Известия НАН Армении, Физика, т.46, №4, с.256-261 (2011)

УДК 539.2

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА В АКУСТОПЛАЗМЕ

А.Г. МКРТЧЯН, С.А. ЧИЛИНГАРЯН

Институт прикладных проблем физики НАН Армении, Ереван

(Поступила в редакцию 24 февраля 2011 г.)

На основе экспериментально полученной формы распределения оптического излучения вдоль газоразрядной трубки сделана попытка с помощью решения обратной задачи определить рабочие и независимые параметры акустических колебаний и акустоплазмы.

В работе [1] описана схема эксперимента по измерению оптического спектра в видимом и ближнем ИК диапазонах (0.35–1.7 мкм) излучения газоразрядной плазмы CO_2-лазера в акустоплазменном состоянии. Оптический спектр был получен при помощи компьютерного спектрографа с оптиковолоконным входом OCEANIC OPTICS PC2000. Питание разрядной трубки осуществлялось модулированным синусоидальным и постоянным током. В этом случае в разрядной трубке возникают акустические колебания с частотой, равной частоте модуляции [2]. В результате взаимодействия акустических колебаний с плазмой в разрядной трубке плазма переходит в новое – акустоплазменное состояние. В этом состоянии многие параметры плазмы по величине и характеру изменения отличаются от параметров невозмущенной плазмы [3].

Настоящая работа посвящена возможности определения рабочих и независимых параметров акустоплазмы с помощью теоретического анализа.

Изменение интенсивности оптического спектра излучения в зависимости от разрядного тока и напряжения при наличии низкочастотных акустических колебаний в газоразрядной трубке с плазмой позволяет решить обратную задачу [4] – определить параметры среды и акустических колебаний, как пороговые значения начала нелинейных процессов.

Метод определения зависимости амплитуды и частоты акустических колебаний от разрядного тока и напряжения на газоразрядной трубке заключается в согласовании экспериментальных точек $y_k = y_k(d_k)$ с некоторой аналитической функцией $\tilde{y} = \tilde{y}(d_k;\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_n)$, в которую вышеуказанные величины входят как параметры.

Возможность аппроксимации точек y_k гладкой функцией обусловлена тем, что до начала проявления нелинейных процессов, приводящих к фазовому переходу и после завершения фазового перехода форма линии оптического излучения является лоренцевской. Поэтому измерение интенсивности линии од-

нозначно определяет форму спектральной линии.

Задача определения акустических величин сводится к подбору параметров α_i этой аналитической функции (назовем ее согласующей) таким образом, чтобы достичь наилучшего совпадения экспериментальных точек с согласующей функцией, то есть к минимизации следующего неотрицательного функционала [5]:

$$\Phi = \sum_k \left[y_k - \tilde{y}\ (d_k; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \right]^2. \qquad (1)$$

Из условия минимума функционала $(\delta\Phi = 0)$ для параметров α_i получается следующая система уравнений:

$$\sum_k \left[y_k - \tilde{y}\left(d_k; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right) \right] \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \alpha_i} = 0, \qquad (2)$$

где $i = 1, 2, 3, ..., n.$

Для решения уравнения (2), т.е. для определения параметров акустических колебаний в каждом конкретном случае выбирается аппроксимирующая функция. Для наших экспериментальных данных аппроксимирующая функция имеет вид

$$\tilde{y} = J_0^2[(kA)], \qquad (3)$$

где J_0 – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, A – амплитуда акустических колебаний, k – модуль волнового вектора оптического излучения.

Действительно, с классической точки зрения тепловые колебания излучающего электрона атома, благодаря эффекту Доплера, приводят к частотной модуляции спектра оптического излучения. Очевидно, что при этом в спектре излучения, кроме центральной несмещенной компоненты с лоренцевской формой линии и энергией, равной энергии перехода $E_0 = \hbar\omega_0$, возникает большое число боковых линий. Движение атома электрона из-за эффекта Доплера приводит к изменению частоты излучения:

$$\omega(t) = \omega_0 \left(1 + V_x(t)/c\right), \qquad (4)$$

где $V_x(t)$ – проекция скорости атома электрона на направление наблюдения в момент времени t, c – скорость света.

