

ОБРАЗОВАНИЕ КВАНТОВОГО ХАОСА В АНГАРМОНИЧЕСКОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ГАУССОВСКИХ ИМПУЛЬСОВ

А.Р. ШАГИНЯН

Ереванский государственный университет, Армения

(Поступила в редакцию 24 августа 2012 г.)

Исследованы режимы квантового хаоса для ангармонического осциллятора под воздействием последовательности гауссовских импульсов в зависимости от параметров импульсов. Приведенные результаты получены в полуклассическом приближении на основе сечения Пуанкаре и экспоненты Ляпунова, а в квантовом подходе – на основе функции Вигнера. Найдены соотношения между параметрами системы, при которых возникает хаотическая динамика на мезоскопическом уровне чисел возбуждения осциллятора.

1. Введение

К настоящему времени проблема хаоса в квантовых динамических системах все еще представляет большой интерес [1-6]. Исследование квантового хаоса, бесспорно, связано с принципом квантово-классического соответствия, декогеренцией и диссипацией [4,5]. В работе [6] было показано, что при применении масштабной инвариантности квантовый хаос проявляется в том случае, когда хаос отсутствует в полуклассическом пределе. Проблема квантового хаоса имеет не только теоретический интерес. Хаотическая динамика систем интересна, так как квантовые системы используются в теории и в практике квантовой информации, нанотехнологиях, и т.д. Много исследований на тему классического и квантового хаоса посвящено импульсному ротатору, который обладает регулярными и хаотическими режимами движения. Ее экспериментальная реализация была осуществлена с ультрахолодными атомами в магнито-оптической ловушке, под действием импульсов стоячих волн [7]. Предложен также параметрический импульсный ротатор в резонаторе с керровской нелинейностью [8]. Показано, что более перспективная реализация этой системы, в том числе и в квантовом режиме, осуществляется в динамике охлажденных ионов (в ловушке), взаимодействующих с периодической последовательностью импульсов [9]. Недавно другая модель для исследования квантового хаоса была предложена в работе [10], где найдено хорошее соответствие между квантовой и классической динамикой. В серии работ [11-15] исследованы режимы квантового хаоса для ангармонического осциллятора с периодическими от времени па-

раметрами, в частности, исследована связь между сечением Пуанкаре и функцией Вигнера [12], показана возможность диагностики хаоса по статистике осцилляторных возбужденных состояний [13,14] и обнаружено образование суперпозиционных состояний в хаотическом режиме [15].

В этой статье показано, что квантовый диссипативный хаос возникает в ангармоническом осцилляторе под воздействием последовательности внешних гауссовских импульсов. Эта схема может быть легко реализована на эксперименте и была недавно предложена для приготовления осцилляторных фоковых состояний, а также для суперпозиционных фоковых состояний [16]. Следует отметить, что параметры импульса (длительность импульсов и временной интервал между ними) являются физическими величинами, которые могут управлять квантовой динамикой системы при наличии диффузии и декогеренции. Аналогичные результаты по контролю диссипативной квантовой динамики были получены ранее, в частности, для увеличения уровня сжатия и квантовой перепутанности непрерывных переменных [17-21].

Следует отметить, что, несмотря на многочисленные теоретические исследования, посвященные квантовому хаосу, эксперименты в этой области достаточно редки. Учитывая неоднозначность в подходе к квантовому хаосу, становится очевидной необходимость обнаружения и исследования новых, экспериментально реализуемых систем. С этой целью в данной работе исследован режим квантового хаоса для ангармонического осциллятора под воздействием последовательности гауссовских импульсов и рассмотрены режимы хаоса в зависимости от параметров импульса.

Следует отметить, что контролирование посредством параметра одиночного импульса было использовано в консервативном импульсном роторе для квантово-классического предельного перехода, так как при настройке параметров импульса можно увеличить или уменьшить осцилляторные числа заполнения [22]. В последнее время большой интерес представляет также исследование хаоса в мезоскопическом режиме возбуждения осцилляторных состояний (см. [15,23]).

