Известия НАН Армении, Физика, т.48, №1, с.3-19 (2013)

УДК 530.12; 531.011

КАНОНИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ И КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ

В.М. МЫХИТАРЯН†

Институт физических исследований НАН Армении, Аштарак

†e-mail: vm@ipr.sci.am

(Поступила в редакцию 1 февраля 2012 г.)

Рассмотрены канонические (не параметрические) решения вариационной задачи для интегральных функционалов и приведены канонические решения вариационных задач механики в пространствах Минковского. На основе объединения вариационных принципов наименьшего действия, потока и гиперпотока получены канонически-инвариантные уравнения для переменной энергии-импульса. Из этих уравнений выведены уравнения для функции действия и волновой функции как общее решение объединенной вариационной задачи механики. Уравнения применимы для описания разных типов частиц и взаимодействий и обобщены в рамках подходов общей теории относительности.

1. Введение

Как известно, поведение механической системы определяется минимизацией действия S:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})\, dt \to \min, \tag{1}$$

функционала от лагранжиана L – выражения, составленного из описывающих систему кинематических переменных и динамических констант [1]. Подход сводит описание и формулировку физических закономерностей к описанию только кинематическими переменными – обобщенной координатой и ее производными.

С введением понятия обобщенной координаты и скорости появилась возможность универсальным образом описать разнородные физические явления и выявить поведение системы с помощью одинаковых уравнений для обобщенной координаты и скорости. Вариационный принцип позволил в самом общем виде сформулировать пространственно-временные свойства системы и ввел в физику одно из основных понятий – действие.

Различные физические задачи формулируются как вариационные задачи для интегрального функционала от векторных функций (полей). Например, задача нахождения траектории L перемещения тела в заданном поле сил $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ из точки $\mathbf{r}_1$ в точку $\mathbf{r}_2$ (рис.1а), при котором совершается минимальная работа A:

$$A = \int\limits_{L(\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \to \min. \tag{2}$$

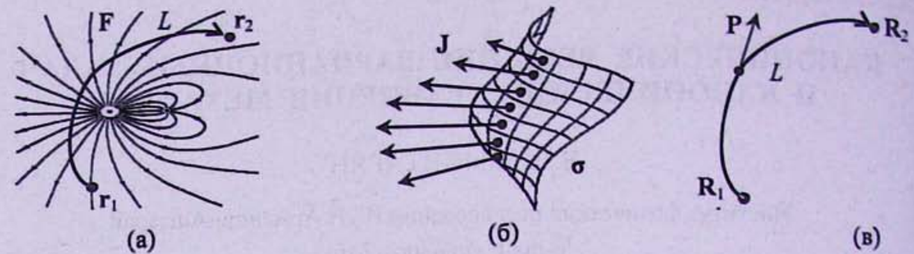

Рис.1. Вариационные задачи нахождения траектории (а), поверхности (б) и четырехмерной кривой (в).

Другой пример – задача нахождения поверхности $\boldsymbol{\sigma}$, ограниченной замкнутой кривой L с заданной плотностью тока (жидкости) $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ (рис.1б), при которой обеспечивается минимальный поток K:

$$K = \iint\limits_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \to \min. \tag{3}$$

Обобщением первого примера является принцип наименьшего действия в механике. Если система описывается четырехмерным обобщенным импульсом $\mathbf{P} = (\varepsilon, \mathbf{p})$ и координатой $\mathbf{R} = (\tau, \mathbf{r})$, то траектория движения L из точки $\mathbf{R}_1$ в точку $\mathbf{R}_2$ (рис.1в) минимизирует действие S:

$$S = -\int\limits_{L(\mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_2)} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = -\int\limits_{L(\tau_1, \mathbf{r}_1) \to (\tau_2, \mathbf{r}_2)} (\varepsilon d\tau - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r}) \to \min. \tag{4}$$

Известный путь нахождения общего аналитического решения вариационной задачи был предложен Эйлером, а затем (в дополненном и более общем виде) Лагранжем. Решение Эйлера основывалось на возможности представления интегрального функционала в параметрической форме. Например, в последнем примере действие можно представить в виде

$$\begin{aligned} S &= -\int\limits_{\mathbf{R}_1}^{\mathbf{R}_2} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{R} = -\int\limits_{\mathbf{R}_1}^{\mathbf{R}_2} (\varepsilon d\tau - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r}) = -\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\varepsilon d\tau - \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right) d\tau = \\ &= -\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} (\varepsilon - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{p}) d\tau = -\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} L \, d\tau. \end{aligned} \tag{5}$$

После этого можно использовать решение Эйлера–Лагранжа для получения уравнения движения Ньютона в параметрической форме:

$$(d/d\tau)(\partial L/\partial \boldsymbol{\beta}) = \partial L/\partial \mathbf{r}, \tag{6}$$

где в параметрическом представлении три переменные $\mathbf{r} = (x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ находятся из системы трех дифференциальных уравнений второго порядка.

Введение Гамильтоном понятия канонических переменных и создание новой (гамильтоновой) механики потребовали как новое представление действия, так и новое решение вариационной задачи. Канонические переменные, наравне с кинематическими переменными – обобщенной координатой и скоростью, включали и динамические переменные – обобщенный импульс и энергию. Введенные Гамильтоном и названные его именем выражение энергии

$$\mathrm{H} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{p} - L(t,\mathbf{r},\mathbf{v}) \tag{7}$$

и канонические уравнения

$$\mathbf{v} = \partial\mathrm{H}/\partial\mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\partial\mathrm{H}/\partial\mathbf{r} \tag{8}$$

стали основой построения гамильтоновой, а затем и квантовой механики.

На основе вариационного принципа уравнения Гамильтона (8) можно вывести минимизацией действия – определенного в канонических переменных функционала

$$S = -\int\left(\mathrm{H}dt - \mathbf{p}\cdot d\mathbf{r}\right), \tag{9}$$

независимо варьируя координаты и импульс [1]. При этом оказывается, что в рамках преобразований канонические переменные являются канонически сопряженными и поэтому взаимно представляемыми [2]. Эти свойства особенно важны как в релятивистских подходах, когда время и пространственные координаты выступают равноправно, так и в квантовой механике, когда формулируется равноценность координатного и импульсного представлений гамильтониана или волнового уравнения.