Напряженность электрического поля излучения имеет вид

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \exp\left[i\Phi(t)\right], \qquad (5)$$

где фаза волны с учетом линейного эффекта Доплера в лабораторной системе координат равна

$$\Phi(t) = \int_0^t \omega(\tau)\, d\tau = \int_0^t \omega\left(1 + \frac{V_x(\tau)}{c}\right) d\tau. \qquad (6)$$

Подставляя выражение (6) в формулу (5) после интегрирования получим

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \exp\left[i\omega_0 t\right] \exp\left(ix(t)/\lambda\!\!\!^{-}\right), \tag{7}$$

где ω_0 – частота оптического излучения, $\lambda\!\!\!^{-} = c\omega_0$ – его приведенная длина волны, $x(t)$ – смещение атома электрона от положения равновесия в направлении наблюдения.

Разлагая $x(t)$ в ряд по собственным частотам, для напряженности электрического поля волны имеем

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega_0 t) \exp\left(\frac{i}{\lambda\!\!\!^{-}} \sum_{n=0}^{3N} x_n \sin \Omega_n t\right), \tag{8}$$

где N – число электронов, участвующих в излучении в рабочем объеме газоразрядной трубки, Ω_n – частота n-ой моды. Для учета влияния акустических колебаний к сумме в экспоненте в (8) необходимо добавить еще один член

$$X(t) = A \sin \Omega t, \tag{9}$$

где A и Ω – амплитуда и частота акустической волны. Рассмотрим случай, когда $A >> x_n$ и $\Omega << \omega_0$.

Подставляя (9) в (8) и пользуясь известным соотношением

$$\exp(iz \sin \theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(z) \exp(ik\theta), \tag{10}$$

где J_k – функция Бесселя первого рода k-го порядка, получим

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega_0 t) \left\{ \prod_n \sum_k J_k\left(\frac{x_n}{\lambda\!\!\!^{-}}\right) \exp(ik\Omega_n t) \right\} \sum_l J_l\left(\frac{A}{\lambda\!\!\!^{-}}\right) \exp(il\Omega t). \tag{11}$$

Общий член (11) соответствует излучению частоты $\omega_0 + \sum_n k_n \Omega_n$. Несмещенную частоту (без акустического возмущения) дает член $\exp(i\omega_0 t) \prod_n J_0\left(x_n/\lambda\!\!\!^{-}\right)$, а также члены, для которых $\sum_n k_n \Omega_n = 0$. Таким образом, для несмещенной линии напряженность поля излучения равна

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega_0 t) \left\{ \prod_n J_0\left(\frac{x_n}{\lambda\!\!\!^{-}}\right) \right\} \sum_l J_l\left(\frac{A}{\lambda\!\!\!^{-}}\right) \exp(il\Omega t). \tag{12}$$

Из последнего выражения следует, что под влиянием акустических колебаний интенсивность несмещенной линии уменьшается, и появляются дополнительные боковые линии, отстоящие от несмещенной линии на величину $l\Omega$, где $l = 0, 1, 2, \ldots$. Будем рассматривать только несмещенную линию, т.е. $l = 0$. Тогда для интенсивности оптического излучения получим

$$I = |\mathbf{E}|^2 = |\mathbf{E}_0|^2 \left\{ \prod_n J_0\left(\frac{x_n}{\lambda\!\!\!^{-}}\right) \right\}^2 J_0^2\left(\frac{A}{\lambda\!\!\!^{-}}\right) = I_0 J_0^2\left(\frac{A}{\lambda\!\!\!^{-}}\right) = I_0 J_0^2(kA), \tag{13}$$

где I_0 – интенсивность оптического излучения без акустического возмущения $(A=0)$.

