Известия НАН Армении, Физика, т.46, №4, с.289-297 (2011)

УДК 536.44

МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА И КВАНТОВАЯ ЗАПУТАННОСТЬ НА ДЕКОРИРОВАННОЙ ЗИГЗАГ-ЛЕСТНИЦЕ

Л.Н. АНАНИКЯН[1], Г.А. ЛАЗАРЯН[2]

[1]Национальная научная лаборатория им. А.И. Алиханяна, Ереван

[2]Ереванский государственный университет, Армения

(Поступила в редакцию 30 марта 2011 г.)

Исследованы магнитные свойства и квантовая запутанность на декорированной зигзаг-лестнице (решетке) для модели Гейзенберга с двух-, трех- и четырехчастичными обменными взаимодействиями. Магнитные свойства и конкуренция (мера квантовой запутанности) изучены при помощи вариационного подхода аппроксимации средним полем, основанного на неравенстве Гиббса–Боголюбова. Получены плато намагниченности и фазовый переход второго рода. Проведено сопоставление квантовой запутанности и магнитных характеристик для зигзаг-лестницы. Найдено, что в антиферромагнитной области квантовая запутанность и намагниченность имеют одинаковое поведение.

1. Введение

Запутанность, как одна из наиболее интересных особенностей квантовой механики, является предметом интенсивных исследований [1,2]. Помимо того, что запутанность играет важную роль в квантовых вычислениях [3], она также открывает новые перспективы в задачах различных систем, состоящих из многих частиц, в частности, запутанность может характеризовать особенности квантового фазового перехода (КФП) [4]. Многие работы [5-8] посвящены пониманию соотношения между КФП и запутанностью в различных системах, однако, большинство из предыдущих работ по КФП и запутанности были ограничены моделями с парными взаимодействиями; модели с трех- или четырехчастичными взаимодействиями менее изучены [9-11]. Существуют разные величины для количественного описания квантовой запутанности [1]. В данной статье используется конкуренция [12] как мера квантовой запутанности для систем со спином 1/2.

Определение свойств запутанности для системы с большим количеством частиц является сложной задачей, поскольку в этом случае собственные функции и собственные значения не могут быть найдены точно. При помощи вариационного подхода аппроксимации средним полем, основанного на неравенстве Гиббса–Боголюбова [13-15], можно свести изучение решетки, состоящей из многих частиц, к ограниченному кластеру, находящемуся в самосогласованном эффективном среднем поле, и рассчитать квантовую запутанность [16,17].

В данной статье этот подход применяется для исследования магнитных свойств и квантовой запутанности для спинов на декорированной зигзаг-лестнице и рассматривается гамильтониан с двух-, трех- и четырехчастичными обменными взаимодействиями [18,19]. Решетки типа лестницы занимают среднюю позицию между одномерными и двумерными решетками. Показано, что вещества типа $Sr_{n-1}Cu_{n+1}O_{2n}$ имеют лестничную структуру [20]. Исследование таких лестничных соединений, как $Sr_{1-n}Cu_nO_2$ и $La_{4+4n}Cu_{8+2n}O_{14+8n}$, интересны тем, что они могут также использоваться в теории высокотемпературной св0ерхпроводимости [21,22]. Соединения $SrCu_2O_3$, $TlCuCl_3$ и NH_4CuCl_3 при комнатной температуре имеют структуру зигзаг-лестницы [23,24]. Зигзаг-лестница также является аппроксимацией двумерной треугольной решетки.

Данная статья организована следующим образом. Раздел 2 посвящен исследованию модели Гейзенберга с двух-, трех- и четырехчастичными обменными взаимодействиями. В разделе 3 к данной системе применяется формализм вариационного среднего поля, основанный на неравенстве Гиббса–Боголюбова. В разделе 4 получены магнитные свойства и квантовая запутанность, а также исследована связь между квантовыми и статистическими характеристиками системы. И, наконец, в разделе 5 содержатся заключительные замечания.

