f_m \frac{4\pi q}{\varepsilon_1} D_m^{(2)}(k)I_m(kr_0), \\ B_{12} &= \frac{4\pi q}{\varepsilon_1} I_m(kr_0), \quad B_{13} = \frac{4\pi q}{\varepsilon_1} D_m^{(2)}(k)I_m(kr_0), \quad B_{14} = \frac{4\pi q}{\varepsilon_1} D_m^{(3)}(k)I_m(kr_0), \end{aligned} \quad (17)$$

где использованы следующие обозначения:

$$D_m^{(1)}(k) = \frac{F_m K_m'(ka) - K_m(ka)}{I_m(ka) - F_m I_m'(ka)}, \quad (18)$$

$$D_m^{(2)}(k) = \frac{D_m^{(1)}(k) I_m(ka) + K_m(ka)}{K_m(ka) - f_m I_m(ka)}, \quad (19)$$

$$D_m^{(3)}(k) = D_m^{(2)}(k) \left[1 - f_m \frac{I_m(kb)}{K_m(kb)} \right], \quad (20)$$

$$F_m = F_m(k) = \gamma_{12} \frac{f_m I_m(ka) - K_m(ka)}{f_m I_m'(ka) - K_m'(ka)}, \quad (21)$$

$$f_m = f_m(k) = \frac{(\gamma_{23} - 1) kb K_m(kb) K_m'(kb)}{1 + (\gamma_{23} - 1) kb K_m(kb) I_m'(kb)}, \quad (22)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad \gamma_{23} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}. \quad (23)$$

Выражения (10)–(23) дают решения уравнений (6) и (7) в случае, когда заряженный центр находится в области $0 \leq r_0 < a$.

После подстановки решений уравнения (8) в разложение (5) и с учетом соотношения [22]

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} I_m(kr_0) K_m(kr) \equiv K_0(kR_0), \quad (24)$$

где $R_0 = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta}$ симметрично относительно перестановки $r_0 \leftrightarrow r$, для потенциала в области I получим

$$\Phi_{11}(r, \theta, z) = \frac{q}{\varepsilon_1 \sqrt{R_0^2 + z^2}} + \frac{2q}{\pi \varepsilon_1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} \int_0^{\infty} dk \cos kz D_m^{(1)}(k) I_m(kr) I_m(kr_0). \quad (25)$$

Аналогичным образом, для потенциалов в областях II и III получаем, соответственно,

$$\Phi_{12}(r, \theta, z) = \frac{2q}{\pi \varepsilon_1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} \int_0^{\infty} dk \cos kz D_m^{(2)}(k) [K_m(kr) - f_m I_m(kr)] I_m(kr_0), \quad (26)$$

$$\Phi_{13}(r, \theta, z) = \frac{2q}{\pi \varepsilon_1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} \int_0^{\infty} dk \cos kz D_m^{(3)}(k) K_m(kr) I_m(kr_0). \quad (27)$$

Таким образом, выражения (25)–(27) представляют решение задачи о потенциале точечного заряда в диэлектрически неоднородной коаксиальной гетероструктуре в случае, когда точечный заряд расположен в области I ($0 \leq r_0 \leq a$).

Рассмотрим теперь несколько частных случаев, представляющих физический интерес.

1. Диэлектрически однородная система: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$.

Согласно выражениям (13)–(23), в этом случае $\gamma_{12} = \gamma_{23} = 1$, $f_m = D_m^{(1)} = 0$, $D_m^{(2)} = D_m^{(3)} = 1$, $F_m = K_m(ka)/K'_m(ka)$, и, следовательно, для неизвестных коэффициентов имеем

$$A_{11} = \frac{4\pi q}{\varepsilon_1} K_m(kr_0), \quad A_{12} = A_{13} = 0, \quad B_{12} = B_{13} = B_{14} = \frac{4\pi q}{\varepsilon_1} I_m(kr_0). \quad (28)$$

