

УДК 621.372

## **АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТОРОИДАЛЬНОГО РЕЗОНАТОРА ВЫСОКОЙ ДОБРОТНОСТИ В ТЕРАГЕРЦОВОЙ ОБЛАСТИ ЧАСТОТ**

Т.А. АРУТЮНЯН, А.Ю. ВАРДАНЯН, А.А. АХУМЯН, Х.В. НЕРКАРАРЯН

Ереванский государственный университет, Армения

(Поступила в редакцию 20 апреля 2012 г.)

Рассмотрен тороидальный резонатор, поперечное сечение которого представляет собой пересечение двух окружностей одинакового радиуса. Развита теоретическая модель позволяет получить аналитические выражения для распределения поля, резонансной частоты и добротности мод резонатора, с учетом диссипативных потерь на металлических стенках. Относительно большое значение добротности этих резонаторов открывает новые возможности их применения в различных областях – от фундаментальных проблем фотоники до проектирования устройств.

### **1. Введение**

Применение плоскопараллельного волновода создало предпосылки для большого технологического прорыва в области создания терагерцовых (ТГц) устройств, где электромагнитный импульс распространяется с малыми потерями [1,2]. Здесь неискаженное распространение импульса достигается в результате возбуждения основной поперечной моды волновода, где практически отсутствует дисперсия групповой скорости и нет отсечки на низких частотах. Возможность распространения неискаженных ТГц импульсов в двумерной среде послужила основой для всевозможных приложений, в том числе для генерации импульсов [3,4], в спектроскопии [5,6], зондировании [7,8], воспроизведении ТГц изображения [9,10], обработке сигналов [11] и даже для сверхфокусировки [12]. В [13-15] неискаженное распространение импульса рассмотрено также в волноводах со слегка изогнутыми параллельными плоскостями.

Поскольку электромагнитные волны с частотой от 0.1 до 10 ТГц могут быть синхронизированы с коллективными модами колебаний сахаридов или белковых молекул, спектроскопия ТГц волн может быть применена в различных типах датчиков для обнаружения вредных веществ в крови человека, раковых клеток в коже, а также микробактерий в овощах [16-18].

Резонаторы с высокой добротностью обеспечивают возрастание электромагнитных полей определенной частоты, что важно в приложениях для выбора частоты [19], спектроскопии [20], нелинейной оптики [21], микролазерного резонатора [22] и регистрации параметров [23]. В области телекоммуникации

подобные волноводы служат для фильтрации и модуляции частоты [24].

Таким образом, на основе резонаторов с большой добротностью и преимуществами плоскопараллельного волновода могут быть созданы устройства с широким спектром применения. В настоящей статье мы аналитически исследуем особенности тороидального резонатора, обладающего такими свойствами.

## 2. Теоретическая основа

Структура тороидального резонатора показана на рис.1. Его поперечное сечение представляет собой пересечение двух окружностей с одинаковым радиусом  $R$ ,  $R_0$  – расстояние от центра координат до центра поперечного сечения тороида,  $d_0$  – максимальное расстояние между металлическими стенками тороида.

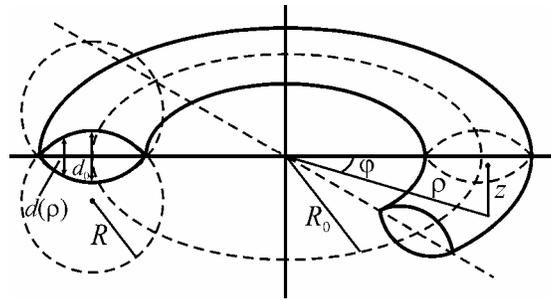


Рис.1. Схематическое изображение тороидального резонатора.

В таких резонаторах энергия волнового поля в основном сосредоточена в центральной части поперечного сечения сердцевины, которая заполнена диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$ . В цилиндрической системе координат  $(\rho, \varphi, z)$  волновое уравнение для  $z$ -компоненты магнитного поля имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} H_z = 0, \quad (1)$$

где  $\omega$  – частота волны,  $c$  – скорость света в вакууме.