С математической точки зрения, введение канонических (динамических) переменных – это способ представления системы s дифференциальных уравнений Эйлера–Лагранжа второго порядка в виде системы $2s$ линейных дифференциальных уравнений первого порядка [1].

Вся нерелятивистская квантовая механика была построена на основе всего лишь одной канонической переменной H, причем производная по времени входит в первой степени, а по пространственным координатам – во второй. Такое положение в нерелятивистской квантовой механике возникло вследствие нарушения каноничности в представлении гамильтониана системы. Конкретно, вместо канонического представления гамильтониана в виде (7),

$$\hat{\mathrm{H}} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{p} - L(t,\mathbf{r},\mathbf{v}) = -\mathbf{v}\cdot\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right) - L(t,\mathbf{r},\mathbf{v}), \tag{10}$$

в нерелятивистской квантовой механике оно преобразовано в выражение

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{H}} &= \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{p}} + L(t,\mathbf{r},\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{p}} - \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + U(t,\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\hat{\mathbf{p}} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(t,\mathbf{r}) = \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(t,\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{r}^2} + U(t,\mathbf{r})\end{aligned} \tag{11}$$

и представлено оператором второго порядка. При этом одна из канонических переменных (скорость) исключена из выражения некорректной заменой другой канонической переменной импульса.

В подходе Гамильтона вариационная задача для действия формулируется на основе не параметризованного интегрального функционала от четырехмерной векторной функции (4) и для решения этой вариационной задачи известными способами приходится прибегать к некоему параметрическому представлению переменных и функционала (5).

Пуанкаре и позже Минковский, для сохранения равноправия канонических переменных и инвариантного представления действия, в качестве параметра использовали четырехмерный интервал [3]

$$S=-\int_{\mathbf{R}_1}^{\mathbf{R}_2}\mathbf{P}\cdot d\mathbf{R}=-\int_{\mathbf{R}_1}^{\mathbf{R}_2}\left(\varepsilon d\tau-\mathbf{p}\cdot d\mathbf{r}\right)=-\int_{\mathbf{R}_1}^{\mathbf{R}_2}\left(\varepsilon\frac{d\tau}{ds}-\mathbf{p}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)=-\int_{s_1}^{s_2}\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{P}\right)ds=-\int_{s_1}^{s_2}Ids. \quad (12)$$

В этом случае решение Эйлера–Лагранжа для четырехмерных уравнений движения Пуанкаре в параметрической форме имеет вид

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial I}{\partial\mathbf{V}}=\frac{\partial I}{\partial\mathbf{R}}, \quad (13)$$

где четыре переменные $\mathbf{R}=\left(\tau(s),x(s),y(s),z(s)\right)$ в параметрическом представлении находятся из системы четырех дифференциальных уравнений второго порядка. Хотя и развитый Пуанкаре подход сохраняет равноправие четырех координат, а действие имеет ковариантное представление, однако отсутствуют явные уравнения для канонических переменных, а их однозначное восстановление из параметрических представлений невозможно.

Процедуры исключения параметра из решений вариационной задачи составили основную часть последующего развития вариационного исчисления и привели к созданию теории Гамильтона–Якоби, интегральных инвариантов (Гильберт, Пуанкаре, Картан) и других [4]. Суть развитых подходов заключалась в нахождении таких алгебраических, дифференциальных или интегральных соотношений, чтобы, несмотря на параметрическое представление переменных, сами соотношения не зависели бы от параметра (были бы инвариантны относительно параметрического представления).

Построение (восстановление) поля для функционала из семейства экстремалей в параметрическом представлении на основе интегрального инварианта было предложено Гильбертом в 1900–1906 гг. [4]. Свойствами интеграла Гильберта обусловлено, в частности, равенство нулю всех скобок Лагранжа, составленных с помощью отвечающих этому семейству экстремалей канонических переменных. Методы построения поля для функционала на основе интегральных инвариантов и их применение для описания физических систем нашли свое последующее развитие в работах Пуанкаре и Картана [5]. Хотя эти подходы являются всего лишь неявным выражением свойств канонических переменных системы, на сегодня коммутационные соотношения и интегральные инварианты являются одним из основных методов построения современной физической теории.

Если же рассматривать, например, уравнения Максвелла как решение вариационной задачи, то данное решение имеет канонический вид – не содержит ни дополнительных параметров, ни скорости, ни других полных производных. Такого же характера и уравнение непрерывности, и волновое уравнение. И если такие канонически заданные уравнения должны быть получены из решения вариационной задачи, то возникает очевидная необходимость или найти поле из параметрического представления семейства экстремалей исключением параметра, или найти путь для канонического (непараметрического) решения хотя бы для данной конкретной вариационной задачи.

И действительно, именно для представления уравнений Максвелла как решение вариационной задачи используется непосредственный путь решения данной конкретной вариационной задачи [6], отличный от параметрического подхода Эйлера–Лагранжа. Здесь вариация и необходимое условие минимума интегрального функционала представлены в непосредственной (канонической) форме с помощью применения интегральной теоремы Гаусса – без применения каких либо процедур параметризации и, соответственно, без применения решения Эйлера–Лагранжа.

Если бы имелось общее каноническое решение, не содержащее никакого дополнительного параметра и не использующее одну из переменных в качестве параметра, то параметризация стала бы не принципиальной необходимостью для решения самой вариационной задачи, а всего лишь затребованным математическим оформлением конечного результата – как удобное представление решения для описания конкретных систем. Тогда и потребность в каких-то параметрических инвариантах или коммутационных соотношениях полностью отпала бы, так как каноническое решение уже не содержит ничего другого, кроме независимо и равноправно представленных канонических переменных.

Параметрическое представление функционалов и решение Эйлера–Лагранжа, конечно, являются весьма универсальным и мощным средством для решения очень широкого круга математических и физических задач, но необходимо также иметь каноническое решение канонически сформулированной вариационной задачи. Речь идет о решении, где явно и равноправно фигурируют только канонические переменные (без лишних параметров или выделения одной из переменных в качестве параметра), что позволило бы единым образом сформулировать вариационные принципы и решение задач физики в канонически-инвариантной форме.

