

УДК 621.384

О МОДУЛЯЦИИ ПЛОТНОСТИ ЗАРЯДА В СГУСТКЕ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ

Э.Д. ГАЗАЗЯН, Д.К. КАЛАНТАРЯН, А.Д. ТЕР-ПОГОСЯН

Национальная научная лаборатория им. А.И. Алиханяна, Ереван

(Поступила в редакцию 6 мая 2011 г.)

Рассмотрена эффективность модуляции плотности заряда электронного сгустка в поле линейно поляризованной монохроматической электромагнитной волны, распространяющейся навстречу движению сгустка. Показано, что в результате взаимодействия волны со сгустком возможно получение когерентно излучающих сгустков.

1. Введение

Вопросы взаимодействия движущегося электронного сгустка с электромагнитной волной рассматривались в связи с созданием ускорителей нового поколения и повышением эффективности их работы [1,2]. Важное применение находит когерентное излучение ультракоротких (фемтосекундной и пикосекундной длительностей) электронных сгустков в современных источниках синхротронного излучения и в лазерах на свободных электронах. Цель этой работы – исследование возможности получения когерентно излучающих структур при взаимодействии лазерного поля с электронным сгустком без использования модулирующего ондулятора или вигглера.

2. Механизм взаимодействия монохроматической электромагнитной волны с релятивистским электронным сгустком

Решение уравнений движения электронного сгустка в поле монохроматической электромагнитной волны основывается на доказательстве существования интеграла движения, приведенного в работах [3-7] и имеющего вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{E}{c} - p_x \right) = 0 \quad (1)$$

для отдельного электрона с энергией E и импульсом p_x , движущегося вдоль некоторой выбранной оси x . Как показано в работе [8], операторы импульса электрона коммутируют с оператором Гамильтона в уравнении Дирака, т.е. выражение (1) является классическим аналогом собственных значений операторов компонент импульса и собственного значения оператора Гамильтона в уравнении Дирака.

Предполагается, что модуляция плотности заряда в сгустке осуществляется согласно схеме, представленной на рис.1. Здесь 1 и 2 – движущийся сгусток до и после прохождения интервала взаимодействия L_{int} , 3 и 4 – зеркала, установленные под углом 45° к направлению движения сгустка, 5 – источник монохроматического излучения (лазер).

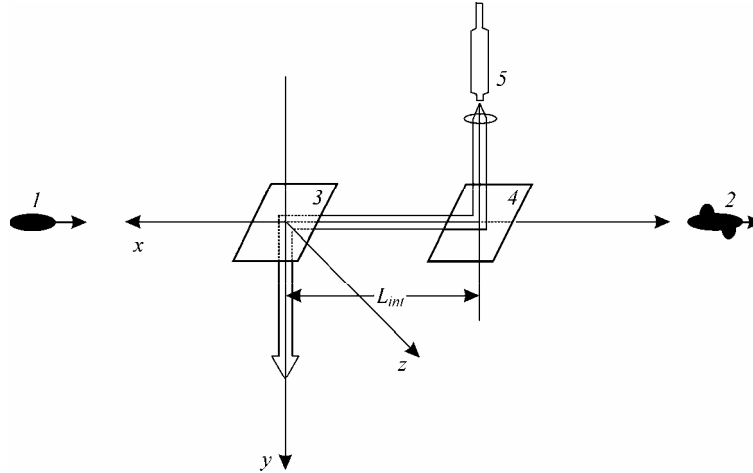


Рис.1. Схема модуляции.

Случай, когда волна распространяется параллельно движению электронного сгустка, был рассмотрен в работах [3-7]. Анализ результатов этих работ показал, что эффект взаимодействия очень слаб. Для усиления этого эффекта обычно в тракт вводят ондуляторы или вигглеры. Другой способ заключается в существенном увеличении длины взаимодействия, однако это делает проведение эксперимента нереальным. В настоящей работе мы покажем, что при встречном движении электронного сгустка к лазерной волне эффект их взаимодействия усиливается на значительно более коротких интервалах взаимодействия, так как этот эффект обусловлен скоростью изменения фаз взаимодействий отдельных электронов в сгустке с волной, а эти изменения существенно быстрее происходят в случае их встречного движения.

