

УДК 621.384

## **ПРОБЛЕМЫ ИСКАЖЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОКАМИ ФУКО В ЕРЕВАНСКОМ СИНХРОТРОНЕ**

Д.К. КАЛАНТАРЯН<sup>†</sup>

Национальная научная лаборатория им. А.И. Алиханяна (ЕрФИ), Ереван

<sup>†</sup>e-mail: davit.kalantaryan@desy.de

(Поступила в редакцию 24 августа 2012 г.)

Аналитически исследовано влияние токов Фуко на проектное значение магнитного поля в ускорителях. Разработана программа для расчета искажений магнитных полей, вызванных токами Фуко. В качестве примера приведены численные результаты для ускорителя Ереванского физического института в случае его использования для ускорения ионов.

### **1. Введение**

В ускорителях магнитное поле (отклоняющее и фокусирующее поля) меняется пропорционально энергии пучка, и в случае металлической вакуумной камеры возникают индуктивные токи – токи Фуко – за счет изменяющегося во времени магнитного поля. Эти токи могут привести к ряду нежелательных явлений, например, потере мощности, как было показано в [1-3]. В этих работах в основном обсуждались результаты, полученные методом различных симуляций. В настоящей работе впервые из уравнений Максвелла получены аналитические выражения для токов Фуко, с помощью которых из формулы Био–Савара–Лапласа получено выражение для искаженного магнитного поля в эллиптической вакуумной камере. Разработана также быстродействующая программа расчета физических величин, обусловленных токами Фуко. В качестве примера приведены численные расчеты магнитной структуры ереванского синхротрона для ускорения ионных пучков.

### **2. Расчет магнитного поля, возбужденного токами Фуко**

Рассмотрим металлическую эллиптическую вакуумную камеру. Полуось камеры, перпендикулярную магнитным линиям, обозначим через  $a$ , а полуось, параллельную им – через  $b$  (см. рис.1).

Разделим верхнюю и нижнюю полуповерхности вакуумной камеры на маленькие ячейки (рис.2) и запишем второе уравнение Максвелла для каждой из них в виде

$$I_i R = \oint_i \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_i}{dt}, \quad (1)$$

где  $\Phi_i$  – поток магнитной индукции через  $i$ -ую ячейку. Если суммировать уравнение (1) по всем  $i$ , то увидим, что в центральной части соседние стороны ячеек компенсируют друг друга (рис.2), и суммарный ток течет по границам вакуумной камеры.

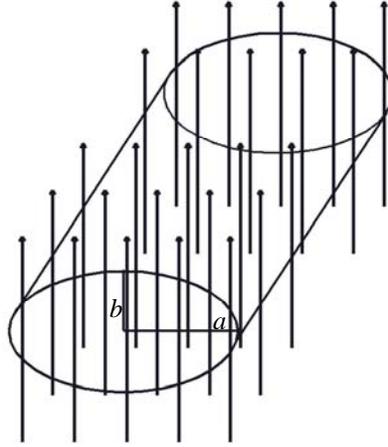


Рис.1. Магнитные линии и эллиптическая вакуумная камера.

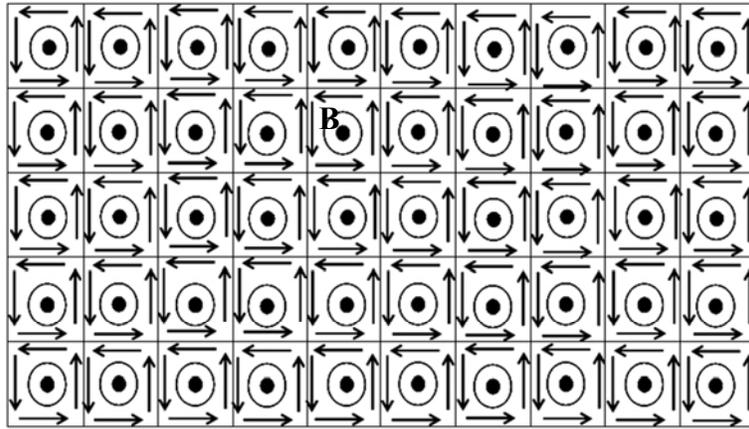


Рис.2. Вакуумная камера, разделенная на маленькие ячейки (вид сверху).

