

УДК 539.2

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ В НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЕ

А.С. АБРААМЯН¹, А.С. МИКАЕЛЯН^{1,2}, К.Г. СААКЯН¹, Б.В. ХАЧАТРЯН²

¹Институт прикладных проблем физики НАН Армении, Ереван

²Ереванский государственный университет, Армения

(Поступила в редакцию 23 февраля 2011 г.)

Семейство динамических вольт-амперных характеристик, полученное в газовой смеси CO_2 лазера для разных частот модуляции тока разряда описано с помощью теории катастроф. Показано, что в области критических точек вольт-амперных характеристик можно получить не только качественные, но и количественные характеристики управляющих параметров. Наилучшее совпадение с экспериментальными результатами получено для катастроф типа “Ласточкин Хвост”.

Параметры плазмы обусловлены различными взаимосвязанными процессами, причем часто плавное изменение одного из параметров может привести к скачкообразному изменению других [1–3]. Ввиду большого числа независимых параметров и меньшего числа (а также сложности) уравнений, в которые эти параметры входят, описать состояние плазмы простыми математическими уравнениями затруднительно, поэтому для исследования акустоплазменной среды целесообразно использовать теорию катастроф [4,5], которая позволяет рассчитать изменение равновесной потенциальной функции при изменении управляющих параметров, число которых невелико. Использовать теорию катастроф для описания скачков в плазме предлагалось и ранее [1–5], но описание носило общий качественный характер. Разработанный нами способ обработки экспериментальных данных впервые позволяет получить количественные результаты.

В эксперименте исследовалась разрядная трубка с длиной разрядного промежутка 0.11 м, диаметром разрядного канала 0.01 м и газовой смесью CO_2 -лазера ($\text{CO}_2:\text{N}_2:\text{He} = 1:1:8$) при давлении в трубке 1330 Па (10 Торр). Разрядная трубка питается током, содержащим постоянную и переменную компоненты. В результате в разрядной трубке возникает акустическое поле, взаимодействующее с плазмой и плазма переходит в новое – акустоплазменное состояние [3,6,7]. При модуляции тока разряда по синусоидальному закону напряжение на разрядной трубке модулируется с той же частотой, но изменение текущего значения напряжения на разрядной трубке в течение периода модуляции может от-

личаться от синусоидального. Измерялась динамическая вольт-амперная характеристика (ВАХ), представляющая собой зависимость мгновенного напряжения на разрядной трубке от текущего значения тока разряда в течение одного периода модуляции и усредненная по многим периодам модулированного напряжения. В процессе эксперимента изменялись частота и глубина модуляции тока разряда (под глубиной модуляции понимается отношение среднеквадратичного значения переменной компоненты измеряемой величины к величине постоянной компоненты).

На рис.1 представлены динамические ВАХ на участке возрастания разрядного тока (от минимального до максимального значений) для частот модуляции в диапазоне от 0.1 до 20 кГц, т.е. $U(I, f)$, где U – текущее значение напряжения на разрядной трубке в течение периода модуляции, I – текущее значение разрядного тока, f – частота модуляции.

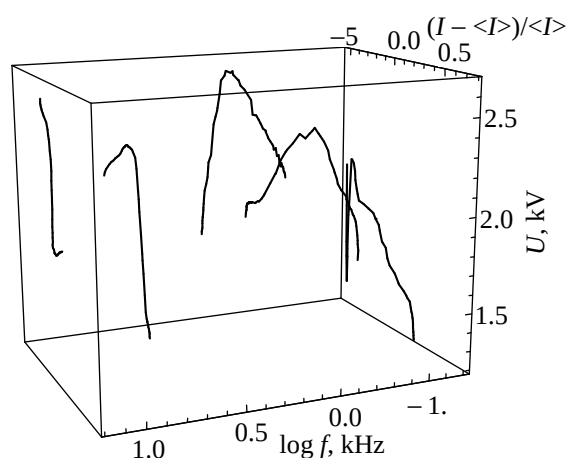


Рис.1. 3D-представление динамических ВАХ на участке возрастания тока (от минимального до максимального значений) для частот модуляции от 0.1 до 20 кГц.