2. Каноническое решение вариационных задач

Пусть задан интегральный функционал вида $S=\int\limits_{L\,(\mathbf{R}_1\to\mathbf{R}_2)}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$, определенный на n-мерной кривой L, в области $\mathbf{R}\subset D\subset\mathbb{R}^n$, от векторной функции $\mathbf{F}(\mathbf{R})-\mathbf{R}\equiv(x_1,x_2,\ldots x_n)\mathbf{F}(\mathbf{R})\equiv(f_1(\mathbf{R}),f_2(\mathbf{R}),\ldots f_n(\mathbf{R}))$. Вариация функционала

δS для кривых L' и L'', соединяющих точки $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ (рис.2а,б,в), есть

$$\delta S = \int\limits_{L'\,(\mathbf{R}_1\to\mathbf{R}_2)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} - \int\limits_{L''\,(\mathbf{R}_1\to\mathbf{R}_2)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \int\limits_{L'\,(\mathbf{R}_1\to\mathbf{R}_2)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} + \int\limits_{L''\,(\mathbf{R}_2\to\mathbf{R}_1)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \int\limits_{L=L'\cup L''} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}, \tag{14}$$

где L – замкнутая кривая, составленная из кривых L' и L''.

Из обобщенной теоремы Стокса для многомерного криволинейного интеграла по замкнутой кривой L и ограниченной этой кривой произвольной n-мерной поверхности $\delta\sigma$ имеем

$$\oint\limits_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \oint\limits_L f_i dx_i = \frac{1}{2}\iint\limits_{\delta\sigma}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right) d\sigma_{ik}. \tag{15}$$

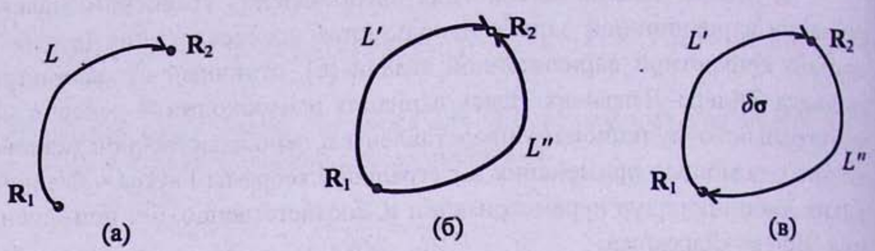

Рис.2. Кривая L (а), на которой определен функционал, кривые L' и L'' (б), на которых определена вариация функционала, и замкнутая кривая $L = L' + L''$ (в), на которой вариация функционала представляется как интеграл по замкнутой кривой L.

Таким образом, вариация криволинейного интегрального функционала равна поверхностному интегралу по замкнутой кривой. Это позволяет определить вариацию криволинейного интеграла вблизи произвольно выбранной точки $\mathbf{R}$ заданной (искомой) кривой (рис.3а).

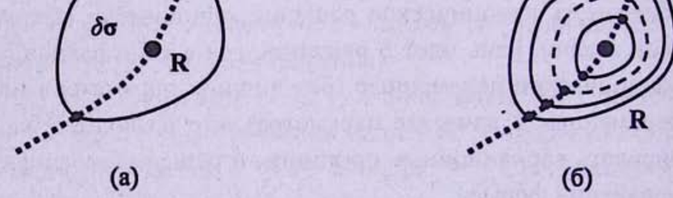

Рис.3. Кривая L (а) и последовательность замкнутых кривых (б) вокруг точки $\mathbf{R}$.

Рассматривая последовательность замкнутых кривых L вокруг точки $\mathbf{R}$ (рис.3б), участки которых стремятся к рассматриваемой точке $\mathbf{R}$, в пределе имеем

$$\delta S = \oint_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \frac{1}{2}\iint_{\delta\sigma}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)d\sigma_{ik} \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)\delta\sigma_{ik}, \tag{16}$$

что является определением ротора. Как видим, в качестве переменной варьирования для данного функционала выступает площадь $\delta\boldsymbol{\sigma}$, а линейная по $\delta\boldsymbol{\sigma}$ часть вариации определяется последним выражением в (16). Равенство нулю компонент ротора и есть уравнение искомой кривой, на которой функционал от криволинейного интеграла имеет экстремум. Эти, в общем случае, тензорные соотношения запишем в виде

$$\left[\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}\times\mathbf{F}\right] = 0. \tag{17}$$

Для интегральных функционалов в n-мерных пространствах с элементом интегрирования $dx_{i_1}, dx_{i_2}, \ldots, dx_{i_n}$ $(i_j = 1,2,\ldots n)$ более высокого порядка k $(n \ge k \ge 1)$, применимы соответствующие интегральные теоремы. Например, вариация n-мерного интегрального функционала по $n-1$ многообразиям $d\boldsymbol{\Sigma} = (dx_2dx_3dx_4\ldots dx_n, dx_1dx_3dx_4\ldots dx_n, dx_1dx_2dx_3\ldots dx_{n-1})$

$$D = \overbrace{\int\ldots\int_{\Sigma}}^{n-1} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \min;$$

$$\delta D = \overbrace{\int\ldots\int_{\Sigma'}}^{n-1} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\Sigma} - \overbrace{\int\ldots\int_{\Sigma''}}^{n-1} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \overbrace{\int\ldots\int_{\Sigma'}}^{n-1} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\Sigma} + \overbrace{\int\ldots\int_{-\Sigma''}}^{n-1} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \tag{18}$$

$$= \overbrace{\int\ldots\int_{\Sigma}}^{n-1} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \overbrace{\int\ldots\int_{\delta\Omega}}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} d\Omega$$

равна, по теореме Гаусса, интегралу от дивергенции по n-мерному объему $d\Omega = dx_1dx_2dx_3\ldots dx_n$. Тогда решение вариационной задачи для данного функционала выразится уравнением искомой кривой в виде

$$\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{R} = \partial f_i/\partial x_i = 0. \tag{19}$$

В остальных случаях для многомерных интегральных функционалов не представляется возможным предложить какой-то общий вид интегральных теорем. В зависимости от меры и четности пространства они имеют различные формулировки и представления.