Задача решается в адиабатическом приближении. Полагаем, что радиусы  $R$  и  $R_0$ , характеризующие тороид, значительно больше длины волны. Тогда  $z$ -компоненту магнитного поля можно представить в следующем виде [25]:

$$H_z = F(\rho) Z(z, \rho) e^{im\varphi - i\omega t}, \quad \text{где } m = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

В тороидальном резонаторе мы имеем дело с бегущей волной, которая возбуждается при условии  $\lambda m = L$ , где  $\lambda$  – длина волны,  $L$  – длина тороида. Здесь  $\rho$  выступает в качестве параметра в  $Z(z, \rho)$  и пренебрегается его производными по  $\rho$ . Тогда уравнения для функций  $Z(z, \rho)$  и  $F(\rho)$  могут быть представлены в виде

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \left( \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - q^2(\rho) \right) Z = 0, \quad (3)$$

и

$$\frac{d^2 F}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dF}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} F + q^2(\rho) F = 0. \quad (4)$$

В случае идеально проводящих стенок из (3) легко можно найти решения для  $Z(z, \rho)$ :

$$Z_n(z, \rho) = \begin{cases} \cos(\pi n z / d(\rho)), & n = 1, 3, 5, \dots \\ \sin(\pi n z / d(\rho)), & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (5)$$

Здесь

$$q^2(\rho) = -\pi^2 n^2 / d^2(\rho) + \varepsilon \omega^2 / c^2, \quad (6)$$

где  $d(\rho)$  – расстояние между металлическими стенками тороида (рис.1). В пределе  $d_0 \ll R$  и  $d_0 \ll R_0$  получаем

$$d(\rho) = d_0 - (R_0 - \rho)^2 / R.$$

Тогда уравнение (4) можно представить в следующем виде:

$$\frac{d^2 F}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dF}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} F + \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} F - \frac{\pi^2 n^2}{\left( d_0 - (R_0 - \rho)^2 / R \right)^2} F = 0. \quad (7)$$

Введем новую переменную [26]

$$\rho = R_0 e^{u/R_0}. \quad (8)$$

В результате из (7) получим

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{m^2}{R_0^2} F + \left( \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 n^2}{\left( d_0 - (R_0 - R_0 e^{u/R_0})^2 / R \right)^2} \right) e^{\frac{2u}{R_0}} F = 0. \quad (9)$$

В интересующем нас случае  $|u| \ll R_0$  и  $d_0 R \ll u^2$  получим

$$d^2 F / d\xi^2 + (\chi / \beta + \xi^2) F = 0, \quad (10)$$

где

$$\xi = \left( u + \frac{\alpha}{R_0 \beta^2} \right) \beta^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha = \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 n^2}{d_0^2}, \quad \beta^2 = \frac{2\pi^2 n^2}{d_0^3 R}, \quad \chi = \alpha - \frac{m^2}{R_0^2} - \frac{\alpha^2}{R_0^2 \beta^2}. \quad (11)$$

Решениями уравнения (10) являются полиномы Эрмита:

$$F(\xi) = e^{-(1/2)\xi^2} H_s(\xi), \quad (12)$$

где

$$\chi/\beta = 2s + 1 \quad (s = 0, 1, 2, \dots). \quad (13)$$

Тогда  $z$ -компонента магнитного поля, т.е. решение уравнения (1), имеет следующий вид:

$$H_{zsm} = A e^{-(1/2)\xi^2} H_s(\xi) Z_n(z, \rho) e^{im\phi - i\omega t}. \quad (14)$$

Из формул (11) и (14) можно получить уравнение, определяющее резонансную частоту  $\omega$ :

$$\begin{aligned} & \left( \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 n^2}{d_0^2} \right)^2 - R_0^2 \frac{2\pi^2 n^2}{d_0^3 R} \left( \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 n^2}{d_0^2} \right) + \\ & + \frac{m^2 2\pi^2 n^2}{d_0^3 R} + (2s + 1) \left( \frac{2\pi n}{d_0^3 R} \right)^{\frac{3}{2}} (\pi n)^{\frac{3}{2}} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Добротность резонатора  $Q$ , обусловленная диссипативными потерями на металлических стенках тороида, можно найти из выражения  $Q = \omega/\omega''$ , где  $\omega''$  – мнимая часть резонансной частоты. Учитывая, что

$$\omega'' = \frac{c}{2} \xi' \frac{\int_V |\mathbf{H}|^2 df}{\int_V |\mathbf{H}|^2 dV}, \quad (16)$$