После суммирования выражения (1) по одной полуоси получим

$$IR = -\frac{d}{dt} \left( \int \mathbf{B} ds \right). \quad (2)$$

Пространственное распределение магнитной индукции  $\mathbf{B}$  в ускорителях не меняется, тогда как временная зависимость меняется пропорционально изменению энергии ускоряемых частиц [4]:

$$\mathbf{B} = \mathbf{b}_0 f(t). \quad (3)$$

В формуле (3)  $f(t)$  – временная часть магнитной индукции с размерностью Тесла. При этом для дипольного магнита вектор  $\mathbf{b}_0$  представляется в виде

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_0(0,1,0). \quad (3.1)$$

Обсудим вид функции  $f(t)$  для ускорителя ереванского синхротрона с инжекционной энергией 1 МэВ/нукл., которой соответствует магнитная жесткость 0.289 Т·м. Радиус кривизны для дипольных магнитов равен 25.25 м, так что соответствующая магнитная индукция получается равной 0.0114 Т. Если принять максимальную энергию (энергию эжекции) равной 2 ГэВ/нукл., то магнитная жесткость получается равной 18.5748 Т·м, а магнитная индукция – 0.735637 Т. Соответствующая зависимость  $f(t)$  от  $t$  представлена на рис.3.

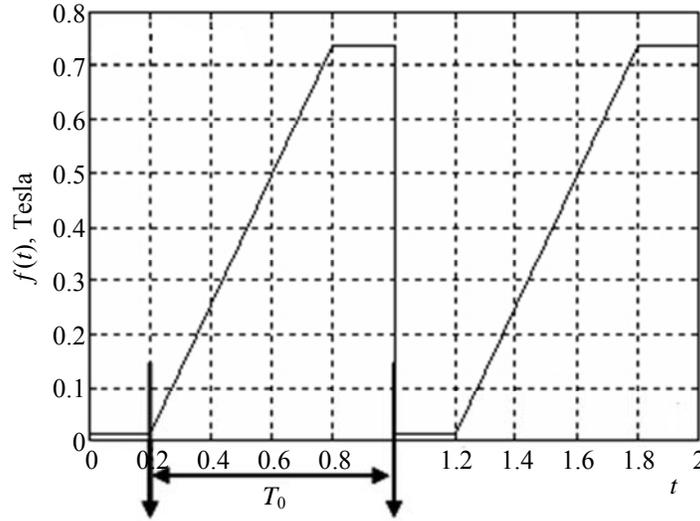


Рис.3. Зависимость модуля магнитной индукции от времени  $t$  для ускорителя с периодом повторения  $T_0$ .

Подставив выражения (3) и (3.1) в формулу (2), получим

$$IR = -\frac{d}{dt} \left( \int (\mathbf{b}_0 f(t)) ds \right) = -\frac{d}{dt} \left( f(t) \int \mathbf{b}_0 ds \right) = -\frac{d}{dt} (f(t) S_0) = -S_0 f'(t). \quad (4)$$

Здесь  $S_0 = 2aL_B$ , где  $L_B$  – длина поворотного магнита. Чтобы получить ток из уравнения (4), необходимо иметь значение сопротивления  $R$ . Если разложить функцию, показанную на рис.3, в ряд Фурье и учесть, что основной вклад вносит первая гармоника, значение которой значительно больше остальных, то, ограничиваясь только первой гармоникой, получим

$$f(t) \cong f_1 \cos(\omega t + \psi), \quad (4.2)$$

где  $\psi$  – начальная фаза, а  $f_1$  – амплитуда первой гармоники. С большой точностью амплитуду первой гармоники можно аппроксимировать следующим выражением:

$$f_1 = (f_{\max} - f_{\min})/2. \quad (4.3)$$

Как известно, переменный ток течет, в основном, в скин-слое, толщина которого определяется по формуле

$$d_{\text{skin}} = c\sqrt{2(\varepsilon_0/\omega\mu_m)\rho}. \quad (5)$$

Очевидно, что полное сопротивление системы будет равно

$$R = 2R_1 + 2R_2. \quad (6)$$

Здесь  $R_1$  – сопротивление по периметру эллипса, а  $R_2$  – по образующим эллипсоида:

$$R_1 \cong \rho L_p / 4\Delta d_{\text{skin}}, \quad R_2 \cong \rho L_B / S_1. \quad (7)$$