2. Гейзенберговский гамильтониан с двух-, трех- и четырехчастичными обменными взаимодействиями

Рассмотрим квантовый гейзенберговский гамильтониан, имеющий, кроме парного обменного взаимодействия, еще и трех- и четырехчастичное обменные взаимодействия [18,19]. Такой гамильтониан состоит из двух частей:

$$H = H_{ex} + H_Z, \qquad (1)$$

где H_{ex} есть гамильтониан обменного взаимодействия, а H_Z – гамильтониан взаимодействия с внешним магнитным полем (зеемановский гамильтониан). Выражение для зеемановского гамильтониана имеет следующий вид [1]:

$$H_Z = -\sum_i \frac{\gamma}{2}\hbar \mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}_i \equiv -h\sum_i \sigma_i^z, \qquad (2)$$

где γ – гиромагнитное отношение для частиц, а **B** – магнитное поле, направленное по оси *z*. Для зигзаг-лестницы (см. рис.1) обменный гамильтониан с двух-, трех- и четырехчастичным обменными взаимодействиями имеет следующий вид [19]:

$$H_{ex} = J_2\sum_{\langle i,j\rangle} P_{i,j} - J_3\sum_{\langle i,j,k\rangle}\left(P_{i,j,k} + P_{i,j,k}^{-1}\right) + J_4\sum_{\langle i,j,k,l\rangle}\left(P_{i,j,k,l} + P_{i,j,k,l}^{-1}\right), \qquad (3)$$

где $P_{i,j}$, $P_{i,j,k}$ и $P_{i,j,k,l}$ – операторы циклических перестановок, соответственно, двух, трех и четырех частиц, а суммирование проводится, соответственно, по всем ребрам, треугольникам и четырехугольникам. Выражение для $P_{i,j}$ имеет вид

$$P_{ij} = (1/2)\left(1 + \boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\sigma}_j\right), \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\sigma}_i = \{\sigma_i^x, \sigma_i^y, \sigma_i^z\}$ – матрицы Паули для вершин *i*. Используя последнее, можно получить выражение для $P_{i,j,k}$ и $P_{i,j,k,l}$. Следуя работе [19], можно записать

$$P_{i,j,k} + P_{i,j,k}^{-1} = \left(1 + \boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\sigma}_j + \boldsymbol{\sigma}_j \boldsymbol{\sigma}_k + \boldsymbol{\sigma}_k \boldsymbol{\sigma}_i\right)/2, \tag{5}$$

$$P_{i,j,k,l} + P_{i,j,k,l}^{-1} = \frac{1}{4}\left(1 + \sum_{\nu<\mu} \boldsymbol{\sigma}_\nu \boldsymbol{\sigma}_\mu + G(\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\sigma}_j, \boldsymbol{\sigma}_k, \boldsymbol{\sigma}_l)\right), \tag{6}$$

где

$$G(\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\sigma}_j, \boldsymbol{\sigma}_k, \boldsymbol{\sigma}_l) = (\boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\sigma}_j)(\boldsymbol{\sigma}_l \boldsymbol{\sigma}_k) + (\boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\sigma}_l)(\boldsymbol{\sigma}_j \boldsymbol{\sigma}_k) - (\boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\sigma}_k)(\boldsymbol{\sigma}_l \boldsymbol{\sigma}_j), \tag{7}$$

и суммирование производится по всем $(\nu < \mu)$ парам из (i, j, k, l). Опуская несущественные константы, выражение для гамильтониана можно записать в виде

$$\begin{aligned} H = {} & \frac{J_2}{2} \sum_{i,j} \boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\sigma}_j - \frac{J_3}{2} \sum_{i,j,k} \left(\boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\sigma}_j + \boldsymbol{\sigma}_j \boldsymbol{\sigma}_k + \boldsymbol{\sigma}_k \boldsymbol{\sigma}_i\right) + \\ & + \frac{J_4}{4} \sum_{i,j,k,l} \left(\sum_{\nu<\mu} \boldsymbol{\sigma}_\nu \boldsymbol{\sigma}_\mu + G(\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\sigma}_j, \boldsymbol{\sigma}_k, \boldsymbol{\sigma}_l)\right) - h \sum_i \sigma_i^z. \end{aligned} \tag{8}$$

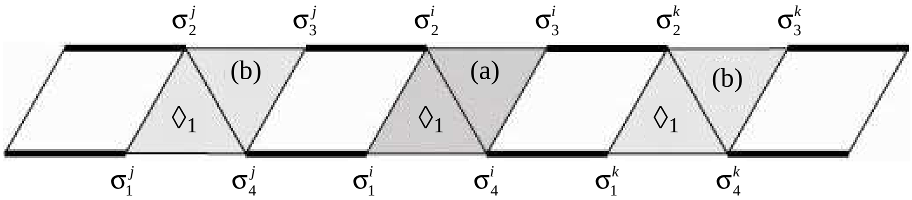

Рис.1. Зигзаг-лестница.