где  $\xi' = \sqrt{\omega/8\pi\sigma}$  – волновой импеданс, а  $\sigma$  – проводимость металлических стенок, получим

$$Q = \frac{\omega d_0}{4c\xi'} \left( 1 + \pi^2 k^2 / \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right)^2 d_0^2 \right). \quad (17)$$

### 3. Результаты и обсуждение

Уравнение (15) позволяет определить частоту волны  $\omega$  в зависимости от размеров тороида ( $R_0$ ,  $R$  и  $d_0$ ) и от модовых чисел  $m$ ,  $n$  и  $s$ . Дальнейшие расчеты производятся, считая, что  $n = 1$ ,  $s = 0$  и  $\varepsilon = 1$ .

На рис.2–4 представлены зависимости резонансной частоты волны  $\omega$  от радиусов кривизны  $R$ ,  $R_0$  и  $d_0$  для разных мод  $m = 8, 9, 10$ . Для характерных параметров тороида  $R_0 = 4$  мм,  $R = 2$  мм и  $d_0 = 1$  мм резонансная частота находится в области  $\omega \sim 10^{12}$  рад/с. Для тороидов больших размеров частота уменьшается. Например, при  $R_0 = 8$  мм,  $R = 4$  мм и  $d_0 = 2$  мм имеем  $\omega \sim 10^{11}$  рад/с, а при  $R_0 = 16$  мм,  $R = 8$  мм и  $d_0 = 4$  мм имеем  $\omega \sim 10^{10}$  рад/с. Таким образом, частота  $\omega$  уменьшается с увеличением  $R$ ,  $R_0$  и  $d_0$  (рис.2–4) и увеличивается с возрастанием модового числа  $m$  (рис.5).

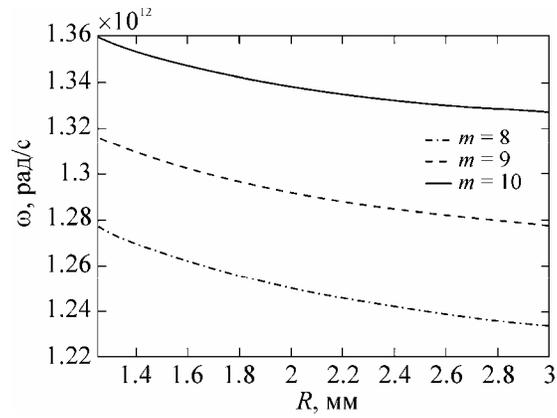


Рис.2. Зависимость волновой частоты от радиуса  $R$  при  $\varepsilon=1$ ,  $R_0=4$  мм,  $d_0=1$  мм,  $m=8, 9, 10$ .

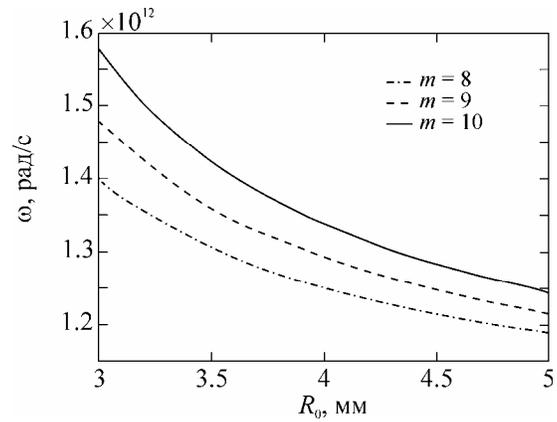


Рис.3. Зависимость волновой частоты от радиуса  $R_0$  при  $\varepsilon=1$ ,  $R_0=2$  мм,  $d_0=1$  мм,  $m=8, 9, 10$ .

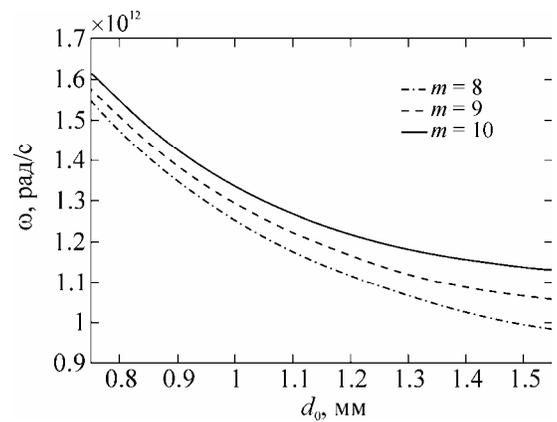


Рис.4. Зависимость волновой частоты от  $d_0$  при  $\varepsilon=1$ ,  $R_0=4$  мм,  $R=2$  мм,  $m=8, 9, 10$ .