2. Математическая модель и ее физические применения

Рассмотрим ангармонический осциллятор, взаимодействующий с резервуаром. Квантовые открытые системы, как правило, описываются с помощью матрицы плотности. Основным уравнением в таком подходе является уравнение для редуцированной матрицы плотности, т.е. матрицы плотности открытой системы, которая усреднена по переменным резервуара. В марковском приближении такое уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \sum_i \left(L_i \rho L_i^\dagger - \frac{1}{2} L_i^\dagger L_i \rho - \frac{1}{2} \rho L_i^\dagger L_i \right), \quad (1)$$

где H является гамильтонианом системы, а L_i представляют операторы Линблада для каждой моды i , которые описывают взаимодействие системы с резер-

вуаром. Операторы Линблада имеют следующую форму: $L_1 = \sqrt{N\gamma}a^+$, $L = \sqrt{(N+1)\gamma}a$, где γ является коэффициентом диссипации, $N = 1/(e^{\hbar\omega/kT} + 1)$ – среднее число заполнения резервуара, которое определяется температурой. В этой статье рассмотрен ангармонический осциллятор с высокой степенью ангармоничности и при низких температурах, $N = 0$.

В приближении вращающейся волны $\rho \rightarrow e^{i\omega_L a^+ a} \rho e^{i\omega_L a^+ a}$ гамильтониан имеет следующую форму:

$$H = \hbar\Delta a^+ a + \hbar\chi(a^+ a)^2 + f(t)(a^+ + a), \quad (2)$$

где $\Delta = \omega_0 - \omega_L$ является расстройкой, χ – коэффициент ангармоничности, $f(t)$ – внешнее воздействие. Здесь в качестве внешнего воздействия выбрана последовательность гауссовских импульсов: $f(t) = \Omega \sum_n \exp(-(t - n\tau)^2/T^2)$, где T – период импульса, τ – временной промежуток между импульсами, Ω – амплитуда внешнего воздействия.

Эта простая модель имеет ряд физических реализаций. Ангармонический осциллятор с нелинейностью третьего порядка описывает нано-механический осциллятор, оптическое волокно, электромагнитное поле в резонаторе с нелинейной керровской средой (где нелинейность описывает фотон-фотонное взаимодействие для электромагнитного поля), джозефсоновский контакт, и т.д. Последний прогресс в охлаждении нано-механических осцилляторов до их основных состояний [24,25] позволяет использовать их в квантовых режимах. Модели нано-механического осциллятора и джозефсоновский контакт представляют большой интерес, так как для этих систем достигнута высокая степень ангармоничности χ/γ , которая является характеристическим параметром для достижения квантовых эффектов.

Нелинейный осциллятор с $f(t) = \text{const}$ был исследован аналитически в работах [26,27]. В этом случае система имеет стационарное решение и при параметрах, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} \chi(\Delta + \chi) &< 0, \\ |\Delta + \chi|/0.5\gamma &> \sqrt{3}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\left[1 + \frac{27\chi\Omega_1^2}{(\chi + \Delta)^3} + \left(\frac{3\gamma/2}{\chi + \Delta} \right)^2 \right]^2 < \left[1 - 3 \left(\frac{\gamma/2}{\chi + \Delta} \right)^2 \right]^3,$$

проявляет бистабильность и гистерезисное поведение. Однако, в импульсном режиме, при котором $f(t) = \Omega \sum_n \exp(-(t - n\tau)^2/T^2)$ гамильтониан системы имеет явную временную зависимость, которая не может быть исключена в приближении вращающейся волны.