3. Формализм вариационного среднего поля, основанный на неравенстве Гиббса–Боголюбова

Мы применяем вариационную теорию среднего поля, основанную на неравенстве Гиббса–Боголюбова [14], чтобы упростить гамильтониан (8) и найти его собственные значения и векторы. Неравенство Гиббса–Боголюбова имеет следующий вид:

$$F \le F_0 + \langle H - H_0 \rangle_0, \tag{9}$$

где H – реальный гамильтониан, который описывает систему, а H_0 – некий пробный гамильтониан. Величины F и F_0 есть свободные энергии, соответствующие H и H_0, а $\langle \ldots \rangle_0$ означает статистическое усреднение по пробному гамильтониану H_0. Введем пробный гамильтониан H_0 так, чтобы он содержал некоторые неизвестные параметры. Минимизируя правую сторону неравенства (9), мы получим такие значения неизвестных параметров, для которых пробный гамильтониан H_0 максимально хорошо аппроксимирует реальный гамильтониан *H*. В связи с особенностями данного метода для антиферромагнитного взаимодействия, пробный гамильтониан должен состоять из двух частей, описывающих две подрешетки. Введем пробный гамильтониан H_0 как множество невзаимодействующих кластеров состоящих из спинов на четырехугольниках на двух подрешетках (см. рис.1):

$$H_0 = \sum_{\blacklozenge_i} H_\upsilon^{(i)}, \tag{10}$$

где

$$\begin{gathered} H_\upsilon^{(i)} = \lambda_1 \left(\boldsymbol{\sigma}_1^i \boldsymbol{\sigma}_2^i + \boldsymbol{\sigma}_2^i \boldsymbol{\sigma}_3^i + \boldsymbol{\sigma}_3^i \boldsymbol{\sigma}_4^i + \boldsymbol{\sigma}_1^i \boldsymbol{\sigma}_4^i \right) + \lambda_2 \boldsymbol{\sigma}_2^i \boldsymbol{\sigma}_4^i + \\ + \lambda_3 \left(\sum_{\nu<\mu} \boldsymbol{\sigma}_\nu^i \boldsymbol{\sigma}_\mu^i + G^{(i)} \right) - \gamma_\upsilon \sum_{\alpha=1}^{4} (\sigma_\alpha^i)^z, \end{gathered} \tag{11}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и γ_υ – вариационные параметры, а индекс суммирования $\blacklozenge_i$ нумерует разные невзаимодействующие четырехугольники (см. рис.1, темные четырехугольники), причем

$$\begin{aligned} &\text{при четных } i \quad \gamma_\upsilon = \gamma_a: \quad \text{подрешетка (a)}, \\ &\text{при нечетных } i \quad \gamma_\upsilon = \gamma_b: \quad \text{подрешетка (b)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Подчеркнем, что в пробном гамильтониане спин $\boldsymbol{\sigma}_k^i$ из $\blacklozenge_i$-го четырехугольника не взаимодействует со спином $\boldsymbol{\sigma}_k^j$ $\blacklozenge_j$-го четырехугольника, если $i \neq j$, поэтому эти спины статистически независимы. Предположим, что реальный гамильтониан H(8) можно представить в виде суммы

$$H = \sum_{\blacklozenge_i} H^{(i)}, \tag{13}$$

где $H^{(i)}$ есть вклад одного четырехугольника в гамильтониан, а индекс суммирования $\blacklozenge_i$ нумерует разные невзаимодействующие четырехугольники (см. рис.1, темные четырехугольники). Так как члены вида $\boldsymbol{\sigma}_a^i \boldsymbol{\sigma}_b^i$ должны входить только в $H^{(i)}$, то они имеют те же коэффициенты, что и общий *H*. Напротив, члены вида $\boldsymbol{\sigma}_a^i \boldsymbol{\sigma}_b^j$ (см. рис.1, жирные линии) должны входить как в $H^{(i)}$, так и в $H^{(j)}$, и, следовательно, их коэффициенты поделятся на два. Окончательный вид $H^{(i)}$ таков:

$$\begin{gathered} H^{(i)} = J_1' \left(\boldsymbol{\sigma}_1^i \boldsymbol{\sigma}_2^i + \boldsymbol{\sigma}_3^i \boldsymbol{\sigma}_4^i + \boldsymbol{\sigma}_1^i \boldsymbol{\sigma}_4^i + \boldsymbol{\sigma}_2^i \boldsymbol{\sigma}_3^i \right) + J_2' \left(\boldsymbol{\sigma}_2^i \boldsymbol{\sigma}_4^i \right) + J_3' \left(\boldsymbol{\sigma}_1^i \boldsymbol{\sigma}_3^i + G^{(i)} \right) + \\ + \frac{J_2}{4} \left(\boldsymbol{\sigma}_4^i \boldsymbol{\sigma}_1^k + \boldsymbol{\sigma}_3^i \boldsymbol{\sigma}_2^k \right) + \frac{J_2}{4} \left(\boldsymbol{\sigma}_4^j \boldsymbol{\sigma}_1^i + \boldsymbol{\sigma}_3^j \boldsymbol{\sigma}_2^i \right) - h \sum_{\alpha=1}^{4} (\sigma_\alpha^i)^z, \end{gathered} \tag{14}$$

где

$$J_1' = J_2/2 - J_3/2 + J_4/4, \;\; J_2' = J_2/2 - 2J_3/2 + J_4/4, \;\; J_3' = J_4/4. \tag{15}$$

Неравенство (9) можно записать для одного четырехугольника разных подрешеток:

$$f_\upsilon \le (f_0)_\upsilon + \left\langle H^{(i)} - H_0^{(i)} \right\rangle_0, \qquad (16)$$

где $H^{(i)}$ есть реальный, а $H_0^{(i)}$ – пробный гамильтонианы одного четырехугольника, а f_υ и $(f_0)_\upsilon$ – соответствующие свободные энергии подрешетки (υ). Принимая во внимание, что спин $\boldsymbol{\sigma}_p^i$ принадлежит подрешетке (a), а спины
$\boldsymbol{\sigma}_p^{j,k}$ принадлежат подрешетке (b), мы получим $\left\langle (\boldsymbol{\sigma}_p^{i,j,k})^{x,y} \right\rangle = 0$, $m_a \equiv \left\langle (\boldsymbol{\sigma}_p^i)^z \right\rangle \big/ 2$, $m_b \equiv \left\langle (\boldsymbol{\sigma}_p^{j,k})^z \right\rangle \big/ 2$. Так как спины $\boldsymbol{\sigma}_a^i$ и $\boldsymbol{\sigma}_b^{j,k}$ статистически независимы, то получаем $\left\langle \boldsymbol{\sigma}_a^i \boldsymbol{\sigma}_b^j \right\rangle = \left\langle (\boldsymbol{\sigma}_a^i)^z \right\rangle \times \left\langle (\boldsymbol{\sigma}_b^j)^z \right\rangle = 4 m_a m_b$. Теперь можно переписать неравенство (16) для подрешетки (υ) следующим образом:

$$\begin{aligned} f_\upsilon \le (f_0)_\upsilon &+ (J_1' - \lambda_1 - \lambda_3)\left\langle \boldsymbol{\sigma}_1^i \boldsymbol{\sigma}_2^i + \boldsymbol{\sigma}_2^i \boldsymbol{\sigma}_3^i + \boldsymbol{\sigma}_3^i \boldsymbol{\sigma}_4^i + \boldsymbol{\sigma}_1^i \boldsymbol{\sigma}_4^i \right\rangle_0 + (J_2' - \lambda_2 - \lambda_3)\left\langle \boldsymbol{\sigma}_2^i \boldsymbol{\sigma}_4^i \right\rangle_0 + \\ &+ (J_3' - \lambda_3)\left\langle \boldsymbol{\sigma}_1^i \boldsymbol{\sigma}_3^i + G^{(i)} \right\rangle_0 + (4J_2/4)(4 m_a m_b) - 4(h - \gamma_\upsilon) 2 m_\upsilon. \end{aligned} \qquad (17)$$

Минимизируя правую сторону неравенства (17) по отношению к $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и $\gamma_{a,b}$, получим следующие значения:

$$\lambda_1 = J_1' - J_3', \quad \lambda_2 = J_2' - J_3', \quad \lambda_3 = J_3',$$

$$\gamma_a = h - (J_2/2) m_b, \quad \gamma_b = h - (J_2/2) m_a. \qquad (18)$$

Собственные векторы гамильтониана $H_0^{(i)}$ в общем случае не зависят от параметров и могут быть найдены методом диагонализации.