Замечательно, что в (28) не фигурируют радиусы областей a и b . Из соотношений (28) следует, что, согласно (10) и (11), а также (14) и (15), имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= (4\pi q/\varepsilon_1) K_m(kr_0) I_m(kr), & 0 < r < r_0, \\ \tilde{\varphi}_{11} &= (4\pi q/\varepsilon_1) I_m(kr_0) K_m(kr), & r_0 < r < a, \\ \varphi_{12} = \varphi_{13} &= (4\pi q/\varepsilon_1) I_m(kr_0) K_m(kr), & r > a. \end{aligned} \quad (29)$$

После подстановки полученных выражений в формулу (5) получим, что во всех областях потенциал дается одним и тем же выражением:

$$\begin{aligned} \Phi_{1i}(r, \theta, z) &= \Phi_{2i}(r, \theta, z) = \Phi_{3i}(r, \theta, z) \equiv \Phi = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} \int_0^{\infty} dk \cos kz \frac{4\pi q}{\varepsilon_1} I_m(kr_0) K_m(kr), \quad (i=1, 2, 3). \end{aligned} \quad (30)$$

С учетом соотношения (24), для потенциала получим

$$\Phi = \frac{2q}{\pi\varepsilon} \int_0^{\infty} dk \cos kz K_0(kR_0) = \frac{q}{\varepsilon \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta + z^2}} = \frac{q}{\varepsilon R}, \quad (31)$$

где $R = \sqrt{R_0^2 + z^2}$ – расстояние до заряженного центра, что представляет потенциал точечного заряда в диэлектрически однородной среде с ДП ε .

2. Диэлектрический цилиндр с ДП $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ в бесконечной однородной среде с ε_3 .

2.1. $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 = \varepsilon_3$. В этом случае $\gamma_{23} = 1$, $f_m = 0$,

$$\begin{aligned} F_m &= \gamma_{12} \frac{K_m(ka)}{K'_m(ka)}, \quad D_m^{(1)}(k) = \frac{(\gamma_{12} - 1) K_m(ka)}{I_m(ka) - F_m I'_m(ka)}, \\ D_m^{(2)}(k) &= D_m^{(3)}(k) = D_m^{(1)}(k) \frac{I_m(ka)}{K_m(ka)} + 1. \end{aligned} \quad (32)$$

Для неизвестных коэффициентов получим:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{4\pi q}{\varepsilon_1} [K_m(kr_0) + D_m^{(1)}(k) I_m(kr_0)], \quad A_{12} = \frac{4\pi q}{\varepsilon_1} D_m^{(1)}(k) I_m(kr_0), \quad A_{13} = 0, \\ B_{12} &= \frac{4\pi q}{\varepsilon_1} I_m(kr_0), \quad B_{13} = B_{14} = \frac{4\pi q}{\varepsilon_1} D_m^{(2)}(k) I_m(kr_0). \end{aligned} \quad (33)$$

Соответствующие фурье-коэффициенты разложения имеют вид

$$\Phi_{11}(r) = \frac{4\pi q}{\varepsilon_1} \left[K_m(kr_0) + D_m^{(1)}(k) I_m(kr_0) \right] I_m(kr), \quad 0 < r < r_0, \quad (34a)$$

$$\tilde{\Phi}_{11}(r) = \frac{4\pi q}{\varepsilon_1} \left[K_m(kr) + D_m^{(1)}(k) I_m(kr) \right] I_m(kr_0), \quad r_0 < r < a. \quad (34b)$$

После некоторых вычислений для потенциалов Φ_{1i} ($i = 1, 2, 3$) получим: в области I ($0 \leq r \leq a$)

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(r, \theta, z) = & q/\varepsilon_1 R + \\ & + \frac{4q(\gamma_{12} - 1)a}{\pi\varepsilon_1} \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \int_0^{\infty} \frac{K_m(ka) K'_m(ka) I_m(kr_0) I_m(kr)}{1 + (1 - \gamma_{12})ka K_m(ka) I'_m(ka)} k \cos kz dk, \end{aligned} \quad (35)$$