Уравнение (1) описывает динамику системы в квантовом режиме, а в полуклассическом пределе эта динамика описывается с помощью уравнения для безразмерной амплитуды:

$$d\alpha/dt = -i(\Delta + \chi(1 + 2|\alpha|^2))\alpha - if(t) - \gamma/2. \quad (4)$$

Далее, для исследования хаоса в полуклассическом пределе используется уравнение (4) в фазовом пространстве для безразмерных величин $X = \text{Re}(\alpha)$, $Y = \text{Im}(\alpha)$. Числа заполнения в полуклассическом пределе определяются по формуле $n = |\alpha|^2$. Что касается квантового анализа, то он проводится на основе численного решения уравнения матрицы плотности моды осциллятора в рамках метода диффузии квантового состояния [28]. Приложения метода для исследования квантово-оптических систем приведены в работах [11-16, 29-37].

3. Режимы квантового хаоса

Перейдем теперь к обсуждению квантового хаоса, решая численно уравнения (1) и (4). Выше было указано, что система имеет бистабильный режим при монохроматическом управлении ангармонического осциллятора, однако, известно, что в этом случае система не обладает хаотической динамикой. Тем не менее, следует ожидать, что хаотический режим может возникнуть для ангармонического осциллятора под управлением последовательностью гауссовских импульсов вблизи параметров, которые определяют бифуркационную точку в случае монохроматического возбуждения. Такая точка зрения подтверждается вычислениями. Таким образом, далее динамика системы рассматривается для параметров, удовлетворяющих неравенствам для реализации бистабильности:

$$\chi(\Delta + \chi) < 0,$$

$$|\Delta + \chi|/0.5\gamma > \sqrt{3},$$

а параметры импульсного возбуждения осциллятора выбираются таким образом, чтобы система оказалась в хаотическом режиме. Рассматриваются микроскопические и мезоскопические режимы, для которых отношение χ/γ порядка единицы.

На рис.1 приведены кривые, описывающие динамику чисел заполнения осциллятора для разных параметров импульса при одинаковых прочих параметрах на основе численного вычисления матрицы плотности. Как показывает анализ, возникновение хаотического режима системы зависит от параметров T и τ . Так, сравнивая три режима, приведенные на рис.1, можно прийти к заключению, что хаос реализуется только для параметров импульсов, приведенных на рис.1в. Вначале приведем результаты в полуклассическом рассмотрении, на основе экспоненты Ляпунова, которая определяется по формуле $L = (1/\Delta t) \times \ln[(x_2(t) - x_1(t))/\ln(x_{02}(t_0) - x_{01}(t_0))]$, где $x_1(t)$, $x_2(t)$ являются траекториями с разными начальными состояниями, $x_{01}(t_0)$, $x_{02}(t_0)$ — начальные значения, а $\Delta t = t - t_0$. При $L > 0$ система имеет хаотическую динамику, $L = 0$ свойственно стабильным консервативным системам, а $L < 0$ реализуется при диссипативных регулярных системах.