В плоскости основания по оси абсцисс отложен логарифм частоты модуляции тока разряда – $\log f$ (кГц); по оси ординат – нормированное текущее значение тока разряда $(I - \langle I \rangle) / \langle I \rangle$, где $\langle I \rangle$ – среднее за период модуляции значение тока; по вертикальной оси z отложено текущее значение напряжения на разрядной трубке в течение части периода модуляции, соответствующего возрастанию тока от минимального до максимального значений.

По измеренным в эксперименте ВАХ строились аппроксимации экспериментальных кривых в виде многочленов. Аппроксимирующие многочлены для U выбирались в форме уравнений катастроф (исследовались катастрофы складки – СК, сборки – СБ и ласточкин хвост – ЛХ). Например, для катастрофы ЛХ многочлен, аппроксимирующий экспериментальные результаты, имеет вид

$$U_f = Ax^5 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E, \quad (1)$$

где индекс f соответствует частоте модуляции, A, B, C, D, E – коэффициенты аппроксимирующей кривой, определяемые из эксперимента (рассчитаны с использованием программы Mathematica), $x = (I - \langle I \rangle) / \langle I \rangle$. Таким образом, для каждой частоты модуляции f имеем отдельное уравнение (1).

В качестве критерия согласия аппроксимирующей кривой (1) с экспериментальными точками использовалось среднеквадратичное отклонение экспериментальных точек от теоретической кривой. Поскольку число оцифрованных точек в течение одного периода модуляции составляло 120, то использование среднеквадратичного отклонения (СКО) проще и точнее, чем использование статистических критериев согласия [8].

По критерию СКО оценивалось согласие поведения измеренного в эксперименте напряжения на разрядной трубке с аппроксимирующими его членами для всех трех катастроф (СК, СБ, ЛХ).

В табл.1 приведены оценки СКО для аппроксимации напряжения на разрядной трубке при возрастании тока разряда в течение периода модуляции для разных частот модуляции U_f , при глубине модуляции тока ~ 1 . Наилучшему согласию соответствует наименьшее значение СКО. Погрешность определения СКО – четвертый знак после запятой. Из табл.1 следует, что наилучшее согласие для всей серии экспериментов обеспечивают аппроксимации кривых напряжения катастрофой типа ЛХ.

Табл. 1.

кГц	ЛХ	СБ	СК
0.1	0.269055	0.317588	0.400418
0.2	0.113104	0.123937	0.131376
0.4	0.022065	0.023622	0.023901
0.8	0.023434	0.028807	0.041388
1	0.044966	0.051154	0.060781
1.5	0.023775	0.025006	0.093687
3	0.064172	0.082979	0.090684
6	0.05764	0.058405	0.086376
10	0.169104	0.169965	0.1761
15	0.128847	0.130083	0.129456
20	0.022476	0.025441	0.061225

Приведем (1) к каноническому виду катастрофы ЛХ [5]. Для этого перенесем E в левую часть и обе части уравнения (1) разделим на $5A$:

$$V = x^5/5 + ax^3/3 + bx^2/2 + cx, \quad (2)$$

где V – потенциальная функция ($V = (E - U)/5A$), a, b, c – управляющие параметры.

Для плазмы задача облегчается тем, что напряжение U на разрядной трубке уже является потенциальной функцией, причем легко измеряемой. Управляющими параметрами являются комбинации измеряемых величин тока разряда I , частоты модуляции f , глубины модуляции M , давления газа в разрядной трубке P_0 (или парциальных давлений $P_{1,2,3}$ для смеси газов) и геометрических размеров разрядной трубки.

Поскольку $U(I)$ является потенциальной функцией, то согласно теории катастроф, условие $dU/dI = 0$ определяет критические точки, где возможны скачки параметров, а условие $d^2U/dI^2 < 0$ определяет точки локальных максимумов, т.е. точки неустойчивого равновесия, где скачки неизбежны. Но с другой стороны, величина $dU/dI = R_{\text{dif}}$ – это дифференциальное сопротивление разряда, и его также можно измерить экспериментально.