Для наглядности, применим полученные результаты для решения приведенных в начале работы первых двух примеров (2) и (3). Для первого имеем $\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$. Движение по этим траекториям образует семейство экстремалей (поле)

$$\mathbf{F} = \partial\varphi/\partial\mathbf{r}, \tag{20}$$

где $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ – произвольная скалярная функция (скалярный потенциал). Например, для силового поля $\mathbf{F}$, задаваемого выражением

$$\mathbf{F}=\left(ay^3+by,\ \ cx^3+dx,\ \ 0\right);\ \Rightarrow\ \operatorname{rot}\mathbf{F}=\left(0,\ \ 0,\ \ 3cx^2-3ay^2+d-b\right),$$

искомые траектории определяются уравнением

$$x^2-(a/c)y^2=(b-d)/3c.$$

Отметим, что этим определяются точки (кривые) равновесия. Семейство тех же точек (или кривых) можно задать и в виде системы уравнений

$$ay^3+by=\partial\varphi/\partial x,\ \ cx^3+dx=\partial\varphi/\partial x,\ \ 0=\partial\varphi/\partial x.$$

Для второго примера (3) имеем $\operatorname{div}\mathbf{J}=0$, а искомые поверхности образуют семейство экстремалей

$$\mathbf{J}=\operatorname{rot}\mathbf{A}, \tag{21}$$

где $\mathbf{A}=\mathbf{A}(\mathbf{r})$ – произвольная векторная функция (векторный потенциал). Например, для $\mathbf{J}=J_0\left(x^3/a^2-x,y^2/a^3-y,z^3/c^2-z\right)$ получаем $\operatorname{div}\mathbf{J}=3J_0\times$ $\times\left(x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2-1\right)=0$. Искомые поверхности $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$. Это уравнение определяет участки (поверхности) ламинарного (безвихревого) течения. Семейство кривых (или точек) задается в виде системы уравнений $\left(x^3/a^2-x,y^3/b^2-y,z^3/c^2-z\right)=\operatorname{rot}\mathbf{A}$.

3. Интегральные функционалы в пространствах Минковского

Ввиду важности физических приложений, более детально рассмотрим интегральные функционалы в четырехмерных пространствах Минковского. В этих пространствах возможны физически значимые четыре рода интегрирования [6].

1) Интеграл по кривой в 4-пространстве (криволинейный интеграл). Элементом интегрирования является элемент длины $d\mathbf{R}=\{dx^i\}=\left(dx^0,dx^1,dx^2,dx^3\right)$. Дифференциальная форма интегрирования dS представляется как скалярное (ковариантное) произведение 4-векторной функции $\mathbf{A}(\mathbf{R})$ и 4-вектора $d\mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}
dS&=\mathbf{A}\cdot d\mathbf{R}=A^0dx^0-A^1dx^1-A^2dx^2-A^3dx^3=A_idx^i=A^idx_i,\\
S&=\int\mathbf{A}\cdot d\mathbf{R}=\int\left(A^0dx^0-A^1dx^1-A^2dx^2-A^3dx^3\right)=\int A_idx^i=\int A^idx_i.
\end{aligned}\tag{22}$$

2) Интеграл по поверхности (двумерной) в 4-пространстве (поверхностный интеграл). В 4-пространстве элемент поверхности определяется антисимметричным тензором второго ранга $df^{ik}=dx^idx'^k-dx^kdx'^i$. Можно построить тензор $d\sigma^{ik}=(1/2)e^{iklm}df_{lm}$, дуальный тензору df^{ik}, у которого 6 значимых элементов:

$$d\sigma^{ik}=\begin{pmatrix}0 & dx^1dx^0 & dx^2dx^0 & dx^3dx^0\\ -dx^0dx^1 & 0 & -dx^2dx^1 & dx^3dx^1\\ -dx^0dx^2 & dx^1dx^2 & 0 & -dx^3dx^2\\ -dx^0dx^3 & -dx^1dx^3 & dx^2dx^3 & 0\end{pmatrix}=(d\mathbf{p},d\mathbf{a}), \tag{23}$$

который можно представить в виде полярного $d\mathbf{p}=\left(dx^0dx^1, dx^2dx^0, dx^3dx^0\right)$ и аксиального $d\mathbf{a}=\left(dx^2dx^1, dx^3dx^1, dx^3dx^2\right)$ дуальных векторов. Дифференциальная форма интегрирования dD для антисимметричного тензора F^{ik} представляется как ковариантное произведение

$$dD = F^{ik}d\sigma_{ik}; \quad D=\iint F^{ik}d\sigma_{ik}. \tag{24}$$

3) Интеграл по гиперповерхности, т.е. по трехмерному многообразию. Элементом интегрирования является элемент гиперповерхности (3-объема) $d\mathbf{\Sigma}=dS^i=\left\{dx^i dx^{\prime j} dx^{\prime\prime k}\right\}=\left(dx^1dx^2dx^3, dx^0dx^2dx^3, dx^0dx^1dx^3, dx^0dx^1dx^2\right)$. Дифференциальная форма интегрирования dS представляется как скалярное (ковариантное) произведение 4-векторной функции $\mathbf{A}(\mathbf{R})$ и 4-вектора $d\mathbf{\Sigma}$:

$$\begin{aligned}
&d\Phi=\mathbf{A}\cdot d\mathbf{\Sigma}=A^0dS^0-A^1dS^1-A^2dS^2-A^3dS^3=A^idS_i=A_idS^i,\\
&\Phi=\iiint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{\Sigma}=\iiint\left(A^0dS^0-A^1dS^1-A^2dS^2-A^3dS^3\right)=\iiint A^idS_i=\iiint A_idS^i
\end{aligned} \tag{25}$$

4) Для интеграла по 4-обьему элементом интегрирования является скаляр $d\Omega=dx^0dx^1dx^2dx^3$.

Соответственно, существуют интегральные теоремы преобразования между этими интегралами.

а) Интеграл по четырехмерной замкнутой кривой преобразуется в интеграл по охватываемой ею поверхности путем замены $dx^i \to df^{ik}\,\partial/\partial x^k$:

$$\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{R}=\oint A_i dx^i=\iint \frac{\partial A_i}{\partial x^k}df^{ki}=\frac{1}{2}\iint\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)df^{ik}, \tag{26}$$

что является обобщением теоремы Стокса.

б) Интеграл по четырехмерной замкнутой поверхности преобразуется в интеграл по охватываемой ею гиперповерхности (3-объему) путем замены элемента интегрирования $d\sigma^{ik} \to dS_i\,\partial/\partial x^k - dS_k\,\partial/\partial x^i$:

$$\frac{1}{2}\oiint F^{ik}d\sigma_{ik}=\frac{1}{2}\iiint\left(dS_i\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}-dS_k\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^i}\right)=\iiint\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}dS_i. \tag{27}$$

в) Интеграл по замкнутой гиперповерхности (3-объему) можно преобразовать в интеграл по заключенному в ней 4-объему путем замены элемента интегрирования $dS^i \to d\Omega\,\partial/\partial x^i$:

$$\oint\!\!\!\oint\!\!\!\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\oint\!\!\!\oint\!\!\!\oint A^i dS_i=\iiiint\frac{\partial A^i}{\partial x^i}d\Omega=\iiiint\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{R}}d\Omega, \tag{28}$$

что является обобщением теоремы Гаусса.