в области II ($a \leq r \leq b$)

$$\begin{aligned} \Phi_{12}(r, \theta, z) = & - \frac{2q\gamma_{12}}{\pi\varepsilon_1} \int_0^{\infty} dk \cos kz \frac{K_0(kr)}{1 + ak(1 - \gamma_{12})K_0(ka)I'_0(ka)} - \\ & - \frac{4q}{\pi\varepsilon_1} \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \int_0^{\infty} dk \cos kz \frac{I_m(kr_0) K_m(kr)}{1 + ak(1 - \gamma_{12})K_m(ka)I'_m(ka)}. \end{aligned} \quad (36)$$

Очевидно, что в области III $b < r < \infty$ $\Phi_{13} = \Phi_{12}$. В частности, если диэлектрический цилиндр находится в вакууме, т.е. $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$, то $\gamma_{12} = \varepsilon_1$.

2.2. Если заряженный центр находится на оси z системы, т.е. $r_0 = 0$, то из (35) следует, что

$$\Phi_{11}^0(r, \theta, z) = \frac{q}{\varepsilon_1 \sqrt{r^2 + z^2}} + \frac{2q}{\pi\varepsilon_1} \int_0^{\infty} dk \cos kz D_0^{(1)}(k) I_0(kr_0) I_0(kr). \quad (37)$$

Учитывая, что $K'_0(x) = -K_1(x)$ и $I'_0(x) = I_1(x)$ [22], после некоторых преобразований с использованием выражения $D_m^{(1)}$ (32) при $m = 0$ получим

$$\begin{aligned} \Phi_{11}^0(r, \theta, z) = & q/\varepsilon_1 \sqrt{r^2 + z^2} + \\ & + \frac{2q(\gamma_{12} - 1)}{\pi\varepsilon_1} \int_0^{\infty} \frac{K_0(ka) K_1(ka) I_0(kr)}{K_1(ka) I_0(ka) + \gamma_{12} K_0(ka) I_1(ka)} \cos kz dk, \end{aligned} \quad (38)$$

а из выражения (36) для потенциала в области I имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{12}^0(r, \theta, z) = & \Phi_{13}^0(r, \theta, z) = \\ = & \frac{2q}{\pi\varepsilon_2} \int_0^{\infty} dk \cos kz \frac{K_0(kr)}{ak [K_1(ka) I_0(ka) + \gamma_{12} K_0(ka) I_1(ka)]}. \end{aligned} \quad (39)$$

Формулы (38) и (39) представляют решение известной задачи о поле точечного заряда, расположенного на оси диэлектрического цилиндра с ДП ε_1 , окруженного средой с ДП ε_2 , соответственно, в цилиндре ($r < a$) и в окружающей среде ($r > a$) [23].

3. Диэлектрический цилиндр с ДП $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ в бесконечной однородной среде с ДП ε_3 .

3.1. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$. В этом случае $\gamma_{12} = 1$,

$$D_m^{(1)}(k) = -f_m, \quad D_m^{(2)}(k) = 1, \quad D_m^{(3)}(k) = 1 - f_m \frac{I_m(kb)}{K_m(kb)}, \quad F_m = \frac{f_m I_m(ka) - K_m(ka)}{f_m I_m'(ka) - K_m'(ka)}.$$

Для потенциалов в трех областях имеем:

$$\Phi_{11}(r, \theta, z) = \frac{q}{\varepsilon_1 \sqrt{R_0^2 + z^2}} - \frac{2q}{\pi \varepsilon_1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} \int_0^{\infty} dk \cos kz f_m(k) I_m(kr) I_m(kr_0). \quad (40)$$

$$\Phi_{12}(r, \theta, z) = \frac{2q}{\pi \varepsilon_1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} \int_0^{\infty} dk \cos kz [K_m(kr) - f_m I_m(kr)] I_m(kr_0), \quad (41)$$

$$\Phi_{13}(r, \theta, z) = \frac{2q}{\pi \varepsilon_1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} \int_0^{\infty} dk \cos kz [1 - f_m I_m(kb)/K_m(kb)] K_m(kr) I_m(kr_0). \quad (42)$$

В частном случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3 = 1$ $\gamma_{23} = \varepsilon_2$.