4. Магнитные свойства и квантовая запутанность

Для простоты в остальной части статьи все константы связи будут определяться в единицах константы Больцмана, вследствие чего новые константы связи будут иметь размерность температуры ($J_k' = J_k' / k_B$, $h = h / k_B$). Намагниченность, по определению, есть среднее значение оператора спина, т.е.

$$m_\upsilon = \langle S_\upsilon \rangle = \mathrm{Tr}\left(S_\upsilon \exp\left(-H_\upsilon^i / T \right) \right) \big/ Z, \qquad (19)$$

где S_υ – оператор спина, H_υ^i – гамильтониан системы (11) с найденными константами (18), Z – статистическая сумма системы и по определению есть

$$Z = \mathrm{Tr}\left(\exp\left(-H_\upsilon^i / T \right) \right). \qquad (20)$$

Однако, согласно (18), в выражение m_a входит m_b (посредством γ_a) и наоборот. Зависимость намагниченности m_a от внешнего магнитного поля h можно найти, решая получившееся рекурсивное уравнение (19) для каждого значения магнитного поля. На рис.2a приведены зависимости намагниченностей m_a и m_b при $T = 0.01$ мК, $J_2 = 2$ мК, $J_3 = 2.5$ мК, $J_4 = 2$ мК. Как видно из рисунка, существуют области, где $m_a \ne m_b$. Таким образом, в этой области система действительно разбивается на две подрешетки с разными намагниченностями. При малых значениях J_2 имеется плато намагниченности 1/4 (рис.2a), что соответствует устойчивости фазы $\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow$, но при больших J_2 (рис.2b) в системе появляется и нулевое плато, что является следствием того, что энергия устойчивой фазы $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow$ становится минимальной. Метод среднего поля позволяет получить фазовый переход при нулевом внешнем поле. На рис.2c сплошной линией показана зависимость намагниченности при нулевом поле m_0 от температуры T. Как видно из этого графика, в отсутствие поля намагниченность одной подрешетки постепенно стремится к нулю при определенной критической температуре T_C. Эта точка является точкой фазового перехода второго рода между упорядоченной и неупорядоченной фазами.

