Известия НАН Армении, Физика, т.47, №6, с.379-390 (2012)

УДК 530.12

ИНВАРИАНТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ИМПУЛЬСА

В.М. МЫХИТАРЯН

Институт физических исследований НАН Армении, Аштарак

(Поступила в редакцию 26 января 2012 г.)

Предложено релятивистски инвариантное представление обобщенного импульса частицы во внешнем поле. В таком представлении учитывается зависимость потенциалов взаимодействия частицы с полем от скорости движения частицы. Установлено точное соответствие выражений энергии и потенциальной энергии для классического гамильтониана, что делает идентичным решения задач механики при релятивистском и нерелятивистском подходах. Инвариантность предлагаемого представления обобщенного импульса позволяет эквивалентно описывать физическую систему в геометрически сопряженных пространствах кинематических и динамических переменных.

1. Введение

Вопросы теории движения заряда в переменном магнитном поле, помимо теоретического, имеют важное прикладное значение в областях ускорения частиц (бетатрон, линейный индукционный ускоритель и т.п.) [1,2], физики плазмы [3], индукционного разряда и обработки материалов [4]. В последние годы ведутся интенсивные исследования в области физики и техники индукционного разряда, ускорения плазмы и возбуждения сред индукцией магнитного поля с целью создания мощных плазмотронов [5], плазмореактивных двигателей [6], источников излучения [7] и лазеров [8,9].

Хотя индукционный разряд известен уже 125 лет [10], а индукционный ускоритель электронов – бетатрон, 90 лет [10], имеющаяся на сегодня теория движения и ускорения зарядов в переменном магнитном поле неудовлетворительно описывает реальные процессы ускорения и нагрева зарядов индуцированным электрическим полем. В частности, условие Видероэ для кругового движения заряда в бетатроне при отношении полей 2:1 так и не было подтверждено и теория ускорения заряда индуцированным электрическим полем в бетатроне не нашло соответствующего развития: решались только задачи устойчивости движения [1,10]. А при индукционном разряде не объясняется само существование разряда в центральной части соленоида, где индуцированное электрическое поле и ток равны нулю [7].

Последовательное построение теории движения зарядов в электромагнитных полях базируется на уравнениях электромагнитных полей и уравнении движения зарядов. Если рассматривается движение одной заряженной частицы в заданном поле, то можно считать, что токи и поля самой частицы, в известных пределах, не влияют на движение частицы. В такой постановке решение задачи можно разделить на два этапа:

I. Нахождение электрического и магнитного полей **E** и **B** для заданных граничных условий и источников,

II. Решение уравнения движения частицы с массой m и зарядом q в полях **E** и **B**.

Электромагнитные поля описываются уравнениями Максвелла, которые в представлении Герца–Хевисайда имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad\quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Поля **E** и **B** являются решениями этих уравнений при заданных граничных условиях и источниках ρ и $\mathbf{j}$. Эти поля существуют независимо от наличия рассматриваемой частицы и состояния ее движения. Из уравнений Максвелла направления и величины полей определяются только симметрией и граничными условиями задачи.

Следующий этап – это решение уравнения движения заряженной частицы при заданных полях

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}\left(q, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{E}, \mathbf{B}\right), \tag{2}$$

в котором еще предстоит определить, как зависит действующая на движущийся заряд сила **F** от скорости частицы **v**, заряда q и полей **E**, **B**. Ни эта зависимость, ни само уравнение движения уже не связаны с уравнениями Максвелла (поля **E** и **B** уже заданы и присутствуют), поэтому для определения силы в (2) следует использовать другие законы. Обычно это закон Фарадея, который формулируется следующим образом: Работа силы индукции $\mathbf{F}_I$ над зарядом q по замкнутой кривой L определяется скоростью изменения потока Φ магнитного поля **B** через площадь S замкнутой кривой:

$$\oint_L \mathbf{F}_I \cdot d\mathbf{L} = -\frac{q}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{q}{c}\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}, \tag{3}$$

вне зависимости от причин изменения этого потока.

Такая формулировка объединяет два различных явления: возникновение электрического поля в некоторой точке пространства при изменении во времени магнитного поля в этой точке и возникновение силы, действующей на заряженную частицу при ее движении в переменном или постоянном магнитном поле.