3.2. Если заряженный центр находится на оси z системы, то $r_0 = 0$, и для потенциалов получим

$$\Phi_{11}^0(r, \theta, z) = \Phi_{12}^0(r, \theta, z) = q/\varepsilon_1 \sqrt{r^2 + z^2} + \frac{2q(\gamma_{23} - 1)}{\pi \varepsilon_1} \int_0^{\infty} \frac{kb K_0(kb) K_1(kb) I_0(kr)}{1 + (\gamma_{23} - 1) kb K_0(kb) I_1(kb)} \cos kz dk, \quad (43)$$

$$\Phi_{13}^0(r, \theta, z) = \frac{2q\gamma_{23}}{\pi \varepsilon_3} \int_0^{\infty} dk \cos kz \frac{K_0(kr)}{1 + (\gamma_{23} - 1) kb K_0(kb) I_1(kb)}. \quad (44)$$

4. Диэлектрический цилиндрический слой с ДП $\varepsilon_2 \neq \varepsilon_1$ в бесконечной однородной среде с ДП $\varepsilon_3 = \varepsilon_1$.

4.1. $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 \neq \varepsilon_2$. В этом случае $\gamma_{23} = \gamma_{12}^{-1}$. В частном случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$ $\gamma_{23} = \varepsilon_2$.

4.2. Если заряженный центр находится на оси z системы, то $r_0 = 0$, и для потенциалов получим

$$\Phi_{11}^0(r, \theta, z) = \frac{q}{\varepsilon_1 \sqrt{r^2 + z^2}} + \frac{2q}{\pi \varepsilon_1} \int_0^{\infty} D_0^{(1)}(k) I_0(kr) \cos kz dk, \quad (45)$$

$$\Phi_{12}^0(r, \theta, z) = \frac{2q}{\pi \varepsilon_2} \int_0^{\infty} D_0^{(2)}(k) [K_0(kr) - f_0 I_0(kr)] \cos kz dk, \quad (46)$$

$$\Phi_{13}^0(r, \theta, z) = \frac{2q}{\pi \varepsilon_1} \int_0^{\infty} D_0^{(3)}(k) K_0(kr) \cos kz dk. \quad (47)$$

Следует отметить, что рассмотренные частные случаи не исчерпывают все возможные случаи, соответствующие, в частности, различным соотношениям

ям между геометрическими параметрами, а также асимптотическим значениям параметров γ_{12} и γ_{23} .

Аналогичные расчеты при расположении заряженного центра во второй среде с ДП ε_2 ($l=2$): $a \leq r_0 \leq b$, приводят к следующим выражениям для потенциалов:

в области I ($0 \leq r \leq a$)

$$\Phi_{21}(r, \theta, z) = \frac{2q}{\pi\varepsilon_2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(m\theta) \int_0^{\infty} dk \cos kz D_m^{(II)}(k) [K_m(kr_0) - f_m I_m(kr_0)] I_m(kr); \quad (48)$$

в области II ($a \leq r \leq b$)

$$\begin{aligned} \Phi_{22}(r, \theta, z) = & \frac{2q}{\pi\varepsilon_2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(m\theta) \int_0^{\infty} dk \cos kz \{ D_m^{(II)}(k) [K_m(kr_0) - f_m I_m(kr_0)] \times \\ & \times [I_m(kr) + ka(1-\gamma_{12}) I'_m(ka) [I_m(ka) K_m(kr) - K_m(ka) I_m(kr)]] \}, \end{aligned} \quad (49)$$