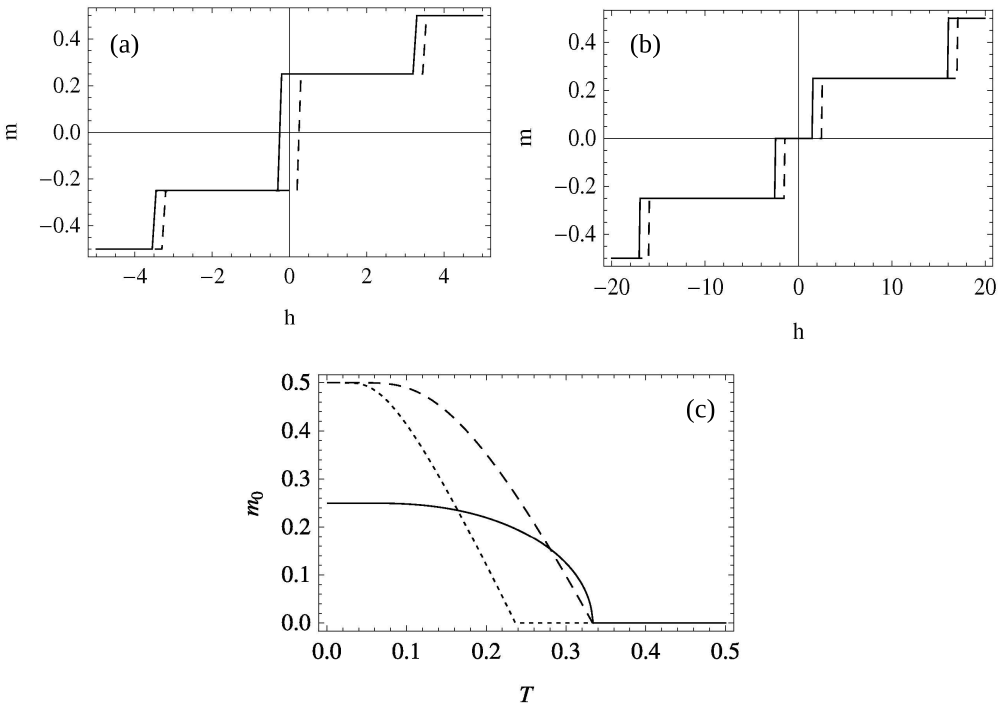

Рис.2. Зависимость намагниченностей m_a и m_b от магнитного поля h при $J_3 = 2.5$ мК, $J_4 = 2$ мК и $T = 0.01$ мК и (a) $J_2 = 2$ мК, (b) $J_2 = 8$ мК; (c) зависимость намагниченности m_0 (сплошная линия) и конкуренции (пунктирная линия – диагональные спины, штриховая линия – недиагональные спины) при нулевом внешнем поле от температуры T при $J_2 = 2$ мК, $J_3 = 2.5$ мК и $J_4 = 2$ мК.

Метод среднего поля позволяет рассматривать только один кластер зигзаг-лестницы в эффективном среднем поле γ и рассчитать квантовую запутанность, изучить ее свойства. В качестве меры для квантовой запутанности мы будем использовать конкуренцию [12]. Конкуренция $C(\rho)$ при данной матрице плотности ρ определяется следующим образом:

$$C(\rho) = \max\{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0\}. \quad (21)$$

Здесь λ_i есть квадратные корни от собственных значений оператора

$$\tilde{\rho} = \rho_{12}(\sigma_1^y \otimes \sigma_2^y)\rho_{12}^*(\sigma_1^y \otimes \sigma_2^y), \qquad (22)$$

где $\rho_{12} = \mathrm{Tr}_{3,4}\rho$ соответствует матрице плотности только одной пары в кластере. Матрица плотности ρ определяется следующим образом:

$$\rho = \frac{1}{Z}\sum_{i=1}^{16} e^{-\frac{E_i}{T}} |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \qquad (23)$$

где Z – статистическая сумма системы, а ψ_i и E_i – собственные функции и значения гамильтониана $H_0^{(i)}$ (см. формулу (11)). Матрица ρ_{12} имеет следующий вид:

$$\rho_{12} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & y & 0 \\ 0 & y & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}, \qquad (24)$$

где u, w, y и v – некоторые функции переменных γ, λ_i и T. Имея (21), (22) и (24), можно найти выражение для конкуренции $C(\rho)$:

$$C(\rho) = \max\{|y| - \sqrt{uv}, 0\}. \qquad (25)$$

Так как $\gamma_a = h - (J_2/2)m_b$ (см. (18)), то конкуренция $C(\rho)$ подрешетки (a) является функцией от намагниченности m_b подрешетки (b) и наоборот. Чтобы рассчитать конкуренцию, нужно решить рекурсивное уравнение (19) для каждого набора параметров (J_i', h, T) и для полученного решения, при помощи (25) рассчитать конкуренцию. Так как кластер зигзаг-решетки состоит из четырех несимметричных спинов, то можно ожидать, что конкуренция диагональных пар может не совпадать с конкуренций недиагональных пар.

Важно рассмотреть связь между свойствами статистических и квантовых характеристик системы. В нашем случае статистической характеристикой является намагниченность m, а квантовой – конкуренция $C(\rho)$. На рис.2c пунктирными линиями показаны конкуренции недиагональных и диагональных спинов как функции от T при нулевом внешнем поле и с фиксированными $J_2 = 2\,\text{мК}$, $J_3 = 2.5\,\text{мК}$ и $J_4 = 2\,\text{мК}$. Сравнивая с аналогичным графиком для намагниченности (рис.2c, сплошная линия), можно сказать, что при отсутствии поля конкуренция для недиагональных спинов исчезает при той же критической температуре T_C, что и намагниченность, а конкуренция для недиагональных спинов – при меньшей температуре. При $T > T_C$ и нулевом внешнем поле запутанность всех пар спинов равна нулю.