Выраженные из (1) в интегральной форме соотношения

$$\oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{L} = -\frac{1}{c}\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} \text{ или } \oint_L \mathbf{B}\cdot d\mathbf{L} = \frac{1}{c}\iint_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} d\mathbf{S} \qquad (4)$$

с частной производной под интегралом выражают только свойства самих полей и для выражения этих свойств нет нужды в посторонней частице с зарядом q и массой m или ее движении. Это есть свойство самих полей, а не свойство взаимодействия полей с заряженной частицей или эффект движения частицы. Вопрос о том, какими свойствами обладает взаимодействие полей с частицей, не может быть обсужден в рамках уравнений Максвелла, так как в уравнениях полей рассматриваемая частица просто не существует.

Р. Фейнман, описывая попытки объединения закона Фарадея (3) и свойства полей (4), пишет, что такое объединение должно исходить из "глубокого единого основополагающего принципа. Но в данном случае какого-либо особого глубокого принципа не видно. Мы должны воспринимать "правило" как совместный эффект двух совершенно различных явлений".

Предложенный еще в 1922 г. Рольфом Видероэ индукционный ускоритель электронов – бетатрон [1,10], должен был напрямую подтвердить формулу силы Лоренца

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\left[\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right] \qquad (5)$$

в случае переменных магнитных полей. Из формулы следует, что для обеспечения кругового движения электрона по орбите в переменном магнитном поле, среднее значение отклоняющего поля должно находиться в соотношении со значением поля на циклической орбите (то есть с ускоряющим полем) как 2:1 – соотношение Видероэ. Но на своей точно собранной установке Видероэ "ни одного ускоренного электрона не увидел" и отказался от дальнейших попыток осуществить свой замысел [11]. За последующие 20 лет ученым так и не удалось получить хоть один виток ускоренного индукцией магнитного поля электрона, хотя и условие кругового движения Видероэ напрямую следовало из формулы Лоренца (5).

И только в 1941 г. Д.В. Керст и Р. Сербер сообщили о создании работающего бетатрона с энергией ускорения 2.3 МэВ [12,13]. Они решили задачу в лоб – создали неравномерное распределение магнитного поля (яму) на орбите и выяснили, что для удержания электрона на орбите нужны поля, спадающие в зависимости от радиуса r вблизи орбиты как r^{-n}, где $1 > n > 0$. Устойчивость орбиты в неоднородном магнитном поле уже не определялась условием Видероэ, а современные бетатроны работают почти при всяком соотношении полей – соответствующим выбором неоднородности магнитного поля на орбите всегда можно получить устойчивое движение.

Расчеты Р. Видероэ и В.В. Ясинского по ускорению электрона индуцированным электрическим полем (трансформаторный подход) так и не дали соответствующих результатов и от таковых отказались. А Д.В. Керст, Р. Сербер, Я.П. Терлецкий и другие развили теорию индукционного ускорения, рассматривая только условия устойчивого движения одного электрона при его малых отклонениях от равновесной орбиты в неоднородном магнитном поле (барьере) [1]. И то, что при отношении полей 2:1 не обеспечивается хоть какое-то многократное ускорение (даже один устойчивый виток!), наводит на мысль о принципиальном ограничении в самой основе вывода условия Видероэ – в формуле силы Лоренца (5) в случае переменных магнитных полей.

При описании явлений магнитного резонанса, когда рассматривается движение магнитного момента в переменном магнитном поле, тоже возникают принципиальные трудности. Известно, что уравнение движения магнитного момента в виде

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\left[\boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{L}\right] \tag{6}$$

(где $\boldsymbol{\omega}_L = (q/2mc)\mathbf{B}$ – ларморовская угловая скорость вращения) относится к случаю постоянного магнитного поля (теорема Лармора) [14]. А если умножить уравнение (6) на $\mathbf{L}$ скалярно, то получается $\mathbf{L}_2 = \text{const}$ и становится очевидным, что данное уравнение никак не описывает возбуждение момента в переменном магнитном поле. Несмотря на это, в 1946 г. Ф. Блох для описания ядерного магнитного резонанса добавил в уравнение (6) релаксационные члены и использовал его для случая переменных полей [15]

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \frac{\mathbf{L} - \mathbf{L}_0}{\hat{\tau}} = -\left[\boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{L}\right], \tag{7}$$

где $\hat{\tau}$ – характерные времена продольной и поперечной релаксаций, а $\mathbf{L}_0$ – равновесное значение момента. В дальнейшем уравнение Блоха (7) часто использовали для описания явлений магнитного резонанса в переменных магнитных полях.