если $a \leq r \leq r_0$ и

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{22}(r, \theta, z) = & \frac{2q}{\pi\varepsilon_2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(m\theta) \int_0^{\infty} dk \cos kz D_m^{(II)}(k) [I_m(kr_0) + \\ & + ka(1-\gamma_{12}) I'_m(ka) [I_m(ka) K_m(kr_0) - K_m(ka) I_m(kr_0)]] [K_m(kr) - f_m I_m(kr)], \end{aligned} \quad (50)$$

если $r_0 \leq r \leq b$;

в области III ($b \leq r < \infty$)

$$\begin{aligned} \Phi_{23}(r, \theta, z) = & \frac{2q}{\pi\varepsilon_2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(m\theta) \int_0^{\infty} dk \cos kz D_m^{(II)}(k) f_m [I_m(kr_0) + \\ & + ka(1-\gamma_{12}) I'_m(ka) [I_m(ka) K_m(kr_0) - K_m(ka) I_m(kr_0)]] K_m(kr). \end{aligned} \quad (51)$$

В формулах (48)-(51) введено обозначение

$$D_m^{(II)}(k) = [1 - ka(1-\gamma_{12}) I'_m(ka) [K_m(ka) - f_m I_m(ka)]]^{-1}. \quad (52)$$

Наконец, если заряженный центр находится в среде с ДП ε_3 ($l=3$): $b \leq r_0 < \infty$, то потенциалы даются следующими выражениями:

в области I ($0 \leq r \leq a$)

$$\Phi_{31}(r, \theta, z) = \frac{2q}{\pi\varepsilon_3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(m\theta) \int_0^{\infty} dk \cos kz D_m^{(III,1)}(k) K_m(kr_0) I_m(kr), \quad (53)$$

в области II ($a \leq r \leq b$)

$$\begin{aligned} \Phi_{32}(r, \theta, z) = & \\ & \frac{2q}{\pi\varepsilon_3} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(m\theta) \int_0^{\infty} dk \cos kz D_0^{(III,2)}(k) I'_m(ka) K_m(kr_0) [I_m(kr) - f_m^{(III)} K_m(kr)]; \end{aligned} \quad (54)$$

в области III ($b \leq r < \infty$)

$$\Phi_{33}(r, \theta, z) = \frac{q}{\varepsilon_3 R} + \frac{2q}{\pi \varepsilon_3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(m\theta) \int_0^{\infty} dk \cos kz D_m^{(III)}(k) f_m K_m(kr_0) K_m(kr). \quad (55)$$

В формулах (53)-(55) введены обозначения

$$D_m^{(III,1)}(k) = \frac{I_m(ka) - f_m^{(III)} K_m(ka)}{I_m(ka) \{1 + kb(\gamma_{23} - 1) K_m(kb) [I_m'(kb) - f_m^{(III)} K_m'(kb)]\}}, \quad (56)$$

$$D_m^{(III,2)}(k) = \frac{I_m(ka) - f_m^{(III)} K_m(ka)}{I_m(ka) D_m^{(III,1)}(k)}, \quad (57)$$

$$D_m^{(III)}(k) = \frac{kb(\gamma_{23} - 1) I_m(kb) [f_m^{(III)} K_m'(kb) - I_m'(kb)] - f_m^{(III)}}{1 + kb(\gamma_{23} - 1) K_m(kb) [I_m'(kb) - f_m^{(III)} K_m'(kb)]}, \quad (58)$$

$$f_m^{(III)} = \frac{(\gamma_{12} - 1) ka I_m'(ka) I_m(ka)}{1 + (\gamma_{12} - 1) ka K_m(ka) I_m'(ka)}. \quad (59)$$

В дальнейшем, на основании полученных результатов, будет исследовано влияние диэлектрической неоднородности на релаксационные и оптические характеристики квантовых проволок с покрытием, помещенных в бесконечную диэлектрическую среду (в частности, в вакуум).