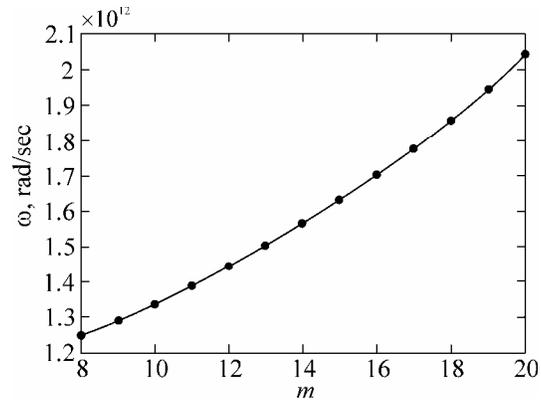


Рис.5. Зависимость волновой частоты от  $m$  при  $\varepsilon = 1$ ,  $R_0 = 4$  мм,  $R = 2$  мм,  $d_0 = 1$  мм.

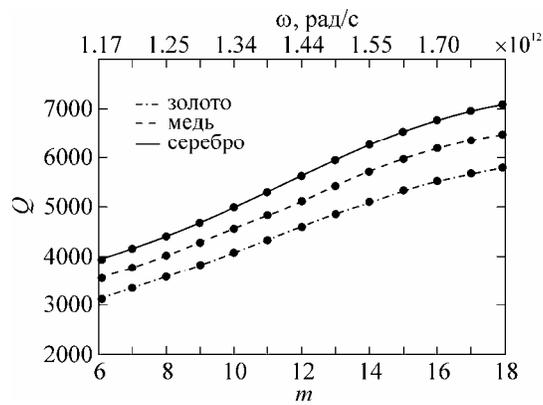


Рис.6. Зависимость добротности от  $m$  при  $R_0 = 4$  мм,  $R = 2$  мм,  $d_0 = 1$  мм для трех типов металлических поверхностей – золота, меди и серебра.

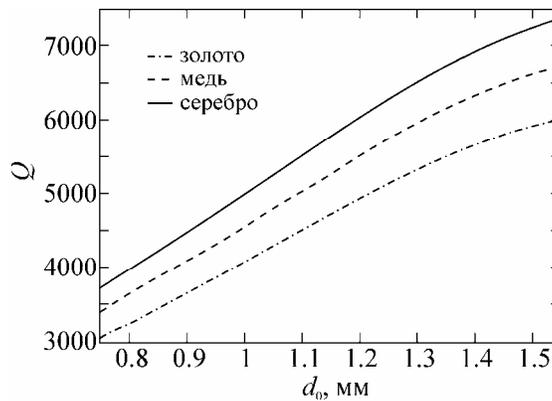


Рис.7. Зависимость добротности от  $d_0$  при  $R_0 = 4$  мм,  $R = 2$  мм,  $m = 10$  для трех типов металлических поверхностей – золота, меди и серебра.

На рис.6–9 представлены зависимости добротности резонатора  $Q$  от параметров  $m$ ,  $d_0$ ,  $R$  и  $R_0$  для трех типов металлических поверхностей – золота ( $\sigma \approx 4 \times 10^{17}$  CGSE), меди ( $\sigma \approx 5 \times 10^{17}$  CGSE) и серебра ( $\sigma \approx 6 \times 10^{17}$  CGSE). Для тороидов с  $R_0 = 4$  мм,  $R = 2$  мм и  $d_0 = 1$  мм получим, что начиная с  $m = 8$  добротность имеет порядок  $Q \sim 10^3$ . Добротность возрастает с возрастанием номера моды (рис.6). Она также возрастает с возрастанием  $d_0$  (рис.7) и  $R$  (рис.8), и уменьшается с возрастанием  $R_0$  (рис.9). Как и следовало ожидать, добротность зависит от проводимости металлической поверхности стенок тороида, и наибольшее значение получается для серебра, у которого максимальная проводимость.