3. Алгоритм взаимодействия электронов с волной

Интеграл (1) может быть представлен в форме

$$E/c - p_x = \text{const}, \quad E_0/c - p_{x0} = 1/2B, \quad (1a)$$

где E_0 и p_{x0} – начальные (до взаимодействия) значения энергии и импульса электрона. Константа B в (1) в случае движения сгустка навстречу распространению волны имеет вид

$$B = \frac{1}{2mc} (\gamma_0 - \sqrt{\gamma_0^2 - 1}) = \frac{1}{2mc} (\gamma_0 + \sqrt{\gamma_0^2 - 1})^{-1} \cong \frac{1}{4mc\gamma_0} \quad \text{при } \gamma_0 \gg 1, \quad (2)$$

в отличие от случая параллельного движения сгустка и электромагнитной волны, рассмотренного в работах [3-7], когда она имела вид

$$B = (1/2mc) \left(\gamma_0 + \sqrt{\gamma_0^2 - 1} \right) \cong \gamma_0 / mc \text{ при } \gamma_0 \gg 1. \quad (2a)$$

Сравнение траекторий движения электронов, вычисленных согласно формулам (2) и (2a) показывает, что эффект перегруппировки электронов в сгустке (модуляция плотности заряда в сгустке) обусловлен величиной константы $1/2B$, которая в рассматриваемом случае встречного движения оказывается в $4\gamma_0^2$ раза больше, чем в случае, когда движение релятивистского сгустка происходит параллельно распространению волны, и та же эффективность взаимодействия наблюдается на существенно меньшем расстоянии, чем при параллельном движении. Это позволяет ограничиться существенно более коротким интервалом взаимодействия. Поэтому в настоящей работе мы будем рассматривать взаимодействие электромагнитной волны с электронным сгустком при их встречном движении.

Пусть теперь сгусток движется в поле плоской монохроматической волны линейной поляризации с частотой ω_L :

$$E_y = E_0 \cos(\omega_L t + kx + \varphi_0). \quad (3)$$

Как было показано в работе [3], используя вышеупомянутый интеграл движения, можно линеаризировать уравнения движения и получить их решения для электрона с энергией E , движущегося в отрицательном направлении оси x (навстречу распространению волны). Удовлетворив начальным условиям при $t=0$ (начало взаимодействия волны со сгустком) $\mathbf{p} = \mathbf{p}(p_{x0}, 0, 0)$ ($p_{x0} = -mc\sqrt{\gamma_0^2 - 1} \equiv -p_0$) и $\mathbf{r} = \mathbf{r}(0, 0, 0)$, получим решения для координат и импульсов электрона:

$$\begin{aligned} x = & \frac{2B}{k} \left\{ -p_0 + \frac{Be^2 E_0^2}{\omega_L^2} \left[\frac{1}{2} + \sin^2 \phi_0 \right] \right\} \eta + \frac{4B^2 e^2 E_0^2 \sin \phi_0}{k \omega_L^2} [\cos(\eta + \phi_0) - \cos \phi_0] - \\ & - \frac{B^2 e^2 E_0^2}{2k \omega_L^2} [\sin 2(\eta + \phi_0) - \sin 2\phi_0], \\ y = & -\frac{2BeE_0 \sin \phi_0}{k \omega_L} \eta - \frac{2BeE_0}{k \omega_L} [\cos(\eta + \phi_0) - \cos \phi_0], \quad z = 0; \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} p_x = & -p_0 + (Be^2 E_0^2 / \omega_L^2) [\sin(\eta + \phi_0) - \sin \phi_0]^2, \\ p_y = & (eE_0 / \omega_L) [\sin(\eta + \phi_0) - \sin \phi_0], \quad p_z = 0. \end{aligned} \quad (3b)$$

В формулах (3) использовано обозначение $\eta = kx - \omega t$.

Время прохождения электрона через интервал взаимодействия L_{int} , ограниченный двумя зеркалами, назовем временем взаимодействия и определим выражением

$$t_f = \frac{1}{c^2} \int_0^{-L_{\text{int}}} \frac{E}{p_x} dx. \quad (4)$$

Воспользовавшись выражением (1a) для интеграла движения, можно получить

$$E/p_x = c(1 + 1/2 B p_x). \quad (1b)$$

Подставив далее (1b) в (4), окончательно для времени взаимодействия t_f получим

$$t_f = (L_{\text{int}}/c)[I(\varphi_0) - 1], \quad (4b)$$

где

$$I(\varphi_0) = \frac{1}{4\pi B p_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\eta}{1 - (\chi^2/4)[\sin(\eta + \varphi_0) - \sin \varphi_0]^2}, \quad \chi^2 = \frac{4Be^2 E_0^2}{p_0 \omega_L^2}.$$