В выражениях (7)  $L_B$  – длина магнита,  $L_p$  – периметр эллипса,  $\Delta$  – толщина стенок вакуумной камеры,  $S_1$  – площадь, по которой течет ток вдоль вакуумной камеры, определяемая формулой

$$S_1 = ab \left\{ \arcsin\left(\frac{a-d_{\text{skin}}}{a}\right) + \left(\frac{a-d_{\text{skin}}}{a}\right) \sqrt{1-\left(\frac{a-d_{\text{skin}}}{a}\right)^2} \right\} - \quad (7.1)$$

$$- [(a-\Delta)(b-\Delta)] \left\{ \arcsin\left(\frac{a-d_{\text{skin}}}{a-\Delta}\right) + \left(\frac{a-d_{\text{skin}}}{a-\Delta}\right) \sqrt{1-\left(\frac{a-d_{\text{skin}}}{a-\Delta}\right)^2} \right\}.$$

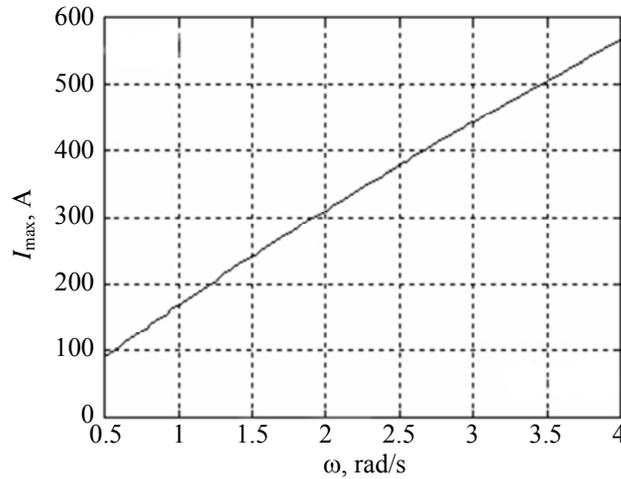


Рис.4. Зависимость амплитуды тока от частоты повторения ускорителя при толщине стенок вакуумной камеры 2 мм.

Периметр эллипса  $L_p$  с хорошим приближением описывается выражением [5]

$$L_p = 4(a^x + b^x)^{1/x}, \quad x = \ln 2 / \ln(\pi/2). \quad (7.2)$$

Используя формулу (4), с помощью полученных выражений для сопротивлений можно определить ток  $I$ . Зависимость амплитуды тока от частоты  $\omega$  для поворотного магнита ереванского синхротрона показана на рис.4.

Далее, воспользовавшись законом Био–Савара–Лапласа, получим выражение для элемента магнитной индукции, возбужденной токами Фуко:

$$d\mathbf{B}_{\text{dist}} = (\mu_0/4\pi) I [d\mathbf{l} \times \mathbf{r}] / r^3. \quad (8)$$

В (8)  $\mathbf{B}_{\text{dist}}$  – это искаженное магнитное поле,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  Гн/м – магнитная константа,  $I$  – ток в амперах, текущий по секции  $d\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{r}$  – вектор от точки на поверхности эллипсоида, где протекает ток, до точки наблюдения (рис.5).

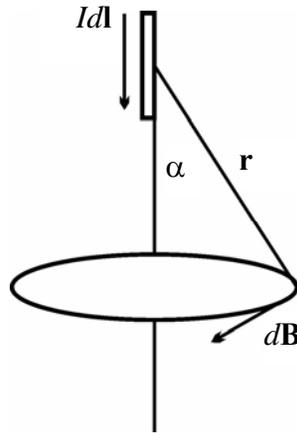


Рис.5. Рисунок для иллюстрации формулы (8).