В эксперименте измерялась относительная интенсивность оптического перехода с акустикой (I) и без акустики (I_0), т.е.

$$I_{\text{rel}} = I/I_0 = J_0^2(kA). \tag{14}$$

Выберем аппроксимирующую функции в виде

$$\tilde{y} = J_0{}^2[kA(d_k;\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n)], \tag{15}$$

где k – волновой вектор оптического излучения, $A(d_k;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ – амплитуда акустических колебаний, d_k – независимый параметр эксперимента, α_i – зависимые параметры акустоплазмы (амплитуда и частота звуковых колебаний, затухание звуковых мод, L/λ_{ac} , где L – длина газоразрядной трубки, λ_{ac} – длина акустической волны в газоразрядной трубке). Явный вид функции, лежащей в аргументе функции Бесселя, определяется из решения волнового уравнения для акустического поля в газоразрядной трубке. Ниже частоты первого радиального резонанса в газоразрядной трубке могут распространяться только плоские волны. При этом волновое уравнение, описывающее звуковое поле вдоль оси трубки, можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{16}$$

где x – координата вдоль оси трубки, u – смещение частиц от положения равновесия, V – скорость звука в среде. Общее решение уравнения (16), при граничных условиях

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0\,,\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0 \tag{17}$$

на концах трубки, имеет вид

$$u = u_0 \cos\left(n\pi/L\right) x \cos\omega t, \tag{18}$$

где L – длина разрядной трубки, $n = 0,1,2,\ldots$. Уравнение (18) описывает стоячую волну по длине газоразрядной трубки. Учет вязкости и теплопроводности среды приводит к затуханию звука. В этом случае закон распространения звуковых колебаний в трубке имеет вид

$$u = u_0 e^{-\beta x} \cos\frac{n\pi}{L} x \cos\omega t, \tag{19}$$

где β – коэффициент затухания звука.

Таким образом в качестве аппроксимирующей функции можно выбрать функцию вида

$$\tilde{y} = J_0^2[\alpha_1 e^{-\alpha_2 d_k} \cos(\alpha_3 d_k)], \tag{20}$$

где $\alpha_1 = u_0/\lambda$ (u_0 – амплитуда акустических колебаний без учета затухания), $\alpha_2 = \beta$ – коэффициент затухания звука, $\alpha_3 = 2\pi/\lambda_{ac}$ – волновое число звуковой волны d_k – расстояние от конца трубки до текущего положения световода (относительно трубки) при k-ом измерении.

Подставив функцию (20) в систему уравнений (2), для параметров α_i получаем систему нелинейных алгебрических уравнений:

$$\begin{aligned}
&f_1 = \sum_k [y_k - J_0^2(\alpha_1 e^{-\alpha_2 d_k}\cos\alpha_3 d_k)]\, J_0(\alpha_1 e^{-\alpha_2 d_k}\cos\alpha_3 d_k)\times \\
&\times J_1(\alpha_1 e^{-\alpha_2 d_k}\cos\alpha_3 d_k) e^{-\alpha_2 d_k}\cos\alpha_3 d_k = 0, \\
&f_2 = \sum_k [y_k - J_0^2(\alpha_1 e^{-\alpha_2 d_k}\cos\alpha_3 d_k)]\, J_0(\alpha_1 e^{-\alpha_2 d_k}\cos\alpha_3 d_k)\times \\
&\times J_1(\alpha_1 e^{-\alpha_2 d_k}\cos\alpha_3 d_k) d_k e^{-\alpha_2 d_k}\cos\alpha_3 d_k = 0, \\
&f_3 = \sum_k [y_k - J_0^2(\alpha_1 e^{-\alpha_2 d_k}\cos\alpha_3 d_k)]\, J_0(\alpha_1 e^{-\alpha_2 d_k}\cos\alpha_3 d_k)\times \\
&\times J_1(\alpha_1 e^{-\alpha_2 d_k}\cos\alpha_3 d_k) d_k e^{-\alpha_2 d_k}\sin\alpha_3 d_k = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Систему уравнений (21) можно решить, используя приближенный метод Ньютона–Рапсона [6], суть которого заключается в линеаризации системы:

$$f_i = f_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = f_i(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0) - \Phi_{ij}(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0),\ i, j = 1, 2, 3. \tag{22}$$