С учетом введенных обозначений выражение для $I(\varphi_0)$ может быть переписано в виде

$$I(\varphi_0) = \frac{(\gamma_0 + \sqrt{\gamma_0^2 - 1})}{2\pi\sqrt{\gamma_0^2 - 1}} \int_0^{2\pi} \frac{d\eta}{1 - (\chi^2/4)[\sin(\eta + \varphi_0) - \sin \varphi_0]^2},$$

и, если $\gamma_0 \gg 1$, то

$$I(\varphi_0) \cong \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\eta}{1 - (\chi^2/4)[\sin(\eta + \varphi_0) - \sin \varphi_0]^2}, \quad \chi^2 \cong e^2 E_0^2 / m^2 c^2 \gamma_0^2 \omega_L^2. \quad (5)$$

Для электронов с $\gamma_0 \gg 1$ функция $I(\varphi_0)$ будет зависеть только от χ . Очевидно, что интеграл в (5) будет сходиться для $\chi < 2$. При $\chi \geq 2$ подынтегральное выражение в (5) будет стремиться к бесконечности в четырех точках, соответствующих нулям знаменателя подынтегрального выражения, однако можно доказать, что интеграл при этом существует и он конечен. На рис.2 представлены зависимости $I(\varphi_0)$ для двух значений $\chi = 1.5$ и $\chi = 3$.

Эффект модуляции обусловлен, в основном, временем пролета (4б), которое зависит от начальной фазы φ_0 и, соответственно, от начальной продольной координаты электрона в сгустке. Поэтому вместо продольных координат электронов в сгустке введем соответствующие временные координаты u (до взаимодействия сгустка с волной) и v (после вылета сгустка из интервала взаимодействия), нормированные на скорость распространения электромагнитной волны c и имеющие размерность времени. Естественно тогда, что связь между этими координатами будет выглядеть как

$$v = u + f(u), \quad \text{где } f(u) = t_f(u) - t_f(0). \quad (6)$$

Если начало координат выбрать так, чтобы $\varphi_0 = 0$ соответствовало $u = 0$, то выражение (6) примет вид

$$v = u + \frac{L_{\text{int}}}{\pi c} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{1 - (\chi^2/4) [\sin(\eta - \omega_L u) + \sin \omega_L u]^2} - \frac{1}{1 - (\chi^2/4) \sin^2 \eta} \right] d\eta. \quad (6a)$$

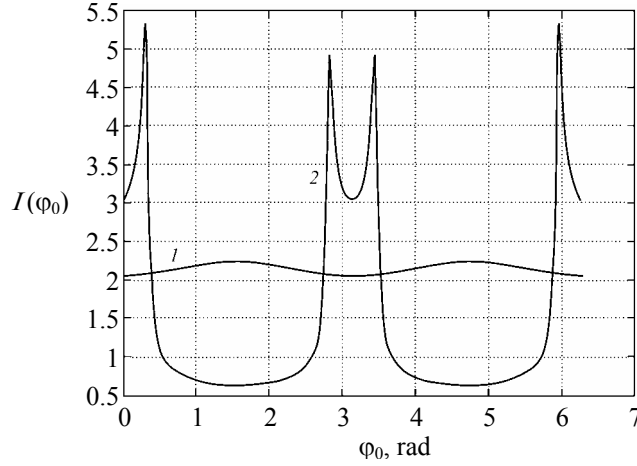


Рис.2. Зависимость $I(\varphi_0)$ от φ_0 (в радианах). Кривая 1 соответствует значению $\chi = 1.5$, а кривая 2 – значению $\chi = 3$.

Пусть теперь распределение заряда в сгустке до взаимодействия с электромагнитной волной описывается функцией $\Lambda_u(u)$. Тогда распределение заряда в сгустке после прохождения через интервал взаимодействия преобразится к виду

$$\Lambda_v(v) = (du/dv) \Lambda_u(u(v)). \quad (7)$$

Из выражения (6a) следует, что

$$\frac{dv}{du} = 1 + \frac{\chi^2 \omega_L L_{\text{int}}}{\pi c} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(\eta/2) \sin(\eta - 2\omega_L u)}{\left[1 - (\chi^2/4) [\sin(\eta - \omega_L u) + \sin \omega_L u]^2 \right]^2} d\eta. \quad (8)$$

Если внешнее поле отсутствует ($\chi = 0$), то получаем $dv/du = 1$ и $\Lambda_v(v) = \Lambda_u(u(v))$, т.е. распределения заряда в сгустке до и после взаимодействия совпадают друг с другом. На рис.3 приведена рассчитанная по формуле $dv/du - 1$ модуляционная кривая в случае напряженности поля 4×10^9 В/м и $\gamma_0 = 15$, иллюстрирующая глубину модуляции.