### 3. Исследование магнитной индукции, возбужденной токами Фуко

Для получения поля в точках наблюдения следует проинтегрировать выражение (8) по всем элементам тока:

$$\mathbf{B}_{\text{dist}}(\mathbf{r}', t) = \frac{\mu_0 I(t)}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (9)$$

Используя симметрию задачи, будем интегрировать выражение (8) в эллиптической системе координат  $(\mu, \nu, z)$  [6,7]. Здесь ось  $z$  – ось эллипсоида, совпадающая с декартовой осью  $z$ . Поперечные координаты  $(\mu, \nu)$  связаны с декартовыми  $(x, y)$  следующими соотношениями:

$$x = A \cosh \mu \cos \nu, \quad y = A \sinh \mu \sin \nu, \quad z = z. \quad (10)$$

Эквипотенциальные линии для  $(\mu, \nu)$  изображены на рис.6.

Для того чтобы одна из эквипотенциальных линий совпадала с периметром эллипса вакуумной камеры, следует брать  $A = \sqrt{a^2 - b^2}$ . Тогда координата  $\mu$ , соответствующая периметру вакуумной камеры, будет равна

$$\mu = \ln \sqrt{(a+b)/(a-b)}. \quad (11)$$

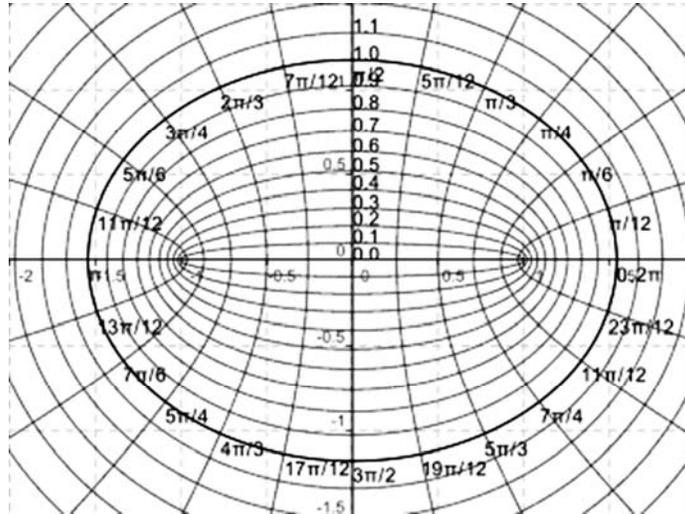


Рис.6. Эквипотенциальные линии для эллиптической системы координат.

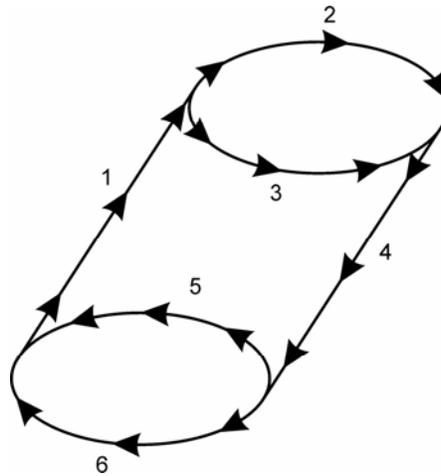


Рис.7. Стрелками пронумерованы 6 контуров интегрирования.

Рассмотрим интеграл (9), не зависящий от времени в вышеупомянутой системе координат. Запишем вначале выражение  $d\mathbf{l} \times \mathbf{r}$  в матричной форме:

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\mu & \mathbf{e}_\nu & \mathbf{e}_z \\ dl_\mu & dl_\nu & dl_z \\ r_\mu & r_\nu & r_z \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Представим теперь интеграл (9) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\text{inf}} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{2\mu_0 I}{4\pi} \int_1 \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_2 \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} + \dots + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_6 \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} = \\ &= \frac{\mu_0 I(t)}{4\pi} \left\{ 2 \int_1 \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} + \dots + \int_6 \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, контуры интегрирования (13) будут состоять из шести частей, которые показаны на рис.7.