На рис.3 показаны намагниченность m и конкуренции $C(\rho)$ для недиагональных и диагональных спинов как функции от J_2 и внешнего поля h (при фиксированном $J_3 = 2.5\,\text{мК}$, $J_4 = 2\,\text{мК}$ и $T = 0.5\,\text{мК}$). Сравнивая эти графики, можно увидеть схожесть поведения намагниченности и конкуренции. При тех значениях J_2 и h, когда наблюдается плато намагниченности, конкуренция также имеет плато.

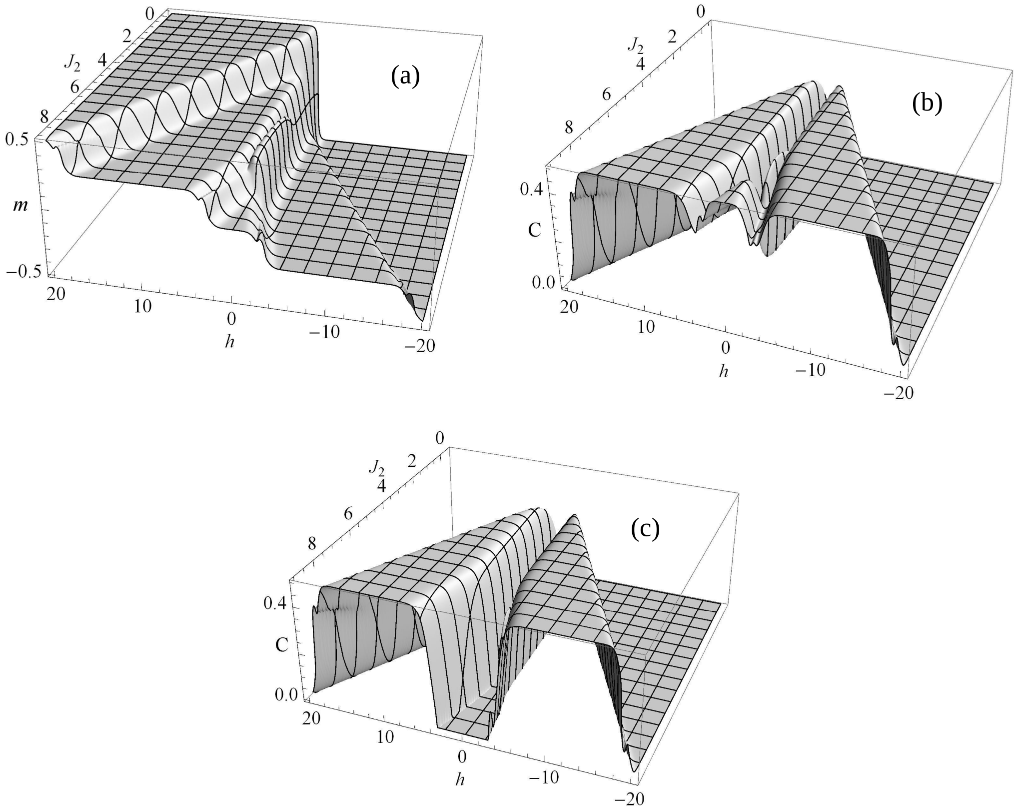

Рис.3. Зависимости (a) намагниченности m, (b) конкуренции $C(\rho)$ для недиагональных спинов и (c) конкуренции $C(\rho)$ для диагональных спинов от магнитного поля h и константы взаимодействия J_2 при $J_3 = 2.5$ мК, $J_4 = 2$ mK и $T = 0{,}5$ мК .

5. Заключение

Нами исследована связь между магнитными свойствами и квантовой запутанностью на декорированной зигзаг-лестнице с двух-, трех- и четырехчастичными обменными взаимодействиями. Мы применили вариационный подход аппроксимации средним полем, основанный на неравенстве Гиббса–Боголюбова. Получены плато намагниченности и квантовый фазовый переход второго рода от упорядоченного к неупорядоченному состоянию. Проведено сопоставление квантовой запутанности и магнитных характеристик для зигзаг-лестницы. Найдено, что в антиферромагнитной области квантовая запутанность и магнитная восприимчивость имеют одинаковое поведение.

Данная работа поддержана научно-исследовательскими грантами ECSP-09-08-SAS NFSAT и 1981-PS, 2497-PS ANSEF.