Для физических приложений можно сформулировать вариационные задачи на основе перечисленных интегральных функционалов для четырехмерного вектора (4-вектор энергии-импульса $\mathbf{P}$) и антисимметричного 4-тензора (антисимметричные 4-тензоры электромагнитного поля $F^{ik}=\left[(\partial/\partial\mathbf{R})\times\mathbf{A}\right]=$ $=(\mathbf{E},-\mathbf{B})$ и момента $M^{ik}=\left[\mathbf{R}\times\mathbf{P}\right]=\left\{x_ip_k-x_kp_i\right\}=(\mathbf{T},-\mathbf{M})$).

4. Каноническое решение вариационных задач механики

А. Принцип наименьшего действия. Выражение действия по Гамильтону представляется в виде

$$S=-\int_{\mathbf{R}_1}^{\mathbf{R}_2}\mathbf{P}\cdot d\mathbf{R}=-\int_{(\tau_1,\mathbf{r}_1)}^{(\tau_2,\mathbf{r}_2)}\left(\varepsilon d\tau-\mathbf{p}\cdot d\mathbf{r}\right)\to\min, \tag{29}$$

где переменная $\mathbf{P}=(\varepsilon,\mathbf{p})$ – четырехмерный вектор энергии-импульса. Варьируя, в соответствии с (14) имеем

$$\delta S=-\int_{L'(\mathbf{R}_1\to\mathbf{R}_2)}\mathbf{P}\cdot d\mathbf{R}+\int_{L''(\mathbf{R}_1\to\mathbf{R}_2)}\mathbf{P}\cdot d\mathbf{R}=-\left(\int_{L'(\mathbf{R}_1\to\mathbf{R}_2)}\mathbf{P}\cdot d\mathbf{R}+\int_{L''(\mathbf{R}_2\to\mathbf{R}_1)}\mathbf{P}\cdot d\mathbf{R}\right)=-\oint_L\mathbf{P}\cdot d\mathbf{R}. \tag{30}$$

Из обобщенной теоремы Стокса (26) для четырехмерного интеграла по замкнутой кривой $L=L'+L''$ с длиной l и поверхностью $\delta\sigma$ имеем

$$\delta S=\oint_L P_i dx^i=\iint_{\delta\sigma}\frac{\partial P_k}{\partial x^i}d\sigma^{ik}=\frac{1}{2}\iint_{\delta\sigma}\left(\frac{\partial P_k}{\partial x^i}-\frac{\partial P_i}{\partial x^k}\right)d\sigma^{ik}. \tag{31}$$

Вариация действия δS на истинных траекториях равна нулю, поэтому для точек истинной траектории имеем

$$\delta S=\oint_L P_i dx^i=\frac{1}{2}\iint_{\delta\sigma}\left(\frac{\partial P_k}{\partial x^i}-\frac{\partial P_i}{\partial x^k}\right)d\sigma^{ik}\approx\left(\frac{\partial P_k}{\partial x^i}-\frac{\partial P_i}{\partial x^k}\right)d\sigma^{ik}=0. \tag{32}$$

Из независимости компонент вариации $d\sigma^{ik}$ следует равенство нулю каждого слагаемого выражения, которое составлено из компонент четырехмерного ротора и соответствующего $d\sigma^{ik}$. Равенство нулю компонент четырехмерного ротора обобщенного импульса можно выразить в виде векторных соотношений

$$\left[\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}\times\mathbf{P}\right]=\begin{cases}\partial\mathbf{p}/\partial\tau+\partial\varepsilon/\partial\tau=0,\\-\operatorname{rot}\mathbf{p}=0.\end{cases} \tag{33}$$

Отметим, что в данном случае вариационная задача сформулирована без параметризации интегрального функционала и решение представлено в виде системы шести дифференциальных уравнений первого порядка. Соответствующей параметризацией этих уравнений или параметризацией интегрального функционала получатся уравнения Эйлера–Лагранжа – система трех дифференциальных уравнений второго порядка.

Таким образом, вместо канонизации уравнений Эйлера–Лагранжа введением новых переменных энергии и импульса, сформулировано и найдено решение вариационной задачи в канонической форме. То есть определен интегральный функционал и получено решение непосредственно для канонических переменных импульса и энергии.

Для физической задачи это принципиально важно, так как представление параметрических уравнений Эйлера–Лагранжа второго порядка системой уравнений первого порядка не является явным и однозначным. Из всех представлений уравнения Эйлера–Лагранжа в виде системы уравнений первого порядка именно полученное явное представление (33) является каноническим.

Б. Принцип наименьшего потока (тензорные поля $F^{ik} = (\mathbf{E}, -\mathbf{B})$ и момент $M^{ik} = [\mathbf{R} \times \mathbf{P}]$. Если в четырехмерном пространстве система описывается полем, заданным антисимметричным тензором $F^{ik} = (\mathbf{E}, -\mathbf{B})$, то поток поля через поверхность заданной замкнутой кривой L, в соответствии с (24), описывается интегралом

$$D = \iint F^{ik} d\sigma_{ik} \to \min. \tag{34}$$

Вариационная задача нахождения поверхности, которая минимизирует функционал (34), решается представлением вариации интегрального функционала по четырехмерной замкнутой поверхности $\mathbf{S}$ интегралом по охватываемой ею гиперповерхности Σ (3-объему) в соответствии с (27):

$$\begin{aligned}\delta D &= \frac{1}{2}\iint\limits_{\mathbf{S}'} F^{ik} d\sigma_{ik} - \frac{1}{2}\iint\limits_{\mathbf{S}''} F^{ik} d\sigma_{ik} = \frac{1}{2}\iint\limits_{\mathbf{S}'} F^{ik} d\sigma_{ik} + \frac{1}{2}\iint\limits_{-\mathbf{S}''} F^{ik} d\sigma_{ik} = \\ &= \frac{1}{2}\oiint\limits_{\mathbf{S}} F^{ik} d\sigma_{ik} = \iiint\limits_{\Sigma} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} d\Sigma_i,\end{aligned} \tag{35}$$