Выражение в фигурных скобках (13) назовем форм-фактором и обозначим через  $\mathbf{F}_B$  :

$$\mathbf{B}_{\text{inf}}(\mathbf{R}, t) = (\mu_0 I(t) / 4\pi) \mathbf{F}_B(\mathbf{R}). \quad (14)$$

Учитывая это, можно получить, что

$$|\mathbf{B}_{\text{inf}}|/|\mathbf{B}| \sim (\mu_0 S_0 \omega / 4\pi R(\omega)) |\mathbf{F}_B|, \quad (15)$$

где  $\mathbf{B}$  определяется согласно (3). Представим (15) в нормированном на максимум форм-фактора виде

$$|\mathbf{B}_{\text{inf}}|/|\mathbf{B}| \sim (\mu_0 S_0 \omega |\mathbf{F}_B|_{\text{max}} / 4\pi R(\omega)) |\mathbf{F}_B| / |\mathbf{F}_B|_{\text{max}} \quad (16)$$

и введем следующие обозначения:

$$K(\omega) \equiv \mu_0 S_0 \omega |\mathbf{F}_B|_{\text{max}} / 4\pi R(\omega), \quad f_B = |\mathbf{F}| / |\mathbf{F}_B|_{\text{max}}, \quad (17)$$

где  $|\mathbf{F}_B|_{\text{max}}$  – максимум форм-фактора  $|\mathbf{F}_B|$  по оси движения частиц. Окончательно, приходим к выражению

$$|\mathbf{B}_{\text{inf}}|/|\mathbf{B}| = K(\omega) f_B. \quad (18)$$

Введенная таким образом функция  $K(\omega)$  полностью определяет степень влияния токов Фуко на магнитное поле ускоряющей системы. Очевидно, что максимум относительного отклонения определяется функцией  $K(\omega)$ . Зависимость этой функции от частоты  $\omega$  для магнита ереванского синхротрона приведена на рис.8.

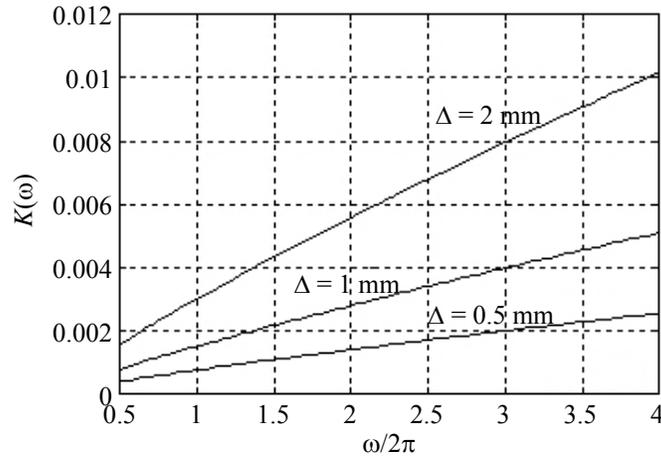


Рис.8. Зависимость  $K(\omega)$  от  $\omega$  для магнита ускорителя ереванского синхротрона при различных толщинах стенок эллиптической камеры.

Соответственно выбранной системе координат, приведенной на рис.6, на

всех контурах  $dl_\mu = 0$ . На контурах 1 и 4  $dl_\nu = 0$ ,  $dl_z = dz$ , на контурах 2, 3, 5, 6  $dl_z = 0$ ,  $dl_\nu = \sqrt{a^2 \sin^2 \nu + b^2 \cos^2 \nu} d\nu$ . В результате, интеграл (13) для указанных контуров может быть записан в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_1 \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} = \left( \int_0^{L_B} \frac{\mathbf{e}_\mu r_\nu - \mathbf{e}_\nu r_\mu}{r^3} dz \right) \Big|_{\nu=\pi}, \\ \int_2 \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} = \left( \int_\pi^0 \frac{\mathbf{e}_\mu r_z - \mathbf{e}_z r_\mu}{r^3} \sqrt{a^2 \sin^2 \nu + b^2 \cos^2 \nu} d\nu \right) \Big|_{z=L_B}, \\ \int_3 \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} = \left( \int_\pi^{2\pi} \frac{\mathbf{e}_\mu r_z - \mathbf{e}_z r_\mu}{r^3} \sqrt{a^2 \sin^2 \nu + b^2 \cos^2 \nu} d\nu \right) \Big|_{z=L_B}, \\ \int_4 \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} = \left( \int_{L_B}^0 \frac{\mathbf{e}_\mu r_\nu - \mathbf{e}_\nu r_\mu}{r^3} dz \right) \Big|_{\nu=0}, \\ \int_5 \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} = \left( \int_0^\pi \frac{\mathbf{e}_\mu r_z - \mathbf{e}_z r_\mu}{r^3} \sqrt{a^2 \sin^2 \nu + b^2 \cos^2 \nu} d\nu \right) \Big|_{z=0}, \\ \int_6 \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} = \left( \int_{2\pi}^\pi \frac{\mathbf{e}_\mu r_z - \mathbf{e}_z r_\mu}{r^3} \sqrt{a^2 \sin^2 \nu + b^2 \cos^2 \nu} d\nu \right) \Big|_{z=0}. \end{array} \right. \quad (19)$$