Как известно, в области $R_{\text{dif}} < 0$ система находится в состоянии неустойчивого равновесия, что используется для генерации колебаний [9]. Снова, по критерию СКО (в течение периода модуляции) проверяем согласие поведения экспериментально полученного R_{dif} с дифференциалами аппроксимационных многочленов всех трех катастроф – табл.2.

Табл. 2.

кГц	ЛХ	СБ	СК
0.1	7.426895647	7.448332663	7.491493154
0.2	2.182199585	2.204829507	2.206568539
0.4	0.257173335	0.258288039	0.260339671
0.8	0.282124358	0.271761175	0.266560432
1	0.115836315	0.117495899	0.11486807
1.5	0.133610572	0.139372184	0.18063147
3	0.483293037	0.564741551	0.579787243
6	0.329716622	0.332716454	0.340038448
10	1.990939018	1.977055189	1.981894416
15	0.122813478	0.232906694	26.60074662
20	0.039760814	0.05490531	0.206557931

Из табл.2 следует, что вновь наилучшее согласие для всей серии экспериментов по измерению R_{dif} обеспечивает аппроксимация кривой напряжения катастрофой типа ЛХ.

Дифференцируя (2) по I и приравнивая дифференциал к нулю, согласно [5], можно построить проекцию многообразия катастроф типа ЛХ в пространстве управляющих параметров, используя значения a , b , c , полученные из аппроксимационных многочленов $U(I)$ для разных частот.

На рис.2а представлена 3D зависимость параметров a , b , c для канонического уравнения (2). Для проведенного эксперимента в акустоплазме области

изменения параметров можно соотнести как $a:b:c = (-0.002; -0.023):(0.01; 0.57):(-3.55; +0.57)$. На рис.2b представлена 3D-зависимость параметров a, b, c для канонического уравнения (2) для указанной области изменения управляющих параметров.

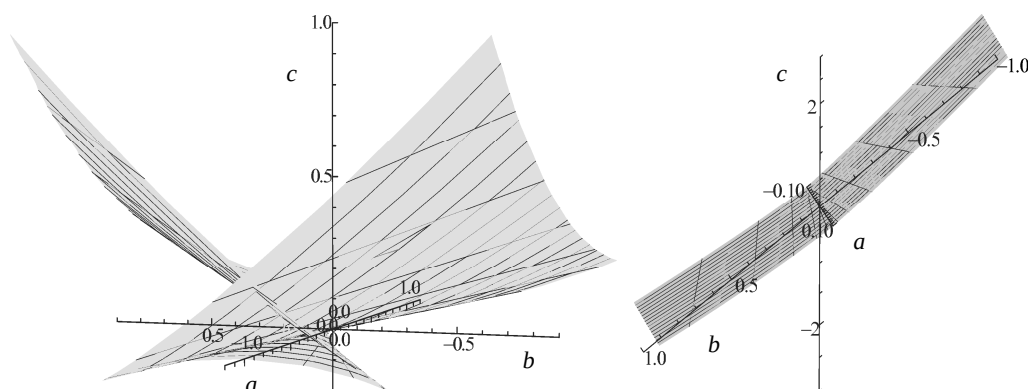


Рис.2. 3D-зависимость параметров a, b, c для катастрофы ЛХ согласно каноническому уравнению (2).

Из анализа экспериментальных данных следует, что для значений a, b, c на частоте 0.8 кГц точка поверхности многообразия катастроф находится на кривой самопересечения “хвоста” и “крыльев”, т.е. в области вырождения бифуркации, а для остальных частот точки находятся в области “хвоста” в квадранте $a < 0, b > 0, c < 0$, т.е. в области развитой бифуркации, где наблюдаются скачки управляющих параметров и параметров плазмы.

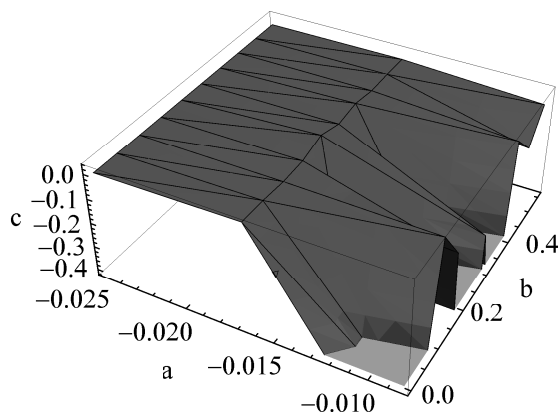


Рис.3. Поверхность многообразия катастроф для параметров a, b, c , полученных из эксперимента.