что при представлении поля дуальными векторами $F^{ik} = (\mathbf{E}, -\mathbf{B})$ выражается уравнениями поля

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = \begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{r}} = 0, \\ \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \tau} - \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0. \end{cases} \tag{36}$$

Если антисимметричный тензор F^{ik} представлен компонентами четырехмерного ротора от вектора $\mathbf{P}$ в виде $F^{ik} = \partial P^k / \partial x_i - \partial P^i / \partial x_k$ и поля представлены как

$$\mathbf{E} = -\partial \mathbf{p}/\partial \tau - \partial \varepsilon / \partial \mathbf{r}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{p}, \tag{37}$$

то

$$\partial \mathbf{E}/\partial \tau = \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad \partial \mathbf{E}/\partial \mathbf{r} = 0, \quad \partial \mathbf{B}/\partial \tau = -\operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad \partial \mathbf{B}/\partial \mathbf{r} = 0, \tag{38}$$

и для обобщенного импульса получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \mathbf{r}^2} &= \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}}\right), \\ \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}^2} &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}}\right).\end{aligned} \tag{39}$$

В. Принцип наименьшего гиперпотока (переноса, перераспределения по трехмерным объемам). Уравнение непрерывности является каноническим решением вариационной задачи при нахождении минимального потока четырехмерного вектора энергии-импульса $\mathbf{P}$ через гиперповерхность – гиперпотока:

$$\begin{aligned}
&\Phi = \iiint\limits_{\Sigma'} \mathbf{P}\cdot d\boldsymbol{\Sigma} \to \min, \\
&\delta\Phi = \iiint\limits_{\Sigma'} \mathbf{P}\cdot d\boldsymbol{\Sigma} - \iiint\limits_{\Sigma'} \mathbf{P}\cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \iiint\limits_{\Sigma'} \mathbf{P}\cdot d\boldsymbol{\Sigma} + \iiint\limits_{-\Sigma'} \mathbf{P}\cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \\
&= \oiiint\limits_{\Sigma} \mathbf{P}\cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \iiiint \frac{\partial P_i}{\partial x_i} d\Omega = 0,
\end{aligned} \tag{40}$$

что в виде уравнения непрерывности для обобщенного импульса

$$\partial\mathbf{P}/\partial\mathbf{R} = \partial\varepsilon/\partial\tau + \operatorname{div}\mathbf{p} = 0 \tag{41}$$

выражает закон сохранения энергии, заряда и калибровочное соотношение Лоренца для потенциалов поля.

5. Представление систем в кинематическом и динамическом пространствах

Суммируя вышеизложенное и результаты работы [8], представление механических систем в общем случае можно описать следующим образом.

Физические системы представляются в координатном $\mathbf{R} = (\tau, \mathbf{r})$ и импульсном $\mathbf{Q} = (\varsigma, \mathbf{q})$ (кинематическом и динамическом) пространствах и описываются кинематическими и динамическими (каноническими) переменными $(\mathbf{R}, \mathbf{V}, \ldots)$ и $(\mathbf{Q}, \mathbf{U}, \ldots)$ с размерностями [см] и [эрг с/см], соответственно. Эти пространства должны быть взаимно представляемы и равноценны при описании свойств физической системы.

Более общее представление с помощью метрического тензора имеет вид

$$\begin{aligned}
&ds^2 = d\varsigma^2 - d\mathbf{q}^2 = \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2} g_{ik} dx^i dx_k = I^2(x)\frac{\varepsilon^2}{\lambda^2}\left(d\tau^2 - d\mathbf{r}^2\right), \\
&g_{00} = I^2(x); \quad \left(g_{ik} \to I^2(x) g_{ik}\right).
\end{aligned} \tag{42}$$

Действие является линейным элементом в импульсном пространстве, а принцип минимума действия сводится к минимизации интервала в импульсном пространстве.

В сущности, характерной физической величиной является инвариант системы $I(x)$, отражающий пространственно-временные свойства (кривизну пространства в данной точке $R = I(x)$) для рассматриваемой частицы. Здесь, как и в общей теории относительности, задача сводится к свойствам геометрии пространства-времени и свойств отображения (координатного представления) импульсного пространства (метрическое соответствие).

Такое соответствие является метрическим, кинематическим соответствием. Сопряженность пространств должна выражаться также соответствием дифференциальных (вариационных) свойств линий (траекторий), поверхностей и гиперповерхностей, описывающих динамические характеристики физической системы в состоянии движения. Такое соответствие является дифференциальным, динамическим соответствием.

Соответственно, представление физической системы в кинематическом и динамическом пространствах должно в полной мере отражать метрическое и дифференциальное соответствие кинематического и динамического пространств.

Как было показано выше, физические и геометрические свойства этих сопряженных пространств в полной мере могут быть описаны в рамках вариационных подходов.

6. Объединение вариационных задач механики. Уравнения действия и волновой функции

Физические характеристики системы и соответствие кинематических и динамических переменных одной и той же системе (частице) выражаются в виде допустимых взаимных представлений и их свойствами, обусловленными свойствами группы допустимых отображений пространств. И если такое представление переменных задано, то определение пространственно-временных свойств означает задание свойств представления (переменных) на линии, поверхности, гиперповерхности и в объеме как свойства одной и той же физической системы (частицы).

Эти фундаментальные пространственно-временные свойства отображений для физической системы должны быть объединены и рассмотрены в целом. Также вариационные задачи или соответствующие дифференциальные уравнения, выражающие свойства представления на линии, поверхности, гиперповерхности и в объеме, должны быть сформулированы для одной и той же переменной. Обычно это переменная обобщенного импульса системы $\mathbf{P}$ в координатном представлении, а перечисленные выше свойства формулируются для него в пространстве координат.