Используя эти выражения для всех контуров, окончательно получим для компонент форм-фактора  $\mathbf{F}_B$  в эллиптической системе координат:

$$\begin{aligned} F_{B\mu} = & 2 \left( \int_0^{L_B} \frac{r_\nu}{r^3} ds \right) \Big|_{\nu=\pi} + 2 \left( \int_{L_B}^0 \frac{r_\nu}{r^3} ds \right) \Big|_{\nu=0} + \\ & + \left( \int_\pi^0 \frac{r_z \sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta} d\beta}{r^3} \right) \Big|_{z=L_B} + \left( \int_\pi^{2\pi} \frac{r_z \sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta} d\beta}{r^3} \right) \Big|_{z=L_B} + \\ & + \left( \int_0^\pi \frac{r_z \sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta} d\beta}{r^3} \right) \Big|_{z=0} + \left( \int_{2\pi}^\pi \frac{r_z \sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta} d\beta}{r^3} \right) \Big|_{z=0}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$F_{B\nu} = -2 \left( \int_0^{L_B} \frac{r_\mu}{r^3} ds \right) \Big|_{\nu=\pi} - 2 \left( \int_{L_B}^0 \frac{r_\mu}{r^3} ds \right) \Big|_{\nu=0}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} F_{Bz} = & - \left( \int_\pi^0 \frac{r_\mu \sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta} d\beta}{r^3} \right) \Big|_{z=L_B} - \left( \int_\pi^{2\pi} \frac{r_\mu \sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta} d\beta}{r^3} \right) \Big|_{z=L_B} - \\ & - \left( \int_0^\pi \frac{r_\mu \sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta} d\beta}{r^3} \right) \Big|_{z=0} - \left( \int_{2\pi}^\pi \frac{r_\mu \sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta} d\beta}{r^3} \right) \Big|_{z=0}. \end{aligned} \quad (22)$$

В выражениях (20–22) мы использовали  $s$  вместо  $z$  и  $\beta$  вместо  $v$ . Эти замены сделаны для того, чтобы не путать координаты интегрирования с координатами точки наблюдения. Для получения  $(r_\mu, r_\nu, r_z)$  следует умножить  $\mathbf{r}$  на единичные векторы  $(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_z)$ :

$$r_\mu = \mathbf{r}\mathbf{e}_\mu, \quad r_\nu = \mathbf{r}\mathbf{e}_\nu, \quad r_z = \mathbf{r}\mathbf{e}_z. \quad (23)$$

Приведем связь между единичными векторами в эллиптической и декартовой системах координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\mu &= \frac{\sinh \mu \cos \nu}{\sqrt{\sinh^2 \mu + \sin^2 \nu}} \mathbf{i} + \frac{\cosh \mu \sin \nu}{\sqrt{\sinh^2 \mu + \sin^2 \nu}} \mathbf{j}, \\ \mathbf{e}_\nu &= -\frac{\cosh \mu \sin \nu}{\sqrt{\sinh^2 \mu + \sin^2 \nu}} \mathbf{i} + \frac{\sinh \mu \cos \nu}{\sqrt{\sinh^2 \mu + \sin^2 \nu}} \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (24)$$

Используя (24) и вычислив интегралы (20)-(22), мы получим зависимость  $f_B = |\mathbf{F}_B|/|\mathbf{F}_B|_{\max}$  для нормированного на максимальное значение форм-фактора от координаты  $z$  в магните. Эта зависимость для магнита ереванского ускорителя приведена на рис.9.