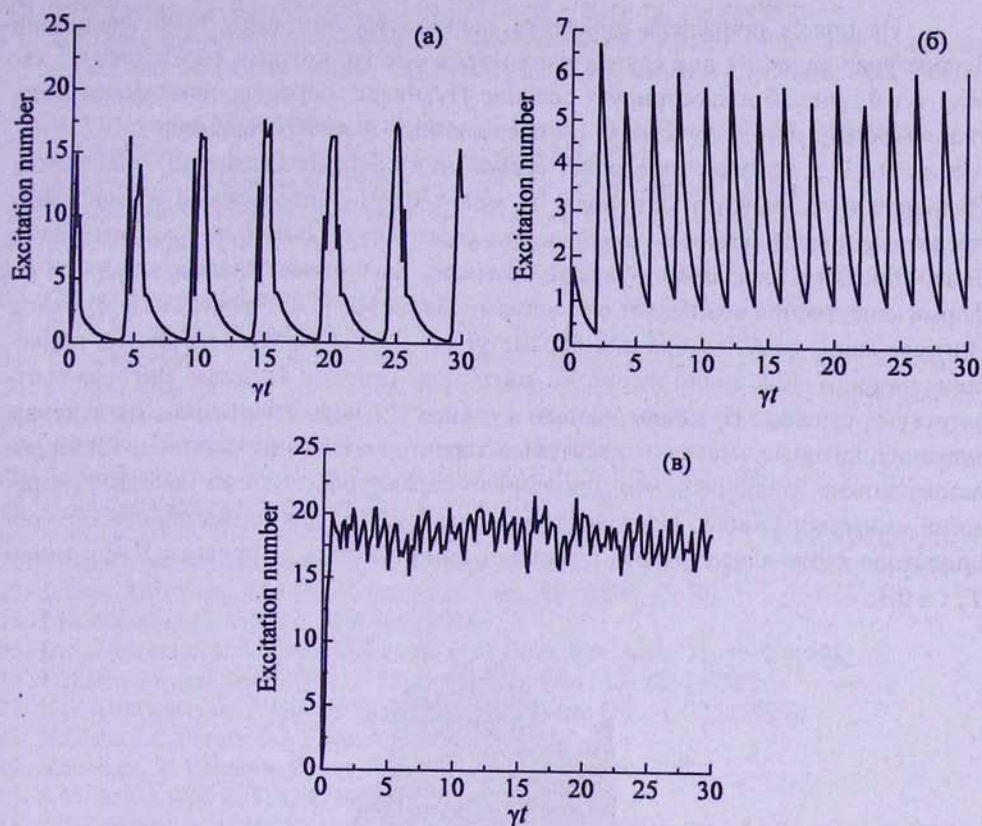


Рис.1. Число заполнения осциллятора при следующих параметрах: $\Delta/\gamma = -8$, $\chi/\gamma = 1$, $\Omega/\gamma = 80$ (а) $T = 0.5\gamma^{-1}$, $\tau = 5\gamma^{-1}$, (б) $T = 0.02\gamma^{-1}$, $\tau = 2\gamma^{-1}$, (в) $T = 0.02\gamma^{-1}$, $\tau = 0.2\gamma^{-1}$.

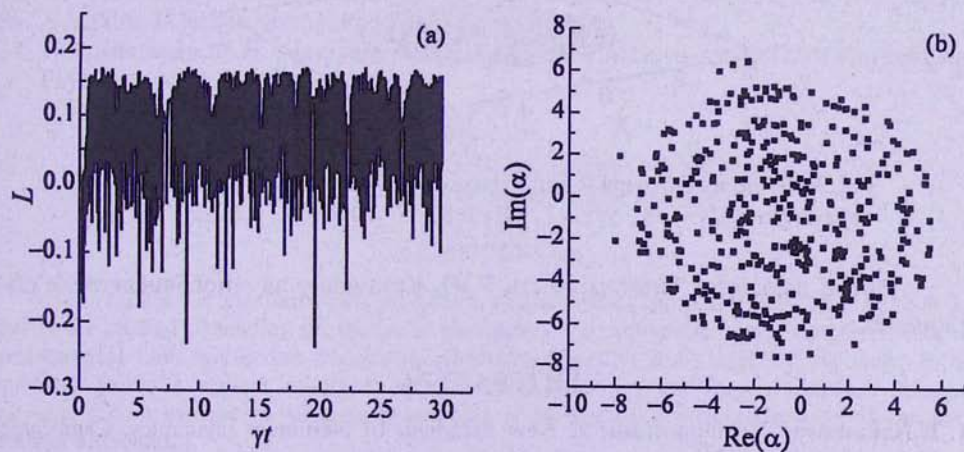


Рис.2. Динамика экспоненты Ляпунова (а) и сечение Пуанкаре (б) при следующих параметрах: $\Delta/\gamma = -8$, $\chi/\gamma = 1$, $\Omega/\gamma = 80$, $T = 0.02\gamma^{-1}$, $\tau = 0.2\gamma^{-1}$.