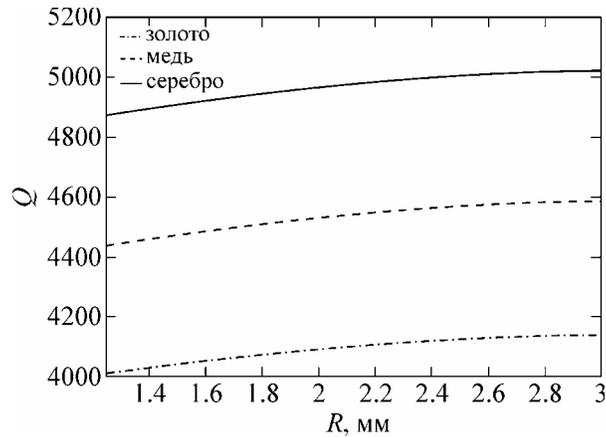


Рис.8. Зависимость добротности от  $R$  при  $R_0 = 4$  мм,  $d_0 = 1$  мм,  $m = 10$  для трех типов металлических поверхностей – золота, меди и серебра.

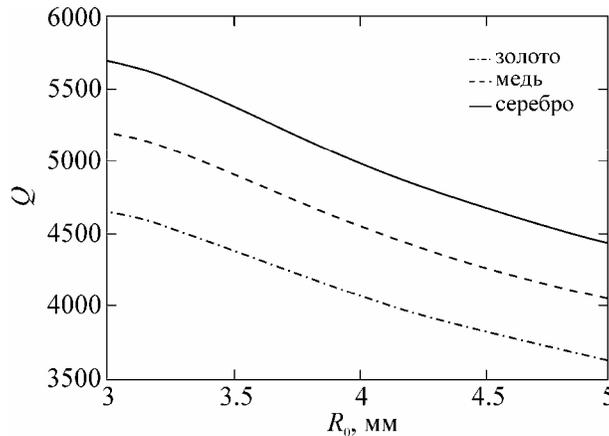


Рис.9. Зависимость добротности от  $R_0$  при  $R = 2$  мм,  $d_0 = 1$  мм,  $m = 10$  для трех типов металлических поверхностей – золота, меди и серебра.