Однако такое рассмотрение неверно, так как уравнение для момента частицы $\mathbf{L}$ имеет указанный вид только в случае постоянного магнитного поля; в случае переменного поля в уравнения (6) и (7) должен входить очевидный член, пропорциональный $\mathbf{S} \cdot d\mathbf{B}/dt$, отвечающий за возбуждение любой токовой петли площадью $\mathbf{S}$ (магнитного момента) индукцией переменного магнитного поля $\mathbf{B}$.

На основе традиционно используемого выражения силы Лоренца (5) можно вывести точное уравнение движения для момента в переменном во времени однородном магнитном поле. В этом случае электрическое поле $\mathbf{E}$ задается в виде $\mathbf{E} = (1/2c)\left[\mathbf{r} \times d\mathbf{B}/dt\right]$ и из (5) имеем

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{2c}\left[\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}\right] + \frac{q}{c}\left[\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right]. \tag{8}$$

Умножая на $\mathbf{r}$ векторно, после преобразования и перегруппировки выражений правой части, получим

$$\frac{d}{dt}\left(m[\mathbf{r}\times\mathbf{v}]+\frac{q}{2c}\big[[\mathbf{r}\times\mathbf{B}]\times\mathbf{r}\big]\right)=-\frac{q}{2c}\big[\mathbf{B}\times[\mathbf{r}\times\mathbf{v}]\big]. \qquad (9)$$

Для частицы, у которой масса и заряд распределены в объеме с одной и той же закономерностью, для элемента массы dm и заряда $dq=(q/m)dm$ имеем

$$\frac{d}{dt}\left([\mathbf{r}\times\mathbf{v}]dm+\frac{q}{2mc}\big[\mathbf{r}\times[\mathbf{B}\times\mathbf{r}]\big]dm\right)=-\frac{q}{2mc}\big[\mathbf{B}\times[\mathbf{r}\times\mathbf{v}]\big]dm. \qquad (10)$$

В результате интегрирования по объему V имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{L}+\hat{I}\boldsymbol{\omega}_L\right)=-[\boldsymbol{\omega}_L\times\mathbf{L}], \qquad (11)$$

где $\mathbf{L}$ – момент импульса, $\boldsymbol{\omega}_L=(q/2mc)\mathbf{B}$ – ларморовская угловая скорость вращения, $\hat{I}=I_{i,k}=\int\limits_V\left[r_i^2\delta_{i,k}-r_ir_k\right]dm$ – тензор момента инерции частицы. В случае сферического волчка момент инерции $\hat{I}=I$ просто скаляр, поэтому для обобщенного момента импульса $\mathbf{J}=\mathbf{L}+I\boldsymbol{\omega}_L$ получаем

$$d\mathbf{J}/dt=-[\boldsymbol{\omega}_L\times\mathbf{J}]. \qquad (12)$$

С учетом релаксационных членов Блоха имеем

$$d\mathbf{L}/dt+(\mathbf{L}-\mathbf{L}_0)/\hat{\tau}+I\left(d\boldsymbol{\omega}_L/dt\right)=-[\boldsymbol{\omega}_L\times\mathbf{L}], \qquad (13)$$

где I – момент инерции. Умножив скалярно на $\mathbf{L}$, получим выражение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{L}^2}{2I}\right)=-\mathbf{L}\frac{d\boldsymbol{\omega}_L}{dt}=-\mathbf{M}\frac{d\mathbf{B}}{dt}, \qquad (14)$$

где $\mathbf{M}=(q/2mc)\mathbf{L}$ – магнитный момент частицы. Отсюда видно, почему и как меняется кинетическая энергия вращения $\mathbf{L}^2/2I$ частицы с магнитным моментом $\mathbf{M}$ в переменном магнитном поле $\mathbf{B}$. Как видим, в случае переменного магнитного поля в уравнениях Блоха (7) отсутствует именно член, отвечающий за возбуждение магнитного момента индукцией переменного магнитного поля.

При вращении в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля, угловая скорость в постоянном поле из (5) получается $\boldsymbol{\omega}_C=(q/mc)\mathbf{B}$ (циклотронная частота), а из (13) – $\boldsymbol{\omega}_L=(q/2mc)\mathbf{B}$ (ларморовская частота прецессии). Например, при установлении нового значения постоянного магнитного поля, согласно (13), в процессе изменения имеем ларморовскую частоту вращения $(q/2mc)\mathbf{B}$, которая должна быть и в итоге. С другой стороны, в постоянном магнитном поле из формулы силы Лоренца (5) имеем $(q/mc)\mathbf{B}$. То есть описывается только случай прецессии – случай поперечного поля, когда направленный по полю момент отсутствует. А наблюдаемый электронный парамагнитный резонанс при возбуждении продольным переменным магнитным полем не описывается не только уравнениями Блоха (7), но и уравнениями (13).