В работе [9] приведены результаты симуляции плотности заряда в электронном сгустке, взаимодействующем с электромагнитной волной с использованием вигглера, внесенного в тракт. Эти симуляции проводились для эксперимента SLS FEMTO, осуществленного затем на ускорителе PSI (Швейцария), и дали хорошее согласие с экспериментом. Напряженность электрического поля в этом эксперименте достигала значения 1.5×10^{11} В/м, а энергия электронного пучка равнялась 2.4 ГэВ. Соответствующая модуляционная кривая приведена на рис.4.

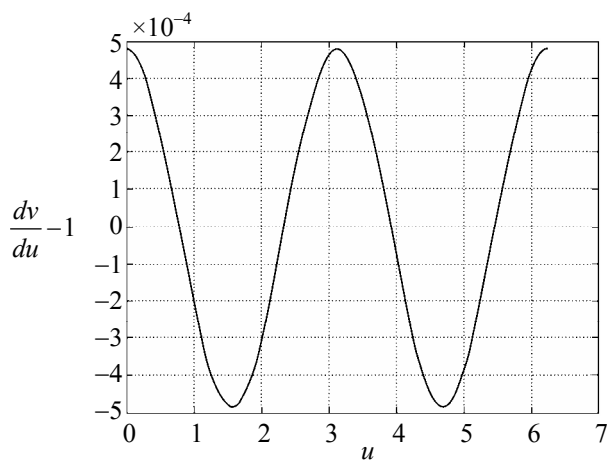


Рис.3. Иллюстрация ожидаемой глубины модуляции.

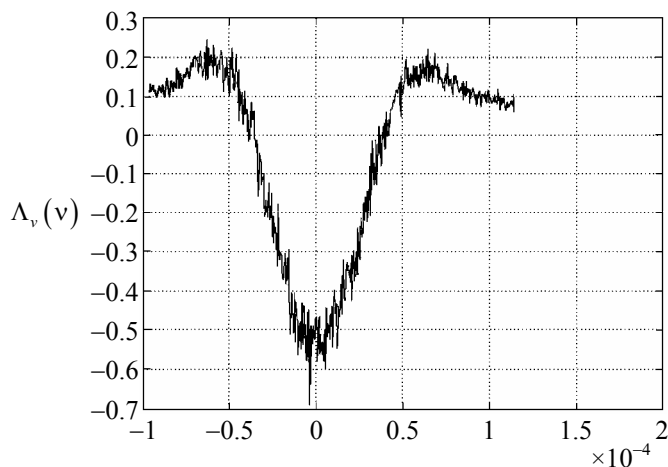


Рис.4. Модуляция плотности заряда в эксперименте SLS ФЕМТО.
Длительность импульса – 50 фс, длина волны – 809 нм.

Сравнение двух модуляционных кривых, изображенных на рис.3 и 4, показывает, что глубина модуляции, рассчитанная нами для встречного движения сгустка и волны (без использования вигглера), оказывается на порядок больше для случая напряженности поля 4×10^9 В/м и энергии электронов с $\gamma = 15$, рассмотренного выше в настоящей работе.

4. Свойства фурье-образа функции $\Lambda_v(v)$ и проблема когерентности

Чтобы электронный сгусток излучал когерентно, характерные размеры сгустка должны быть не больше длины излучаемой волны. Как показано в работе [10], мощность когерентного излучения оказывается пропорциональной фурье-образу продольного распределения излучающего электронного сгустка и записывается в виде

$$P(\omega) = N_b^2 P_e(\omega) \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{N_b} \Lambda_z(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau \right|^2, \quad (9)$$

где $P_e(\omega)$ – спектральная плотность излучения одного электрона, а выражение в скобках – нормированный фурье-образ продольного распределения Λ_z (Λ_u – до и Λ_v – после взаимодействия с волной) электронов в сгустке, имеющий вид

$$F(\omega) = \frac{1}{N_b} \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_z(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau. \quad (10)$$

Оценим нормированный фурье-образ продольного распределения электронов в сгустке после взаимодействия с волной. Используя (6) и (10) для нормированного фурье-образа $F_v(\omega)$, после взаимодействия получим

$$F_v(\omega) = \frac{1}{N_b} \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_u(u) e^{i\omega(u+f(u))} du. \quad (12)$$

Если начальное распределение заряда $\Lambda_u(u)$ гауссовское

$$\Lambda_u(u) = \frac{N_b}{\sigma_\tau \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_\tau^2}}, \quad (13)$$

то выражение (12) принимает вид

$$F_v(\omega) = \frac{1}{\sigma_\tau \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_\tau^2}} e^{i\omega(u+f(u))} du. \quad (14)$$

Исследование формулы (14) с заданной $f(u)$ показало, что этот интеграл существенно отличен от нуля лишь на четных гармониках модулирующего лазерного поля. Нормированный график функции $F_v(\omega)$ в зависимости от частоты модулирующей волны (лазера) $\omega_L = 10^{12}$ рад/с приведен на рис.5.