#### 4. Заключение

Рассмотрено формирование волноводных мод в тороидальной структуре. Использованная теоретическая модель позволяет получить аналитические выражения для распределения полей, резонансной частоты и добротности в большом диапазоне волнового спектра. Большое число параметров в задаче усложняет нахождение численными методами оптимальных условий для сохранения и локализации волновой энергии в резонаторе. Представленную теорию можно использовать для быстрой оценки характеристических параметров и проектирования необходимого тороидального резонатора. Относительно большое значение добротности этих резонаторов открывает новые возможности их применения в разных областях, от фундаментальных проблем фотоники до проектирования устройств.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **R.Mendis, D.Grischkowsky.** Opt. Lett., **26**, 846 (2001).
2. **R.Mendis, D.Grischkowsky.** IEEE Microw. Wirel. Compon. Lett., **11**, 444 (2001).
3. **H.Cao, R.A.Linke, A.Nahata.** Opt. Lett., **29**, 1751 (2004).
4. **S.Coleman, D.Grischkowsky.** Appl. Phys. Lett., **84**, 654 (2004).
5. **R.Mendis.** Electron. Lett., **42**, 19 (2006).
6. **J.S.Melinger, N.Laman, S.S.Harsha, D.Grischkowsky.** Appl. Phys. Lett., **89**, 252220 (2006).
7. **J.Zhang, D.Grischkowsky.** Opt. Lett., **19**, 1617 (2004).
8. **M.Nagel, M.Forst, H.Kurz.** J. Phys., Cond. Matter, **18**, S601 (2006).
9. **M.M.Awad, R.A.Cheville.** Appl. Phys. Lett., **86**, 221107 (2005).
10. **M.A.Musheinessh, C.J.Divin, J.A.Fessler, T.B.Norris.** Opt. Express, **17**, 13663 (2009).
11. **D.G.Cooke, P.U.Jepsen.** Opt. Express, **16**, 15123 (2008).
12. **H.Zhan, R.Mendis, D.M.Mittleman.** Opt. Express, **18**, 9643 (2010).
13. **Yu.Avetisyan, A.Hakhoumian, A.Makaryan, R.Martirosyan.** EOS Annual Meeting 2008, Terahertz-Science and Technology, Paris, France, p.ISBN 978-3-00-024 188-8 (2008).
14. **Yu.Avetisyan, A.Makaryan, K.Khachatryan, A.Hakhoumian.** Armenian. J. Phys., **2**, 122 (2009).
15. **Yu.Avetisyan, A.Hakhoumian, A.Makaryan, T.Poghosyan, G.Torosyan, R.Beigang, H.Minamide, H.Ito.** Tech. Dig. of CLEO'09, Baltimore, MD, USA, p.CThQ2 (2009).
16. **M.Yamaguchi, F.Miyamaru, K.Yamamoto, M.Tani, M.Hangyo.** Appl. Phys. Lett., **86**, 053903 (2005).
17. **B.M.Fischer, M.Walther, P.U.Jepsen.** Phys. Med. Biol., **47**, 3807 (2002).
18. **Y.Oyama, L.Zhen, T.Tanabe, M.Kagaya.** NDT E Int., **42**, 28 (2009).
19. **L.Collot, V.Lefèvre-Seguin, M.Brune, J.M.Raimond, S.Haroche.** Europhys. Lett., **23**, 327 (1993).
20. **S.Chiller, R.L.Byer.** Opt. Lett., **16**, 1138 (1991).
21. **A.T.Rosenberger.** Proc. SPIE, **3793**, 179 (1999).
22. **S.M.Spillane, T.J.Kippenberg, K.J.Vahala.** Nature, **415**, 621 (2002).
23. **V.S.Ilchenko, P.S.Volikov, V.L.Velichansky, F.Treussart, V.Lefèvre-Seguin, J.-M.Raimond, S.Haroche.** Opt. Commun., **145**, 86 (1998).
24. **P.Rabiei, W.H.Steier, C.Chang, L.R.Dalton.** J. Lightwave Technol., **20**, 1968 (2002).
25. **S.Bozhevolnyi, Kh.Nerkararyan.** Opt. Lett., **34**, 2039 (2009).
26. **H.Krammer.** Appl. Optics, **17**, 316 (1978).

ՄԵԾ ԲԱՐՈՐԱԿՈՒԹՅԱՄԲ ՏՈՐՈՒԴԱՅԻՆ ՌԵԶՈՆԱՏՈՐԻ  
ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՆԿԱՐԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ՀԱՃԱԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ  
ՏԵՐԱՀԵՐՑԱՅԻՆ ՏԻՐՈՒՅԹՈՒՄ

Տ.Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ա.ՅՈՒ. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ,  
Ա.Ա. ՀԱԽՈՒՄՅԱՆ, Խ.Վ. ՆԵՐԿԱՐԱՐՅԱՆ

Դիտարկված է տորոիդային ռեզոնատոր, որի լայնական կտրվածքը միևնույն շառավիղով երկու շրջանագծերի հատույթ է: Շարադրված տեսությունը թույլ է տալիս ստանալ անալիտիկ արտահայտություններ դաշտերի բաշխվածության, ռեզոնանսային հաճախության և ռեզոնատորի մոդերի բարորակության համար՝ հաշվի առնելով մետաղական պատերում դիսիպատիվ կորուստները: Այդ ռեզոնատորների բարորակության հարաբերական մեծ արժեքը նրանց կիրառության նոր հնարավորություններ է բացում տարբեր բնագավառներում՝ սկսած ֆոտոնիկայի հիմնարար խնդիրներից մինչև սարքերի նախագծում:

ANALYTICAL DESCRIPTION OF A TOROIDAL  
CAVITY WITH HIGH QUALITY FACTOR  
IN THE TERAHERTZ REGION OF FREQUENCIES

T.A. HARUTYUNYAN, A.Yu. VARDANYAN,  
A.A. HAKHUMYAN, KH.V. NERKARARYAN

We consider a toroidal cavity, cross-section of which represents an intersection of two circles with the same radius. Developed theoretical model allows us to obtain analytical expressions for the mode field distributions, resonant frequency, and quality factor of the cavity, with allowance for the dissipation losses in the metallic walls. A relatively high  $Q$ -value of these cavities opens up new possibilities for application in various fields ranging from fundamental photonics to device engineering.