В силу вышесказанного, уравнения (33), (39), (41) должны решаться совместно при условии инвариантности представления обобщенного импульса $\mathbf{P}$ [8]. Так как условие равенства нулю четырехмерного ротора обобщенного импульса $\mathbf{P}$ (33) означает, что подынтегральное выражение (29) является полным дифференциалом, то обобщенный импульс можно представить в виде градиента функции действия в виде $\mathbf{P}=(\varepsilon,\mathbf{p})=(-\partial S/\partial\tau,\partial S/\partial\mathbf{r})=-\partial S/\partial x_i$. Тогда вместо системы уравнений (33), (39), (41) получим

$$\frac{\partial^2 S}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2 S}{\partial\mathbf{r}^2}=0, \tag{43}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial\tau}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial\mathbf{r}}\right)^2=\varepsilon^2-\mathbf{p}^2=I^2=\frac{\left(mc^2+q\varphi\right)^2-\left(q\mathbf{A}\right)^2}{c^2}=\mathrm{inv} \tag{44}$$

– волновое уравнение для действия и условие инвариантности представления вектора энергии-импульса. Последнее и есть уравнение Гамильтона–Якоби для действия, которое в паре с волновым уравнением составляют уравнения эйконала.

Уравнения (43) и (44) выражают волновое свойство переменной энергии-импульса – фундаментальное физическое свойство системы, не зависящее от конкретного вида представления обобщенного импульса и характера взаимодействия. Уравнение (43) определяет фундаментальный класс решений, описывающих волновое поведение любых физических систем при произвольно заданном взаимодействии (44).

Отметим, что физически значимым являются только производные функции действия, а не сама функция, и поэтому нахождение самой функции или детализация свойств дальше первых производных не имеет какого-либо смысла.

Трудность совместного решения уравнений (43) и (44) в том, что из весьма широкого класса решений волнового уравнения (43) нужно отбирать те, которые удовлетворяют условию инвариантности (44). Было бы намного удобней, если бы условие инвариантности представления непосредственно отражалось в волновом уравнении и сузило бы класс решений волнового уравнения до таких пределов, чтобы они однозначно удовлетворяли условию инвариантности представления (44).

Для этого разделим уравнение (44) на размерную константу $\hbar^2$ и составим сумму с волновым уравнением (43). Тогда получим

$$\frac{\partial^2 S}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2 S}{\partial\mathbf{r}^2}+\frac{1}{\hbar^2}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial\tau}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial\mathbf{r}}\right)^2\right)=\frac{I^2}{\hbar^2}. \qquad (45)$$

Умножая уравнение на функцию $A\exp(iS/\hbar)$ или на $B\exp(-iS/\hbar)$, его можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 e^{iS/\hbar}}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2 e^{iS/\hbar}}{\partial\mathbf{r}^2}=-\frac{I^2}{\hbar^2}e^{iS/\hbar} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 e^{-iS/\hbar}}{\partial^2\tau}-\frac{\partial^2 e^{-iS/\hbar}}{\partial^2\mathbf{r}}=-\frac{I^2}{\hbar^2}e^{-iS/\hbar}. \qquad (46)$$

Это означает, что для функции

$$\Psi = Ae^{iS/\hbar}+Be^{-iS/\hbar}, \qquad (47)$$

обычно называемой волновой функцией, имеет место уравнение

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{r}^2}=-\frac{I^2}{\hbar^2}\Psi. \qquad (48)$$

Как видим, волновое уравнение для волновой функции Ψ уже содержит выражение, позволяющее явным образом учитывать дополнительное условие (44). Подстановка решений волнового уравнения Ψ в условие инвариантности градиента (44) даст уравнение искомых кривых (траекторий), на которых решения волнового уравнения обеспечивают условие инвариантности.

В таком представлении уравнения явно указывают, что если уравнение (48) решается методом разделения переменных (Ψ представляется в виде произведения функций независимых переменных), то это соответствует решению уравнения (43) представлением S в виде суммы функций независимых переменных.

Если выбрать волновую функцию в виде $\Psi = A\exp(iS/\hbar)$, то есть $S = -i\hbar\ln\Psi + S_0$, то уравнения (43) и (44) представятся в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{r}^2} = -\frac{I^2}{\hbar^2}\Psi,\\ \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{r}}\right)^2 = -\frac{I^2}{\hbar^2}\Psi^2.\end{gathered} \tag{49}$$

Такое представление является тождественным с точки зрения определения обобщенного импульса на основе функции действия S и волновой функции Ψ. Так как

$$\mathbf{P} = -\frac{\partial S}{\partial\mathbf{R}}, \;\Rightarrow\; \varepsilon = -\frac{\partial S}{\partial\tau},\;\; \mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial\mathbf{r}}, \tag{50}$$

то из математического тождества

$$\frac{\partial S}{\partial\mathbf{R}} = \frac{1}{A\exp(iS/\hbar)}\left(A\exp\left(\frac{iS}{\hbar}\right)\frac{\partial S}{\partial\mathbf{R}}\right) = -\frac{i\hbar}{A\exp(iS/\hbar)}\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}\left(A\exp\left(\frac{iS}{\hbar}\right)\right) = -i\hbar\frac{1}{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{R}} \tag{51}$$

следует, что

$$\begin{gathered}\mathbf{P} = -i\hbar\frac{1}{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{R}} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}(-i\hbar\ln\Psi) = \frac{\partial S}{\partial\mathbf{R}}, \;\Rightarrow\\ \Rightarrow \varepsilon = i\hbar\frac{1}{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} = -\frac{\partial S}{\partial\tau},\;\; \mathbf{p} = -i\hbar\frac{1}{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{r}} = \frac{\partial S}{\partial\mathbf{r}}.\end{gathered} \tag{52}$$

Волновую функцию Ψ всегда можно представить также в виде

$$\begin{aligned}\Psi &= 2\sqrt{AB}\,\frac{\sqrt{A/B}\exp(iS/\hbar) + \sqrt{B/A}\exp(-iS/\hbar)}{2} =\\ &= C\frac{\exp\left(i(S-S_0)/\hbar\right) + \exp\left(-i(S-S_0)/\hbar\right)}{2} = C\cos\left(\frac{S-S_0}{\hbar}\right),\;\; S_0 = i\hbar\ln\sqrt{A/B},\end{aligned} \tag{53}$$

где несущественную константу C можно опустить. При выборе решений для волновой функции в виде $\Psi = \cos\left((S-S_0)/\hbar\right)$ (т.е. $S = \hbar\arccos\Psi + S_0$ или $S = \hbar\arcsin\Psi + S_0$) уравнения (48) представляются в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{r}^2} = -\frac{I^2}{\hbar^2}\Psi,\\ \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{r}}\right)^2 = -\frac{I^2}{\hbar^2}\left(\Psi^2 - 1\right).\end{gathered} \tag{54}$$