Ограниченность формулы силы Лоренца (5) при описании движения заряда заложена в самом выводе этой формулы. При выводе уравнения движения заряженной частицы во внешнем поле [14] при заданных потенциалах поля φ и **A** из лагранжиана в виде

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - q\varphi + (q/c)\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} \tag{15}$$

предполагается, что взаимодействие частицы с полем не зависит от скорости движения частицы **v**. Как следствие, из (15) обобщенный импульс представляется как $\mathbf{P} = \partial L/\partial \mathbf{v} = \mathbf{p} + q\mathbf{A}/c$ и уравнения движения представляются в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{q}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{q}{c}[\mathbf{v}\times \operatorname{rot}\mathbf{A}] = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}], \tag{16}$$

т.е. формула силы Лоренца получается вследствие подстановки в выражение лагранжиана частицы потенциалов φ и **A** самого поля (действующего на неподвижный в данной точке заряд), вместо потенциалов $q\varphi'$ и $q\mathbf{A}'$ взаимодействия поля с движущейся частицей.

Поэтому при использовании формулы (5) в ряде задач возникают противоречия. В частности, в задаче водородоподобного атома с зарядом ядра Ze [16] возникает физически ничем не обоснованное ограничение на величину заряда ядра в виде $Z < 137$, указывающее на отсутствие устойчивых атомов с порядковым номером $Z > 137$.

По тем же причинам, отсутствуют какие-либо разумные уравнения, описывающие движение элементарных частиц при сильных взаимодействиях, а в ядерной физике вынуждены пользоваться уравнением Шредингера, хотя и в данном случае абсурдность такого подхода очевидна.

В данной работе предложено релятивистски инвариантное представление обобщенного импульса частицы во внешнем поле, в котором учитывается зависимость потенциалов взаимодействия частицы с полем от скорости движения частицы.

2. Инвариантность представления обобщенного импульса. Классическое соответствие

Если электромагнитное поле задано потенциалами $(\varphi, \mathbf{A})$, то электрическое **E** и магнитное **B** поля определяются формулами

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\partial\varphi/\partial\mathbf{r} - \partial\mathbf{A}/\partial\tau. \tag{17}$$

Если заряд неподвижен, то он чувствует именно эти поля **E** и **B**. Если же заряд в этой точке имеет отличную от нуля скорость **v**, то он будет чувствовать поля иначе и энергия взаимодействия будет другая.

Для определения силы или энергии взаимодействия для движущегося со скоростью **v** заряда можно исходить из принципа относительности движения. Действующие значения силы или взаимодействия движущегося со скоростью **v** заряда с полем то же самое, что и в случае, когда заряд неподвижен, а поле двигается со скоростью (–**v**).

Таким образом, для движущегося заряда действующие значения полей взаимодействия $(\varphi', \mathbf{A}')$, $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{B}'$ представляются в виде [14]

$$\left.\begin{aligned}
&(\varphi', \mathbf{A}') = \left(\frac{\varphi + \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{A}}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \mathbf{A}_{\perp} + \frac{\mathbf{A}_{\parallel} + \varphi\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \\
&\mathbf{E}' = \mathbf{E}_{\parallel} + \frac{\mathbf{E}_{\perp} + [\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}]}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
&\mathbf{B}' = \mathbf{B}_{\parallel} + \frac{\mathbf{B}_{\perp} - [\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}]}{\sqrt{1-\beta^2}}
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned}
&\varphi'^2 - \mathbf{A}'^2 = \varphi^2 - \mathbf{A}^2, \\
&\mathbf{E}'^2 - \mathbf{B}'^2 = \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2, \\
&\mathbf{E}'\cdot\mathbf{B}' = \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Тогда обобщенный импульс частицы во внешнем поле представиться в виде

$$\mathbf{P} = \frac{1}{c}\left(\frac{mc^2 + q\varphi + q(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{A})}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \frac{(mc^2 + q\varphi)\boldsymbol{\beta} + q\mathbf{A}_{\parallel}}{\sqrt{1-\beta^2}} + q\mathbf{A}_{\perp} \right), \tag{19}$$

а для модуля I четырехмерного вектора обобщенного импульса **P** получим

$$I^2 = \mathbf{P}^2 = \varepsilon^2 - \mathbf{p}^2 = \frac{(mc^2 + q\varphi)^2 - (q\mathbf{A})^2}{c^2}. \tag{20}$$

Таким образом, обобщенный импульс частицы во внешнем поле не только инвариантен относительно преобразований при переходе из одной системы отсчета в другой, но и имеет инвариантное представление через скорость движения частицы (19), а значение инварианта I в каждой точке пространства задается выражением (20). Другими словами, таким свойством обладает не только представление собственного импульса частицы (механическая часть), но и обобщенный импульс частицы вообще. Инвариантное представление обобщенного импульса через скорость частицы означает, что природа физических процессов такова, что изменение состояния системы математически описывается только поворотом вектора обобщенного импульса в четырехмерном пространстве.