Здесь α_1^0, α_2^0, α_3^0 – исходные значения параметров α_1, α_2, α_3, а $\Phi_{ij} = (\partial f_i/\partial \alpha_j)_{\alpha^o}$ – матрица Якоби. Решения этой системы уравнений являются первым приближением параметров α_1, α_2, и α_3:

$$\alpha_i^1 = \alpha_i^0 - \Phi_{ij}^{-1}(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0)\, f_j(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0),\ i, j = 1, 2, 3, \tag{23}$$

где Φ_{ij}^{-1} – обратная матрица Якоби.

Подставляя найденные таким образом решения α_i^1 в систему уравнений (21), находим второе приближение и т.д. Окончательно, для n-го приближения α_i^n имеем

$$\alpha_i^n = \alpha_i^{n-1} - \Phi_{ij}^{-1}(\alpha^{n-1})\, f_j(\alpha^{n-1}). \tag{24}$$

Максимальное число приближений n определяется требуемой точностью вычисления. Точность вычислений определяется ошибкой, допускаемой в измерениях этих параметров. В качестве исходных значений α_1^0, α_2^0, и α_3^0 можно взять те значения, которые соответствуют состоянию данной газовой смеси без возбуждения разряда. Таким образом, решая систему уравнений (21) и используя рекуррентные соотношения (24), можно получить значения параметров α_i в акустоплазме.

Таким образом, с помощью исследования экспериментально полученной формы распределения оптического излучения вдоль газоразрядной трубки при частоте возбуждения акустоплазменного состояния, решением обратной задачи становится возможным определить рабочие и независимые параметры акусти-

ческих колебаний и акустоплазмы. Детальный анализ обработки результатов эксперимента будет приведен в следующей статье.

Авторы выражают глубокую благодарность академику А.Р. Мкртчяну за постановку задачи и помощь при ее решении.

ЛИТЕРАТУРА

1. **А.С.Абраамян, С.А.Чилингарян, К.В.Акопян.** Оптическое излучение в видимом диапазоне акустоплазмы CO_2:N_2:He. Международная конференция по физике плазмы, 13-17 февраля 2011, Уаргла, Алжир.
2. **Г.А.Галечян, А.Р.Мкртчян.** Акустоплазма. Ереван, Апага, 2005.
3. **А.Р.Мкртчян, А.С.Абраамян, К.П.Ароян, Т.Ж.Бежанян, К.С.Мкртчян, Р.Б.Костанян**. Материалы Всероссийской конференции по физике низкотемпературной плазмы ФНТП-2004. Петрозаводск, т.1, 2004, с.127.
4. **А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин**. Методы решения некорректных задач. М., Наука, 1979.
5. **Е.С. Вентцель**. Теория вероятности. М., Наука, 1969.
6. **Р.Бельман**. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М., Мир, 1968.

ՀԱԿԱԴԱՐՁ ԽՆԴԻՐ ԱԿՈՒՍՏԱՊԼԱԶՄԱՅՈՒՄ

Ա.Հ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, Ս.Ա. ՉԻԼԻՆԳԱՐՅԱՆ

Ուսումնասիրված է գազապարպումային խողովակի երկայնքով փորձնական ճանապարհով ստացված օպտիկական տիրույթում ճառագայթման ինտենսիվության բաշխումը: Փորձ է արված հակադարձ խնդրի լուծման օգնությամբ որոշել ակուստապլազմայի և ակուս-տիկ տատանումների աշխատանքային և անկախ պարամետրերը:

INVERSE PROBLEM IN ACOUSTOPLASMA

A.G. MKRTCHYAN, S.A. CHILINGARYAN

Using the experimentally obtained shape of distribution of the optical emission along the discharge tube an attempt is made to determine working and independent parameters of the acoustic oscillations and acoustoplasma by means of solving the inverse problem.