

УДК 539.2

АМПЛИТУДЫ МНОГОКАНАЛЬНОГО РАССЕЙНИЯ НА ДВУМЕРНОМ БАРЬЕРЕ С ПОСТОЯННОЙ ВЫСОТОЙ

Д.М. СЕДРАКЯН¹, Л.Р. СЕДРАКЯН², А.В. МАРГАРЯН¹

¹Ереванский государственный университет, Армения

²Российско-Армянский (Славянский) государственный университет, Ереван

(Поступила в редакцию 13 ноября 2010 г.)

Метод погружения применен для решения задачи N -канального рассеяния, в случае конкретных потенциалов. В частности, рассмотрено рассеяние частицы на двумерном барьере, который постоянен в направлении рассеяния и произволен в поперечном направлении. Для этого случая определены амплитуды рассеяния частицы t_m и r_m ($m=1,2,\dots,N$). С помощью полученных формул сделан переход к случаю δ -образного потенциала. Для этого случая получены выражения для амплитуд прохождения t_m и отражения r_m . Показано также, что произведение амплитуд прохождения и отражения по каналу m , $t_m r_m$, не зависит от канала рассеяния.

1. Введение

В последнее время в связи с возрастающими возможностями нанотехнологии по созданию низкоразмерных структур стало возможным создание структур с произвольными наперед заданными структурными особенностями. Интенсивное исследование физических свойств одномерных и квазиодномерных низкоразмерных структур началось примерно с середины 70-ых годов, когда стало возможным осуществление так называемых сверхрешеток – периодических систем, образованных чередованием двух или нескольких структурных элементов. В настоящее время данные системы могут считаться наиболее изученными. Современные технологические возможности позволяют получить системы, обладающие более сложной структурой. Это так называемые низкоразмерные аперiodические образования, для которых периодичность расположения структурных элементов, приготовленных из одного материала, нарушена. В настоящее время идет интенсивное исследование физических свойств низкоразмерных систем со сложной структурой. Теоретическое исследование низкоразмерных структур и волн, распространяющихся в них, является сложной математической задачей. К настоящему времени развит целый ряд точных и приближенных методов для описания волн в одномерных и квазиодномерных средах. Перечислим наиболее известные из них: теория возмущений, метод трансфер-матриц, метод погружения, метод фазовых функций и метод функций Грина [1].

Можно утверждать, что до сих пор общих и точных теоретических подходов для рассмотрения задач данного класса в двух и трехмерных постановках еще не существует. Даже в рамках приближенных методов получение окончательного результата требует выполнения большого количества численных вычислений. Для подобных задач в работе [2] был разработан новый метод, который фактически является обобщением метода погружения.

В настоящей работе с помощью этого метода исследуется задача многоканального рассеяния квантовой частицы на произвольном двумерном потенциале. Она отличается от одномерной задачи тем, что в этом случае рассеяние частицы может сопровождаться изменением энергетического уровня поперечного движения. Эти уровни дискретны, так как движение частицы в этом направлении ограничено. В действительности число уровней бесконечно, но в зависимости от начальной энергии частицы энергетические уровни выше некоторого уровня не возбуждаются. Здесь мы предполагаем, что возбуждаются N наинизших энергетических состояний. Мы рассматриваем задачу рассеяния частицы на барьере, высота которого постоянна в направлении рассеяния и произвольна в перпендикулярном направлении. Результатом исследования будет получение амплитуд прохождения t_1, t_2, \dots, t_N и отражения r_1, r_2, \dots, r_N .

Рассмотрим, в частности, многоканальное рассеяние электрона на потенциале $V(x, y) = V(x)V(y)$, где

$$V(x) = \begin{cases} K, & a \leq x \leq b, \\ 0, & a \geq x \geq b. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь K – постоянная, а $V(y)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условиям $V(0) = V(c) = \infty$.

Согласно работам [2-6], для получения амплитуд многоканального рассеяния надо решить следующую систему линейных дифференциальных уравнений относительно функций $L_1(x), L_2(x), \dots, L_N(x)$:

$$\frac{d^2 L_m(x)}{dx^2} + q_m^2 L_m(x) - \sum_{i \neq m}^N V_{mi} L_i(x) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

где

$$q_m^2 = k_m^2 - V_{mm}, \quad k_m^2 = \chi^2 - \chi_m^2, \quad \chi_m = \frac{\pi}{a} m, \quad (3)$$

$$V_{mn}(x) = K \int_0^a \Phi_m^*(y) V(y) \Phi_n(y) dy.$$

Здесь функции $\Phi_n(y)$ определяются как $\Phi_n = \sqrt{2/a} [\sin((\pi/a)ny)]$, где $n = 1, 2, \dots, N$, а потенциалы $V_{mn}(x)$ отличны от нуля в промежутке $a \leq x \leq b$ и равны нулю, когда $x \leq a$ и $x \geq b$.