Мы обобщим этот результат в случае представления обобщенного импульса любых систем, утверждая, что вне зависимости от состояния движения системы обобщенный четырехмерный импульс всегда имеет инвариантное представление

$$\mathbf{P} = (\varepsilon, \mathbf{p}) \to \mathbf{P}^2 = \varepsilon^2 - \mathbf{p}^2 = \mathrm{inv}, \tag{21}$$

где ε и $\mathbf{p}$ – энергия и импульс системы. Представляя выражение инварианта $\varepsilon^2 - \mathbf{p}^2$ в виде

$$\varepsilon^2 = \frac{E^2}{c^2} = \mathbf{p}^2 + \frac{\left(mc^2 + q\varphi\right)^2 - \left(q\mathbf{A}\right)^2}{c^2} = \mathbf{p}^2 + m^2c^2 + 2m\varphi + \frac{q^2}{c^2}\left(\varphi^2 - \mathbf{A}^2\right) \qquad (22)$$

и разделяя на $2m$ и группируя, получим

$$H = \frac{\varepsilon^2 - m^2c^2}{2m} = \frac{E^2 - m^2c^4}{2mc^2} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + q\varphi + \frac{q^2}{2mc^2}\left(\varphi^2 - \mathbf{A}^2\right), \qquad (23)$$

формулу соответствия энергии системы E и энергии системы в классическом понимании H. Классическое соответствие в виде $H = \mathbf{p}^2/2m + U(\tau,\mathbf{r})$ [17] будет полным и точным, если определить в классическом понимании потенциальную энергию взаимодействия U и энергию системы H как

$$U = q\varphi + \frac{q^2}{2mc^2}\left(\varphi^2 - \mathbf{A}^2\right), \quad H = \frac{E^2 - m^2c^4}{2mc^2}, \quad \rightarrow \quad E = \pm mc^2\sqrt{1 + \frac{2H}{mc^2}}. \qquad (24)$$

Например, потенциальная энергия электрона U в поле кулоновского потенциала $\varphi = Ze/r$ и в однородном магнитном поле $\mathbf{B}$ с векторным потенциалом $\mathbf{A} = [\mathbf{r}\times\mathbf{B}]/2$ есть

$$U = -e\varphi + \frac{e^2}{2mc^2}\left(\varphi^2 - \mathbf{A}^2\right) = -\frac{Ze^2}{r} + \frac{1}{2mc^2}\frac{Z^2e^4}{r^2} - \frac{e^2B^2}{8mc^2}r^2\sin^2\theta. \qquad (25)$$

В нерелятивистском случае выражение (23) можно представить в виде

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + \frac{e}{mc}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\mathbf{A} + e\varphi + \frac{e^2}{2mc^2}\varphi^2 \approx \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right) + e\varphi, \quad (26)$$

где $\mathbf{p} - e\mathbf{A}/c \approx m\mathbf{v}$ принято называть собственным (механическим) импульсом частицы. Полученное для классической энергии H выражение существенно отличается от традиционного наличием недостающей в классической электродинамике энергии взаимодействия частицы с магнитным полем (линейный член по вектор-потенциалу $\mathbf{A}$). В случае однородного магнитного поля $\mathbf{B}$, когда векторный потенциал можно представить в виде $[\mathbf{B}\times\mathbf{r}]/2$, имеем

$$H = \frac{mv^2}{2} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{M} + e\varphi. \qquad (27)$$

В квантовой механике [18] при представлении гамильтониана в операторном виде появление этих дополнительных членов приводит к заключению, что магнитное взаимодействие – это чисто квантовый эффект. Однако в рамках вышеизложенного подхода эти различия отсутствуют, и магнитное взаимодействие входит одинаковым образом в виде $H_M = q^2A^2/2mc^2$.