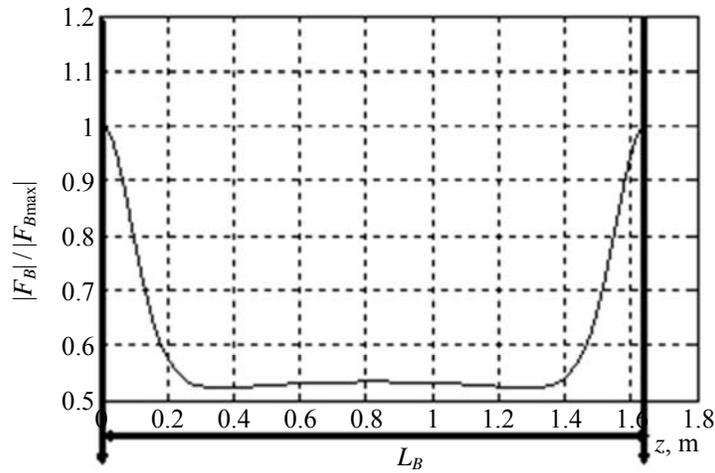


Рис.9. Зависимость нормированного форм-фактора  $f_B$  от  $z$  для магнита ускорителя ереванского синхротрона.

Как и следовало ожидать, значение форм-фактора  $f_B$  достигает резкого максимума на краях магнита, оставаясь квазипостоянным в промежуточной части.

#### 4. Заключение

В работе получены аналитические формулы для расчета токов Фуко в случае эллиптической камеры. Была разработана программа, которая, используя

полученные формулы, может определить форм-фактор и частотную зависимость токов Фуко.

Полученные здесь результаты позволят записать программу для расчета потерь мощности в ускорителях из-за токов Фуко, а также сравнить эти потери с экспериментальными и симуляционными результатами, приведенными в [3].

Автор благодарен И.Н. Мешкову за постановку задачи, а также Э.Д. Газазяну и А.Д. Тер-Погосян за постоянный интерес к работе и полезные советы. Благодарю также фонд РФФИ, предоставивший мне грант 10-02-90904 для прохождения стажировки и участия в вышеприведенных исследованиях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **G.Sinha, S.S.Prabhu.** Phys. Rev. Special Topics – Accel. Beams, **14**, 062401 (2011).
2. **S.A.Bogacz, S.Peggs.** Fermi National Accelerator Laboratory. FN-559 (1990).
3. **P.Shcherbakov, E.Fischer, R.Kurnyshov.** Proc. EPAC-2006, Edinburgh, p.2595 (2006).
4. **J.J.Livingood.** Principles of Cyclic Particle Accelerators. New York, Van Nostrand, 1961.
5. <http://ru.wikipedia.org/wiki/Эллипс>.
6. [http://ru.wikipedia.org/wiki/Эллиптические\\_координаты](http://ru.wikipedia.org/wiki/Эллиптические_координаты).
7. **Л.А.Вайнштейн.** Электромагнитные волны. М., Радио и связь, 1988.

#### ՖՈՒԿՈՅԻ ՀՈՍԱՆՔՆԵՐՈՎ ՊԱՅՄԱՆԱՎՈՐՎԱԾ ՄԱԳՆԻՏԱԿԱՆ ԴԱՇՏԵՐԻ ԱՂԱՎԱՂՄԱՆ ՊՐՈԲԼԵՄՆԵՐԸ ԵՐԵՎԱՆԻ ՄԻՆՔՐՈՏՐՈՆՈՒՄ

Դ.Բ. ԲԱԼԱՆԹԱՆՅԱՆ

Անալիտիկորեն ուսումնասիրված են Ֆուկոյի հոսանքերի ազդեցությունը արագացուցիչներում և այդ հոսանքների պատճառով առաջացած խտորումները դաշտի նախատեսված արժեքներից: Մշակված է ծրագիր նշված երևույթների հաշվարկման համար: Բերված են թվային արդյունքներ Երևանի ֆիզիկայի ինստիտուտի արագացուցչի համար:

#### PROBLEMS OF MAGNETIC FIELD DISTORTIONS CAUSED BY EDDY CURRENTS IN YEREVAN SYNCHROTRON

D.K. KALANTARYAN

The effects magnetic field distortions caused by eddy currents in accelerators are investigated analytically. A program to calculate the distortions of the magnetic field is created. The numerical results are considered for the accelerator in Yerevan Physics Institute, if it will be used to accelerate the ions.