На рис.2а приведена динамика экспоненты Ляпунова, вычисленная на основе уравнения (4) для случая параметров рис.1в, которая соответствует хаосу, $L > 0$. Рис.2б иллюстрирует сечение Пуанкаре, определенное как множество точек (x_n, p_n) , полученных в определенные моменты времени $t_n = t_0 + n\tau$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, которое определяет странный аттрактор. Очевидно, что сечения Пуанкаре и экспонента Ляпунова не могут быть использованы в квантовом представлении. В фазовом пространстве хаотическая динамика системы может быть описана с помощью функции Вигнера, контурные сечения которого по форме качественно совпадают с сечениями Пуанкаре [12]. Вычисления функции Вигнера моды осциллятора для параметров, использованных на рис.1в, приведены на рис.3. Как видно из рис.3а, контурные сечения функции Вигнера соответствуют сечению Пуанкаре, однако функция Вигнера имеет также негативные значения, которые выявляют квантовый характер состояния системы. Таким образом, можно заключить, что для данных параметров система находится в режиме квантового хаоса. Исследования показали, что для ангармонического осциллятора хаотический режим возникает при коротких импульсах $T \ll \gamma$ и при $T/\tau \approx 0.1$.

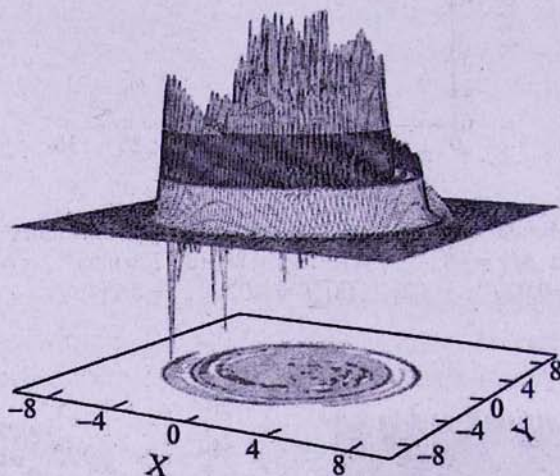


Рис.3. Функция Вигнера и контурное сечение функции Вигнера для параметров $\Delta/\gamma = -8$, $\chi/\gamma = 1$, $\Omega/\gamma = 80$, $T = 0.02\gamma^{-1}$, $\tau = 0.2\gamma^{-1}$.

Автор выражает благодарность Г.Ю. Крючкяну за многочисленные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. K.Nakamura. Quantum chaos: A New Paradigm of Nonlinear Dynamics. Cambridge University Press, 1994.
2. F.Haake. Quantum Signatures of Chaos. Berlin, Springer, 2000.
3. H.Mori, Y.Kuramoto. Dissipative Structure and Chaos. Berlin, Springer, 1998.
4. W.H.Zurek. Rev. Mod. Phys., 75, 715 (2003).