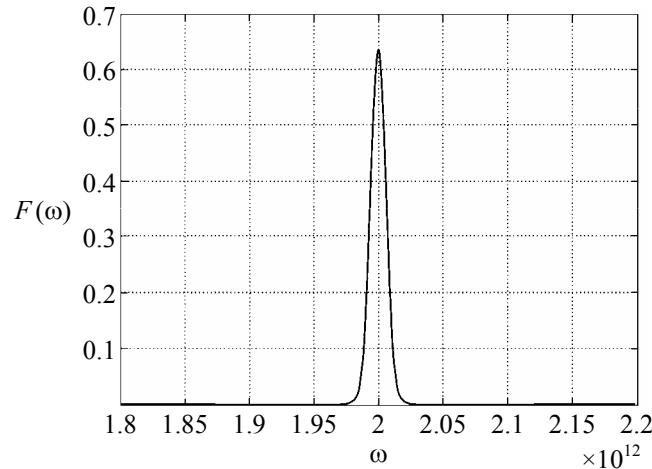


Рис.5. Максимум фурье-образа второй гармоники.

Как видим, спектр заметно отличен от нуля лишь на второй гармонике, когда максимальное значение амплитуды соответствует частоте второй гармоники модулирующего лазерного поля. Сравнение функции $F_v(\omega)$, приведенной на рис.5, с аналогичной функцией из работы [9], где рассматривалось параллельное движение волны и сгустка с введением в тракт модулирующего вигглера, показало, что предложенная нами схема встречного движения волны и сгустка без использования вигглера обеспечивает глубину модуляции на порядок выше.

5. Заключение

Эффективность получения когерентного излучения в современных источниках синхротронного излучения или ЛСЭ обусловлена возможностью получения когерентно излучающих сгустков с малыми характерными размерами. В действующих схемах модуляции плотности заряда использовались модуляторы: вигглеры или ондуляторы. Из настоящего исследования следует, что, направив движение сгустка против направления распространения волны, можно достичь достаточно глубокой модуляции плотности заряда в сгустке без использования модулирующих вигглеров. Доказано при этом, что когерентное излучение модулированного сгустка эффективно происходит на второй гармонике модулирующего поля лазера. Полученные в статье результаты предполагается проверить на пучках ускорительных установок, действующих в ННЛ им. А.И. Алиханяна.

Авторы выражают благодарность Т.А. Арутюняну за помощь при проведении расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **A.Gover, A.Yariv.** Appl. Phys., **16**, 121 (1978).
2. **G.Ingold et al.** Ninth International Conference on Synchrotron Radiation Instrumentation, 2006, Daegu, Korea. AIP Conference Proceedings, **879**, 1198 (2007).
3. **Д.К.Калантарян.** Задачи электродинамических систем, загруженных электронными пучками. Кандидатская диссертация. Ереван, ЕрФИ, 2006.
4. **E.D.Gazazyan, K.A.Ispirian, M.K.Ispirian, D.K.Kalantaryan, D.A.Zakaryan.** Advanced Radiation Sources and Applications, NATO Science Series II, vol.199. ed. by H. Wiedemann, Springer, 2005, p.313.
5. **Э.Д.Газазян, Д.К.Калантарян, М.А.Ходжоян.** Изв. НАН Армении, Физика, **41**, 170 (2006).
6. **E.D.Gazazyan, D.K.Kalantaryan, M.A.Khojoyan.** Proc. of the 43-th Japan Workshop of Accelerator Sciences, KEK, Tsukuba, 2007, p.93.
7. **М.А.Ходжоян.** Электродинамика модуляции электронных сгустков. Кандидатская диссертация. Ереван, ЕрФИ, 2007.
8. **В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский.** Релятивистская квантовая теория, ч.1. М., Наука, 1968.
9. **D.Kalantaryan, A.Streun.** PSI.SLS Internal Reports, SLS-TME-TA-2007-301, 86, 1-JUN-2007.
10. **J.Schwinger.** On Radiation by Electrons in a Betatron, 1945; transcribed by M.A.Furman, Berkeley, CA 94720, August 1999.