Авторы благодарны Н.С. Ананикяну за многочисленные стимулирующие обсуждения, а также Л.А. Чахмахчяну, В.С. Абгаряну и В.В. Оганнисяну за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **L.Amico, R.Fazio, A.Osterloh, V.Vedral.** Rev. Mod. Phys., **80,** 517 (2008); **O.Gëuhne, G.Toth.** Phys. Rep., **474**, 1 (2009); **R.Horodecki et al.** Rev. Mod. Phys., **81**, 865 (2009).
2. **X.Wang, H.Fu, A.I.Solomon.** J. of Physics A: Math. and Gen., **34**, 11307 (2001).
3. **C.H.Bennett, D.P.DiVincenzo.** Nature, **404,** 247 (2000).
4. **S.Sachdev.** Quantum Phase Transitions. Cambridge, Cambridge University Press, 2000.
5. **A.Osterloh, L.Amico, G.Falci, R.Fazio.** Nature (London), **416**, 608 (2000).
6. **T.J.Osborne, M.A.Nielsen.** Phys. Rev. A, **66**, 032110 (2002).
7. **J.Vidal.** Phys. Rev. A, **73**, 062318 (2006).
8. **S.Yi, H.Pu.** Phys. Rev. A, **73**, 023602 (2006).
9. **A.Bose, A.Tribedi.** Phys. Rev. A, **72**, 022314 (2005).
10. **J.L.Song, S.J.Gu, H.Q.Lin.** Phys. Rev. B, **74**, 155119 (2006).
11. **V.S.Abgaryan, N.S.Ananikian, L.N.Ananikyan, A.N.Kocharian.** Physica Scripta, **83** (2011) (in press).
12. **S.Hill, W.K.Wootters.** Phys. Rev. Lett., **78**, 5022 (1997), **W.K.Wootters.** Phys. Rev. Lett., **80**, 2245 (1998).
13. **N.N.Bogoliubov.** J. Phys. (USSR), **11**, 23 (1947).
14. **G.D.Mahan.** Many-Particle Physics. Kluwer/Plenum, New York, 2000; **X.-G.Wen.** Quantum Field Theory of Many-Body Systems. Oxford, OUP, 2004.
15. **S.S.Gong, G.Su.** Phys. Rev. A, **80**, 012323 (2009); **M.Asoudeh, V.Karimipour.** Phys. Rev. A, **73**, 062109 (2006).
16. **N.S.Ananikian, L.N.Ananikyan, L.A.Chakhmakhchyan, A.N.Kocharian.** J. Phys. A: Math. Theor., **44,** 025001 (2011).
17. **N.S.Ananikian, L.N.Ananikyan, H.A.Lazaryan.** Physics of Atomic Nuclei, **74** (2011) (in press).
18. **M.Roger, J.H.Hetherington, J.M.Delrieu.** Rev. Mod. Phys., **55**, 1 (1983).
19. **T.A.Arakelyan, V.R.Ohanyan, L.N.Ananikyan, N.S.Ananikian, M.Roger.** Phys. Rev. B, **67** (2003) 024424; **L.N.Ananikyan.** Int. J. of Mod. Phys. B, **21,** 755 (2007).
20. **T.M.Rice, S.Gopalan, M.Sigrist**. Europhys. Lett., **23**, 445 (1994).
21. **J.B.Martson, J.O.Fjaerested, A.Sudb.** Phys. Rev. Lett., **89**, 056404 (2002).
22. **U.Schollwk, S.Chakravarty, J.O.Fraerested, J.B.Martson, M.Troyer**. Phys. Rev. Lett., **90**, 186401 (2003).
23. **W.Shiramura** et al. J. Phys. Soc. Jpn., **67**, 1548 (1998).

V.V.Hovhannisyan, N.S.Ananikian. Phys. Lett. A, **372**, 3363 (2008).

MAGNETIC PROPERTIES AND QUANTUM ENTANGLEMENT ON DECORATED ZIGZAG LADDER

L.N. ANANIKYAN, H.A. LAZARYAN

Magnetic properties and quantum entanglement of Heisenberg model with two-, three- and four-site exchange interactions on zigzag ladder are studied. Magnetic properties and concurrence (measure of quantum entanglement) are analyzed by means of variational mean-field-like treatment based on the Gibbs–Bogoliubov inequality. The magnetization plateau and second–order phase transition were obtained. A comparison of the entanglement and magnetic behavior for zigzag ladder is made. We have found that in the antiferromagnetic region the behavior of the concurrence coincides with the magnetization one.