5. W.H.Zurek, J.P.Paz. Phys. Rev. Lett., 72, 2508 (1994); 75, 351 (1995).
6. T.V.Gevorgyan, A.R.Shahinyan, G.Yu.Kryuchkyan. Modern Optics and Photonics: Atoms and Structured Media, G.Kryuchkyan, G.Gurzadyan, A.Papoyan, eds., World Scientific, 2010, pp.60-77.
7. B.G.Klappauf, W.H.Oskay, et al. Phys. Rev. Lett., 81, 1203 (1998); 82, 241 (1999).
8. G.J.Milburn, C.A.Holmes. Phys. Rev. A, 44, 4704 (1991).
9. A.J.Scott, C.A.Holmes, G.J.Milburn. Phys. Rev. A, 61, 013401 (2000).
10. S.Chaudhury, A.Smith, B.E.Anderson, S.Ghose, P.S.Jesse. Nature, 461, 768 (2009).
11. H.H.Adamyan, S.B.Manvelyan, G.Yu.Kryuchkyan. Phys. Rev. A, 63, 022102 (2001).
12. H.H.Adamyan, S.B.Manvelyan, G.Yu.Kryuchkyan, Phys. Rev. E, 64, 046219 (2001).
13. G.Yu.Kryuchkyan, S.B.Manvelyan. Phys. Rev. Lett., 88, 094101 (2002).
14. G.Yu.Kryuchkyan, S.B.Manvelyan. Phys. Rev. A, 68, 013823 (2003).
15. T.V.Gevorgyan, A.R.Shahinyan, G.Yu.Kryuchkyan. Phys. Rev. A, 79, 053828 (2009).
16. T.V.Gevorgyan, A.R. Shahinyan, G.Yu.Kryuchkyan. Phys. Rev. A, 85, 053802 (2012).
17. G.Yu.Kryuchkyan, M.Jakob, A.S.Sargsian. Phys. Rev. A, 57, 2091 (1998).
18. M.Jakob, G.Yu.Kryuchkyan. Phys. Rev. A, 58, 767 (1998).
19. H.H.Adamyan, G.Yu.Kryuchkyan. Phys. Rev. A, 74, 023810 (2006).
20. G.Yu.Kryuchkyan, L.A.Manukyan. Phys. Rev. A, 69, 013813 (2004).
21. N.H.Adamyan, H.H.Adamyan, G.Yu.Kryuchkyan. Phys. Rev. A, 77, 023820 (2008).
22. A. Kowalewska-Kudlaszyk, J. K. Kalaga, W. Leonski. Phys. Lett. A, 373, 1334 (2009).
23. L.Guo, Zh.Zheng, Xin-Qi Li. Europhys. Lett., 90, 10011 (2010).
24. I.Fushman et al. Science, 320, 769 (2008).
25. Q.A.Turchette, C.J.Hood, W.Lange, et al. Phys. Rev. Lett., 75, 4710 (1995).
26. P.D.Drummond, D.F.Walls. J. Phys. A: Math. Gen., 13, 725 (1980).
27. K.V.Kheruntyan. J. Opt. B: Quantum Simclassical. Opt., 1, 225 (1999).
28. N.Gisin, I.C.Percival. J. Phys. A, 25, 5677 (1992).
29. R.Schack, T.A.Brunn. Comp. Phys. Commun., 102, 210 (1997).
30. S.M.Tan. J. Opt. B, 1, 424 (1999).
31. S.T.Gevorkyan, G.Yu.Kryuchkyan, N.T.Muradyan. Phys. Rev. A, 61, 043805 (2000).
32. K.V.Kheruntsyan, G.Yu. Kryuchkyan, N.T.Mouradyan, K.G.Petrosian. Phys. Rev. A, 57, 535 (1998).
33. D.A.Antonosyan, T.V.Gevorgyan, G.Yu.Kryuchkyan. Phys. Rev. A, 83, 043807 (2011).
34. G.Yu.Kryuchkyan, N.T. Muradyan. Phys. Lett. A, 286, 113 (2001).
35. G.Yu.Kryuchkyan, L.A.Manukyan, N.T.Muradyan, Opt. Commun., 190, 245 (2001).
36. A.Vukics, H.Ritsch. Europ. Phys. J. D, 44, 585 (2007).
37. H.H.Adamyan, N.H.Adamyan, N.T.Gevorgyan, T.V.Gevorgyan, G.Yu.Kryuchkyan. Phys. Part. Nuclei Lett., 5, 161 (2008).

QUANTUM CHAOS PRODUCTION IN ANHARMONIC OSCILLATOR UNDER TRAIN OF GAUSSIAN PULSES

A.R. SHAHINYAN

The regimes for quantum chaos production of anharmonic oscillator under train of Gaussian pulses are studied depending on the pulse parameters. The presented results are derived in the semiclassical limit within the framework of Poincaré section and Lyapunov exponent. In the quantum limit the regimes of chaos are considered based on the Wigner function. Relations between system parameters when quantum chaos is observable in mesoscopic level of excitation number are found.