3. Представление обобщенных частиц

Если представить обобщенный импульс системы в виде

$$\mathbf{P} = \varepsilon\sqrt{1-\left(\mathbf{p}/\varepsilon\right)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\mathbf{p}/\varepsilon\right)^2}},\ \frac{\mathbf{p}/\varepsilon}{\sqrt{1-\left(\mathbf{p}/\varepsilon\right)^2}}\right) = I\left(\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}},\ \frac{\boldsymbol{\eta}}{\sqrt{1-\eta^2}}\right), \quad (28)$$

то можно ввести понятие обобщенной скорости $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{p}/\varepsilon$ и инварианта I в виде $I = \varepsilon\sqrt{1-\left(\mathbf{p}/\varepsilon\right)^2}$. Для частицы во внешнем электромагнитном поле из (19) получаем

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\boldsymbol{\beta} + \dfrac{q\mathbf{A}_{\parallel}}{mc^2+q\varphi} + \dfrac{q\mathbf{A}_{\perp}}{mc^2+q\varphi}\sqrt{1-\beta^2}}{1+\dfrac{q\mathbf{A}}{mc^2+q\varphi}\cdot\boldsymbol{\beta}} = \frac{\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_{0\parallel} - \boldsymbol{\beta}_{0\perp}\sqrt{1-\beta^2}}{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}_0}, \quad (29)$$

$$\varepsilon = \frac{mc^2+q\varphi+q\left(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{A}\right)}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{I}{\sqrt{1-\eta^2}}, \quad (30)$$

$$\mathbf{p} = \frac{\left(mc^2+q\varphi\right)\boldsymbol{\beta}+q\mathbf{A}_{\parallel}}{c\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{q}{c}\mathbf{A}_{\perp} = \frac{I}{\sqrt{1-\eta^2}}\boldsymbol{\eta}. \quad (31)$$

Отсюда следует, что (при $I > 0$) система представлена как обобщенная частица со скоростью $\boldsymbol{\eta}$ и с энергией покоя ε_0:

$$\varepsilon_0 = \left(mc^2+q\varphi\right)\sqrt{1-\frac{\left(q\mathbf{A}\right)^2}{\left(mc^2+q\varphi\right)^2}}. \quad (32)$$

Если скорость частицы в рассматриваемой точке имеет величину

$$\boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\beta}_0 = -\frac{q\mathbf{A}}{mc^2+q\varphi}, \quad (33)$$

то это соответствует покоящейся обобщенной частице ($\boldsymbol{\eta} = 0$). Если же скорость частицы $\boldsymbol{\beta} = 0$, то это соответствует движению обобщенной частицы со скоростью

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\beta}_0 = \frac{q\mathbf{A}}{mc^2+q\varphi}. \quad (34)$$

Инвариантное представление четырехмерного импульса обобщенной частицы обеспечивается представлением в виде

$$\mathbf{P} = \left(\frac{\pi_0+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\pi}}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \frac{\pi_0+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\pi}/\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\boldsymbol{\beta} + \frac{\left[\boldsymbol{\beta}\times\left[\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{\beta}\right]\right]}{\beta^2}\right) = \left(\frac{\pi_0+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\pi}}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \frac{\pi_0\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\pi}_{\parallel}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \boldsymbol{\pi}_{\perp}\right), \quad (35)$$

где $\mathbf{P}_0 = \left(\boldsymbol{\pi}_0, \pi\right)$ – четырехмерный импульс покоящейся частицы с $\mathbf{P}^2 = \pi_0^2 - \boldsymbol{\pi}^2$. Выражение (35) можно представить в матричной форме

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} \pi_0+\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\dfrac{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\pi}}{\beta}\right)+\dfrac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}\left(1+\sqrt{1-\beta^2}\right)}\pi_0, \\ \boldsymbol{\pi}+\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\dfrac{\boldsymbol{\beta}}{\beta}\right)\pi_0+\dfrac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}\left(1+\sqrt{1-\beta^2}\right)}\left(\dfrac{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\pi}}{\beta}\right)\dfrac{\boldsymbol{\beta}}{\beta} \end{pmatrix}=\hat{T}\begin{pmatrix}\pi_0\\ \pi_1\\ \pi_2\\ \pi_3\end{pmatrix}, \qquad (36)$$