ЛИТЕРАТУРА

1. **А.Л.Асеев.** Российские нанотехнологии (обзоры), **1**, 97 (2006).
2. **Л.А.Головань, В.Ю.Тимошенко, П.К.Кашкаров.** УФН, **177**, 619 (2007).
3. **A.M.Elabsy.** Phys. Rev. B, **46**, 2621 (1992).
4. **Z.Y.Deng, J.K.Guo, T.R.Lai.** Phys. Rev. B, **50**, 5736 (1994).
5. **Н.С.Рыгова.** Вестник МГУ, **3**, 30 (1967).
6. **Л.В.Келдыш.** Письма в ЖЭТФ, **29**, 716 (1979).
7. **S.Fraizzoli, F.Bassani, R.Buczko.** Phys. Rev. B, **41**, 5096 (1990).
8. **A.A.Kirakosyan, A.Kh.Manaselyan, M.M.Agasyan.** Proc. NATO Adv. Res. Workshop on Brilliant Light Facilities and Research in Life and Mat. Sciences, Yerevan, Armenia, 17-21 July, 2006, pp.339-348.
9. **Z.Y.Deng, S.W.Gu.** Phys. Rev. B, **48**, 8083 (1993).
10. **М.М.Агасян, А.А.Киракосян.** Изв. НАН Армении, Физика, **34**, 17 (1999).
11. **М.М.Aghasyan, A.A. Kirakosyan.** Physica E, **8**, 281 (2000).
12. **H.D.Karki, S.Elagoz, R.Amca, P.Baser, K.Atasever.** Physica E, **42**, 1351 (2010).
13. **D.Jena, A.Konar.** Phys. Rev. Lett., **98**, 136805 (2007).
14. **A.Konar, D.Jena.** J. Appl. Phys., **102**, 123705 (2007).
15. **М.Г.Лисаченко, В.Ю.Тимошенко.** Вестник МГУ, Серия 3, **5**, 30 (1999).
16. **D.Kammerlander, F.Troian, G.Goldoni.** Phys. Rev. B, **81**, 115310 (2010).
17. **А.А.Киракосян, Ш.Г.Гаспарян.** Изв. НАН Армении, Физика, **37**, 364 (2002).
18. **A.Kh.Manaselyan, M.M.Agasyan, A.A.Kirakosyan.** Physica E, **14**, 366 (2002).
19. **А.Х.Манаселян, М.М.Агасян, А.А.Киракосян.** Изв. НАН Армении, Физика, **36**, 275 (2001).
20. **А.А.Киракосян, Ш.Г.Гаспарян.** Изв. НАН Армении, Физика, **41**, 353 (2006).

21. **Дж.Джексон.** Классическая электродинамика. М., Мир, 1965.
22. **И.С.Градштейн, И.М.Рыжик.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., ГИТЛ, 1962.
23. **Д.Д.Иваненко, А.А.Соколов.** Классическая теория поля. М., ГИТЛ, 1951.

ԿԵՏԱՅԻՆ ԼԻՑՔԻ ՊՈՏԵՆՑԻԱԼԸ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՀԱՄԱՉԱՓՈՒԹՅԱՄԲ
ԿԻՍԱՀԱՂՈՐԴՉԱՅԻՆ ՀԵՏԵՐՈԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔՈՒՄ

Ա.Ա. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ, Ն.Գ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ, Շ.Գ. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

Արտածված են կետային լիցքի պոտենցիալի ընդհանուր արտահայտություններ տարբեր դիելեկտրական հաստատուններով գլանային տիրույթներից կազմված գլանային կիսահաղորդչային հետերոկառուցվածքում կետային լիցքի կամայական դիրքի համար:

POTENTIAL OF POINT CHARGE IN A SEMICONDUCTOR HETEROSTRUCTURE
WITH CYLINDRICAL SYMMETRY

A.A. KIRAKOSYAN, N.G. MOVSISYAN, Sh.G. GASPARYAN

General expressions for the potential of a point charge in a coaxial semiconductor heterostructure composed by three cylindrical regions with different dielectric constants and for arbitrary location of the charged center in the heterostructure are derived.