На рис.3 представлена поверхность многообразия катастроф для параметров a, b, c , полученных из эксперимента.

Таким образом, показан способ применения математического аппарата

теории катастроф для обработки экспериментальных результатов при измерениях в акустоплазме, позволяющий получить количественные результаты.

Для акустоплазмы CO₂-лазера зависимость напряжения на разряде от текущего значения тока разряда в течение периода модуляции описывается катастрофой типа Ласточкин Хвост. Для проведенного эксперимента в акустоплазме области изменения управляющих параметров соотносятся как $a:b:c = (-0.002; -0.023):(0.01; 0.57):(-3.55; +0.57)$.

Авторы выражают глубокую благодарность академику НАН Армении А.Р. Мкртчяну за постановку задачи и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **G.Knorr.** Plasma Phys. and Controlled Fusion, **26**, 949 (1984).
2. **J.Yong, W.Haida, Yu Changxuan.** Chin. Phys. Lett., **5**, 201 (1988).
3. **А.Р.Мкртчян, А.С.Абрамян, Р.Б.Костянян, К.П.Ароян, К.С.Мкртчян.** Изв. НАН Армении, Физика, **40**, 209 (2005).
4. **Р.Гилмор.** Прикладная теория катастроф, т.1, М., Мир, 1984.
5. **Т.Постон, И.Стюарт.** Теория катастроф и ее приложения. М., Мир, 1980.
6. **U.Ingard.** Phys.Rev., **145**, 41 (1966).
7. **А.Р.Мкртчян, А.С.Абрамян, К.П.Ароян, Т.Ж.Бежанян, К.С.Мкртчян, Р.Б.Костянян.** Материалы Всеросс. Конф. по физике низкотемпературной плазмы, ФНТП-2004, Петрозаводск, **1**, 127 (2004).
8. **Е.С.Вентцель.** Теория вероятности. М., Наука, 1969.
9. **Л.А.Бессонов.** Теоретические основы электротехники. М., Высшая школа, 1967.

ՑԱՕՐԱԶԵՐՄԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՊԼԱԶՄԱՅՈՒՄ ՍՏԱՅՎԱԾ ՓՈՐՁՆԱԿԱՆ ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐԻ ՄՇԱԿՈՒՄԸ ԱՂԵՏՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ

Ա.Ս. ԱԲՐԱՄՅԱՆ, Ա.Ս. ՄԻԿԱՅԵԼՅԱՆ, Ք.Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, Բ.Վ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

CO₂ լազերի ակուստապլազմայում պարպման հոսանքի մոդուլման հաճախության տարբեր արժեքների համար ստացված են դինամիկ վոլտ-ամպերային բնութագրերի ընտանիքներ, որոնք նկարագրված են աղետների տեսության օգնությամբ: Առաջարկված է փորձ-նական արդյունքների մշակման մեթոդ, որը թույլ է տալիս ստանալ ղեկավարող պարամետրերի ոչ միայն որակական, այլ նաև քանակական բնութագրերը: Փորձի հետ լավագույն համ-ընկում ստացված է “ծիծեռնակի պոչ” տիպի աղետով: Ստացված են ղեկավարող պարա-մետրերի փոփոխման տիրույթները:

USING OF CATASTROPHE THEORY FOR PROCESSING OF EXPERIMENTAL RESULTS MEASURED IN LOW-TEMPERATURE PLASMA

A.S. ABRAHAMYAN, A.S. MIKAYELYAN, Q.G. SAHAKYAN, B.V. KHACHATRYAN

For acoustoplasma of CO₂ laser the obtained family of dynamic volt-ampere characteristics for different modulation frequencies of the discharge current is described by catastrophe theory. We propose a method of processing the experimental results, which allows obtaining not only qualitative but also quantitative characteristics of the control parameters. The best agreement with experimental data is obtained for "dovetail catastrophe". The areas of changing of control parameters are determined.