где $\hat{T}$ – матрица представления (преобразования), задаваемая в явном виде как [19]

$$\hat{T}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\begin{pmatrix}0&\dfrac{\beta_1}{\beta}&\dfrac{\beta_2}{\beta}&\dfrac{\beta_3}{\beta}\\ \dfrac{\beta_1}{\beta}&0&0&0\\ \dfrac{\beta_2}{\beta}&0&0&0\\ \dfrac{\beta_3}{\beta}&0&0&0\end{pmatrix}+\frac{\beta^2}{\left(1+\sqrt{1-\beta^2}\right)\sqrt{1-\beta^2}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\dfrac{\beta_1\beta_1}{\beta^2}&\dfrac{\beta_1\beta_2}{\beta^2}&\dfrac{\beta_1\beta_3}{\beta^2}\\0&\dfrac{\beta_2\beta_1}{\beta^2}&\dfrac{\beta_2\beta_2}{\beta^2}&\dfrac{\beta_2\beta_3}{\beta^2}\\0&\dfrac{\beta_3\beta_1}{\beta^2}&\dfrac{\beta_3\beta_2}{\beta^2}&\dfrac{\beta_3\beta_3}{\beta^2}\end{pmatrix}. \qquad (37)$$

Матрицы инвариантного представления четырехмерного вектора, сохраняющие модуль вектора в четырехмерном пространстве, образуют группу Пуанкаре (неоднородная группа Лоренца). Кроме смещений и вращений, группа содержит представления отражения пространства-времени P, T и инверсию $PT=I$.

Таким образом, с математической точки зрения, группа преобразования четырехмерного вектора и группа представления самого четырехмерного вектора идентичны – как следствие принципа относительности движения и сохранения четырехмерных свойств обобщенного импульса. Это, в свою очередь, означает, что произвольный четырехмерный вектор представим через некоторые основные четырехмерные векторы “в покое". Приведем представления обобщенного импульса этих частиц в покое

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_+=\varepsilon_0\left(1,0\right), \quad \mathbf{P}_+^{\,2}=+\varepsilon_0^{\,2},\\ &\mathbf{P}_-=\varepsilon_0\left(0,\mathbf{n}_0\right), \ \mathbf{P}_-^{\,2}=-\varepsilon_0^{\,2},\\ &\mathbf{P}_0=\varepsilon_0\left(1,\mathbf{n}_0\right), \ \mathbf{P}_0^{\,2}=0, \end{aligned} \qquad (38)$$

и в движении

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_+=\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1,\ \boldsymbol{\beta}\right), && \mathbf{P}_+^{\,2}=+\varepsilon_0^{\,2},\\ &\mathbf{P}_-=\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n}_0,\ \mathbf{n}_0+\mathbf{n}_{0\perp}\sqrt{1-\beta^2}\right), && \mathbf{P}_-^{\,2}=-\varepsilon_0^{\,2},\\ &\mathbf{P}_0=\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1+\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n}_0,\ \boldsymbol{\beta}+\mathbf{n}_{0\parallel}+\mathbf{n}_{0\perp}\sqrt{1-\beta^2}\right), && \mathbf{P}_0^{\,2}=0. \end{aligned} \qquad (39)$$

В последних формулах удобно использовать направление движения (импульса) **n** в системе отсчета наблюдателя. Тогда имеем

$$\mathbf{P}_{+} == \left(\varepsilon_0 \Big/ \sqrt{1-\beta^2}\right)(1,\boldsymbol{\beta}),$$

$$\mathbf{P}_{-} == \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1-(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})^2}}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n},\mathbf{n}), \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}_{0\perp} + \mathbf{n}_{0\parallel} \Big/ \sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1+\left(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n}_0 \Big/ \sqrt{1-\beta^2}\right)^2}}, \tag{40}$$

$$\mathbf{P}_{0} == \frac{\varepsilon_0\sqrt{1-\beta^2}}{1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n}}(1,\mathbf{n}), \qquad \mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\beta} + \mathbf{n}_{0\parallel} + \mathbf{n}_{0\perp}\sqrt{1-\beta^2}}{1+\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n}_0},$$

где последняя формула выражает эффект Доплера.

Если рассматривать обобщенный импульс частицы во внешнем поле, то его также можно представить в виде выражений (40) в зависимости от знака инварианта (20).

4. Заключение

Таким образом, учет зависимости взаимодействия от скорости движения частицы приводит к инвариантности представления обобщенного импульса.

Релятивистки инвариантное представление обобщенного импульса частицы во внешнем поле позволяет установить точное соответствие выражений энергии и потенциальной энергии для классического гамильтониана, что делает идентичным решения задач механики при релятивистском и классическом подходах. Инвариантность представления обобщенного импульса позволяет эквивалентно описывать физическую систему в геометрически сопряженных координатном и импульсном (кинематическом и динамическом) пространствах кинематическими и динамическими (каноническими) переменными. Эти пространства должны быть взаимно представляемы и равноценны при описании свойств физической системы. Соответственно, представление физической системы в кинематическом и динамическом пространствах должно отражаться метрическим и дифференциальным соответствием кинематического и динамического пространств.