Удобство решения волнового уравнения в комплексном представлении сохраняется, а аналитическое продолжение функций в комплексной области можно представить в виде

$$S = \pm\hbar \arccos\Psi + S_0 \equiv -i\hbar \ln\left(\Psi \pm i\sqrt{1-\Psi^2}\right) + S_0,$$
$$\Psi = \cos\left(\frac{S-S_0}{\hbar}\right) \equiv \frac{\exp\left(i(S-S_0)/\hbar\right) + \exp\left(-i(S-S_0)/\hbar\right)}{2}. \tag{55}$$

Приведем также ковариантное представление уравнений (49):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{-g}}\dfrac{\partial}{\partial x^i}\left(g_{ik}\sqrt{-g}\dfrac{\partial S}{\partial x^k}\right) = 0; \\ g_{ik}\dfrac{\partial S}{\partial x^i}\dfrac{\partial S}{\partial x^k} = I^2; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{-g}}\dfrac{\partial}{\partial x^i}\left(g_{ik}\sqrt{-g}\dfrac{\partial \Psi}{\partial x^k}\right) = -\dfrac{I^2}{\hbar^2}\Psi; \\ g_{ik}\dfrac{\partial \Psi}{\partial x^i}\dfrac{\partial \Psi}{\partial x^k} = -\dfrac{I^2}{\hbar^2}\Psi^2. \end{cases} \tag{56}$$

Теперь, если обобщить эти уравнения в рамках подходов ОТО, можно представить всякую систему как результат преобразования исходного (не возмущенного) импульсного пространства

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{-g}}\dfrac{\partial}{\partial x^i}\left(g_{ik}\sqrt{-g}\dfrac{\partial S}{\partial x^k}\right) = 0; \\ g_{ik}\dfrac{\partial S}{\partial x^i}\dfrac{\partial S}{\partial x^k} = 0,\pm 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{-g}}\dfrac{\partial}{\partial x^i}\left(g_{ik}\sqrt{-g}\dfrac{\partial \Psi}{\partial x^k}\right) = -(0,\pm 1)\Psi; \\ g_{ik}\dfrac{\partial \Psi}{\partial x^i}\dfrac{\partial \Psi}{\partial x^k} = -(0,\pm 1)\Psi^2. \end{cases} \tag{57}$$

Соответственно, при представлении метрического тензора в виде $g_{i,k} = T_{i,j}T_{i,k}/R^2 = T_{i,j}T_{j,k}/I^2$, где $T_{i,j}$ – матрица инвариантного представления обобщенного импульса из группы Пуанкаре, получим уравнения (43) и (49). С другой стороны, исходя из более общих соображений симметрии и конкретных свойств представления импульсного пространства метрическим тензором или матрицей группы Пуанкаре, из уравнений (57) можно найти допустимые для физической системы представления инвариантов и взаимодействий.

7. Заключение

Предложены канонические решения вариационной задачи для интегральных функционалов и приведены канонические решения вариационных задач механики в пространствах Минковского. На основе объединения вариационных принципов наименьшего действия, потока и гиперпотока получены канонически-инвариантные уравнения для переменной энергии-импульса. Из этих уравнений выведены уравнения для функции действия и волновой функции как общее решение объединенной вариационной задачи механики. Уравнения применимы для разных типов частиц и взаимодействий и обобщены в рамках подходов общей теории относительности.

Автор выражает благодарность профессору А.О. Оганесяну, доценту А.Г. Хачатряну и А.А. Мхитаряну из Ереванского государственного университета и профессору Н.Б. Енгибаряну из Института математики НАН РА за ценные замечания и полезные обсуждения математических основ данной работы. Автор признателен профессору В.О. Чалтыкяну из Института физических исследований НАН РА за полезные обсуждения и помощь в ходе подготовки рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Л.Д. Ландау, Е.М.Лифшиц.** Механика. М., Физматлит, 2004.
2. **Д. тер Хаар.** Основы гамильтоновой механики. М., Наука, 1974.
3. **К.Ланцош.** Вариационные принципы механики. М., Мир, 1965.
4. **Н.И.Ахиезер.** Лекции по вариационному исчислению. М., ГИТТЛ, 1955.
5. **Э.Картан.** Интегральные инварианты. М., ГИТТЛ, 1940.
6. **Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц.** Теория поля. М., Физматлит, 2003.
7. Проблемы Гильберта. Сборник под общей редакцией **П.С.Александрова.** М., Наука, 1969.
8. **В.М.Мыхитарян.** Изв. НАН Армении, Физика, 47, 379 (2012).

ՎԱՐԻԱՑԻՈՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԿԱՆՈՆԻԿ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ ԵՎ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԿԱՆՈՆԻԿ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Վ.Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

Դիտարկված են ինտեգրալ ֆունկցիոնալների վարիացիոն խնդիրների կանոնիկ (ոչ պարամետրիկ) լուծումները և ներկայացված են Մինկովսկու տարածություններում մեխանիկայի վարիացիոն խնդիրների կանոնիկ լուծումները։ Փոքրագույն գործողության, հոսքի և հիփերհոսքի վարիացիոն խնդիրների միավորման հիման վրա ստացվել են կանոնիկ-ինվարիանտ հավասարումներ էներգիա-իմպուլս փոփոխականի համար։ Այդ հավասարումներից ընդհանուր տեսքով դուրս են բերվել գործողության և ալիքային ֆունկցիաների հավասարումները որպես մեխանիկայի վարացիոն խնդիրների համատեղ լուծում։ Հավասարումները կիրառելի են տարատեսակ մասնիկների ու փոխազդեցությունների նկարագրման համար և ընդհանրացված են ընդհանուր հարաբերականության մոտեցումների շրջանակներում։

CANONICAL SOLUTIONS OF VARIATIONAL PROBLEMS AND CANONICAL EQUATIONS OF MECHANICS

V.M. MEKHITARIAN

The canonical (non-parametric) solutions of the variational problem for integral functionals are considered and the canonical solutions of variational problems of mechanics in Minkowski spaces are derived. By combining the variational principles of least action, flow, and hyperflow canonically invariant equations for the energy-momentum variable are obtained. From these equations the equations for the action and wave functions as a general solution of the combined variational problems of mechanics are derived. These equations are applicable for describing different types of particles and interactions and are summarized within the approach of general relativity.