Физические и геометрические свойства этих сопряженных пространств в полной мере могут быть описаны в рамках вариационных подходов, которые изложены в последующей работе.

Автор признателен профессору В.О. Чалтыкяну за полезные обсуждения и ценные замечания в ходе подготовки рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Л.М.Ананьев, А.А.Воробьев, В.И.Горбунов.** Индукционный ускоритель электронов – бетатрон. М., Госатомиздат, 1961.
2. **Ю.П.Вахрушин, А.И.Анацкий.** Линейные индукционные ускорители. М., Атомиздат, 1978.
3. **J.Hopwood.** Plasma Sources Sci. Technol., **1**, 109 (1992).

4. **M.A.Lieberman, A.J.Lichtenberg.** Principles of Plasma Discharges and Materials Processing. New York, Wiley, 1994.
5. **B.Bottin et al.** Predicted and measured capability of the VKI 1.2 MW plasmatron regarding re-entry simulation. ESA SP-426, 1998.
6. **M.R.LaPointe, P.G.Mikellides.** High-Power Magnetoplasmadynamic and Pulsed Inductive Thrusters. NASA Glenn Research Center, OAT, OSS, Project ASTP, 2002.
7. **G.G.Lister, J.E.Lawler, et al.** Rev. Modern Phys., **76**, 542 (2004).
8. **A.M.Razhev, V.M.Mekhitarian, D.S.Churkin.** JETP Lett., **82**, 259 (2005).
9. **A.M.Razhev, D.S.Churkin.** Opt. Precis. Eng., **19**, 237 (2011).
10. **W.Hittorf.** Ann. Phys. and Chem., **21**, 90 (1884).
11. Развитие ускорителей элементарных частиц – жизнь и работа Рольфа Видероэ, 1902–1996. Сост. и ред. **П.Валошек.** М., ФИАН, 1998.
12. **D.W.Kerst.** Phys. Rev., **60**, 47 (1941).
13. **D.W.Kerst, R.Serber.** Phys. Rev., **60**, 53 (1941).
14. **Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц.** Теория поля. М., Физматлит, 2003.
15. **F.Bloch.** Phys. Rev., **70**, 460 (1946).
16. **В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц. Л.П.Питаевский.** Квантовая электродинамика. М., Физматлит, 2002.
17. **Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц.** Механика. М., Физматлит, 2004.
18. **Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц.** Квантовая механика. М., Физматлит, 2004.
19. **М.-А.Тонелла.** Основы электромагнетизма и теории относительности. М., ИИЛ, 1962.

ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ԻՄՊՈՒԼՍԻ ԻՆՎԱՐԻԱՆՏ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄ

Վ.Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

Առաջարկված է արտաքին դաշտում գտնվող մասնիկի ընդհանրացված իմպուլսի ռելյատիվիստիկ ինվարիանտ ներկայացում: Այդպիսի ներկայացումը հաշվի է առնում դաշտի հետ մասնիկի փոխազդեցության պոտենցիալների կախումը մասնիկի շարժման արագությունից: Պարզված է էներգիայի և պոտենցիալ էներգիայի արտահայտությունների ճշգրիտ համապատասխանությունը դասական համիլտոնյանի համար, ինչը նույնացնում է մեխանիկայի խնդիրների լուծումը ռելյատիվիստիկ և դասական մոտեցումների դեպքում: Ընդհանրացված իմպուլսի ինվարիանտ ներկայացումը թույլ է տալիս ֆիզիկական համակարգերը համարժեք նկարագրել կինեմատիկ և դինամիկ փոփոխականների երկրաչափորեն համալուծ տարածություններում:

THE INVARIANT REPRESENTATION OF GENERALIZED MOMENTUM

V.M. MEKHITARIAN

The relativistically invariant representation of generalized momentum of a particle in the external field is proposed. In this representation the dependence of potentials of the particle–field interaction on the particle velocity is taken into account. An exact correspondence of expressions for the energy and potential energy for the classical Hamiltonian is established, which makes identical the solutions of problems of mechanics with relativistic and classical approaches. The invariance of the generalized momentum representation allows one to describe equivalently a physical system in geometrically conjugated spaces of kinematical and dynamical variables.