Система уравнений (2) интегрируется до точки $x = b$ со следующими граничными условиями в точке $x = a$ [7]:

$$L_1(a) = -e^{-ik_1 a}, \quad \left. \frac{dL_1}{dx} \right|_{x=a} = ik_1 e^{-ik_1 a},$$

$$L_m(a) = \left. \frac{dL_m}{dx} \right|_{x=a} = 0, \quad m = 2, 3, \dots, N. \quad (4)$$

Обозначим значения функций $L_1(x), L_2(x), \dots, L_N(x)$ в точке $x=b$ через L_1, L_2, \dots, L_N . Амплитуды рассеяния определяются величинами D_1, D_2, \dots, D_N и $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \dots, \tilde{D}_N$, которые связаны с L_1, L_2, \dots, L_N следующими соотношениями [6]:

$$\tilde{D}_m(b) = \frac{1}{2}(M_m + L_m)e^{-ik_m b}, \quad m = 1, 2, \dots, N,$$

$$D_m(b) = \frac{1}{2}(M_m - L_m)e^{ik_m b}, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

где

$$M_m = \frac{1}{ik_m} \left. \frac{dL_m}{dx} \right|_{x=b}. \quad (6)$$

Согласно работам [6,7], амплитуды рассеяния t_m и r_m определяются следующими формулами:

$$t_1 = \frac{D_1^*}{|D|^2}, \quad r_1 = \frac{(\tilde{D}_1 D_1)^*}{|D_1||D|},$$

$$t_m = \frac{D_m^*}{|D|^2}, \quad r_m = \frac{\tilde{D}_m^*}{|D|}, \quad m = 2, 3, \dots, N, \quad (7)$$

где

$$|D|^2 = |D_1|^2 + \sum_{m=2}^N \frac{k_m}{k_1} |D_m|^2. \quad (8)$$

Таким образом, интегрируя систему уравнений (2) и определяя значения функций $L_1(x), L_2(x), \dots, L_N(x)$ в точке $x=b$, можно определить амплитуды рассеяния t_m и r_m .

2. Решение системы уравнений для функций $L_m(x)$

Решение системы уравнений (2) будем искать в следующем виде:

$$L_m(x) = \sum_k A_{mk} e^{i\chi_k(x-a)}, \quad (9)$$

где величины χ_i – еще не определенные постоянные, а величины A_{mi} определяются из алгебраических уравнений, которые получаются подстановкой решения (9) в систему уравнений (2):

Величины F_i^+ и F_i^- связаны очевидным соотношением

$$F_i^+ = A_{li} + B_{li} = -(Q_i/k_1)(A_{li} - B_{li}) = F_i^-, \quad (18)$$

т.е. достаточно найти, например, F_i^+ из системы уравнений (15). Детерминант этой системы совпадает с детерминантом матрицы c_{mi} , так как согласно (12) $c_{li} = 1$ для всех i . Решая систему (15) и подставляя

$$A_{li} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k_1}{Q_i} \right) F_i^+, \quad B_{li} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k_1}{Q_i} \right) F_i^+ \quad (19)$$

в (13), для функций $L_m(x)$ и $M_m(x)$ получим

$$L_m(x) = \sum_{i=1}^N c_{mi} F_i^+ \left(\cos Q_i(x-a) - i \frac{k_1}{Q_i} \sin Q_i(x-a) \right), \quad (20)$$

$$M_m(x) = -\frac{k_1}{k_m} \left(\sum_{i=1}^N c_{mi} F_i^+ \left(\cos Q_i(x-a) - i \frac{Q_i}{k_1} \sin Q_i(x-a) \right) \right). \quad (21)$$

Искомые величины D_m и \tilde{D}_m ($m=1,2,\dots,N$) определяются подстановкой (20) и (21) в формулы (5).

3. Определение величин $D_m(b)$ и $\tilde{D}_m(b)$

Подставляя в (5) функции $L_m(x)$ и $M_m(x)$ в точке $x=b$, получим

$$\begin{aligned} \tilde{D}_m(b) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N c_{mi} \Phi_i^+ \left(\left(1 - \frac{k_1}{k_m} \right) \cos Q_i d + i \left(\frac{Q_i}{k_m} - \frac{k_1}{Q_i} \right) \sin Q_i d \right) e^{i(k_1 - k_m) \frac{d}{2}} e^{-i(k_1 + k_m)x_N}, \\ D_m(b) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N c_{mi} \Phi_i^+ \left(-\left(1 + \frac{k_1}{k_m} \right) \cos Q_i d + i \left(\frac{Q_i}{k_m} + \frac{k_1}{Q_i} \right) \sin Q_i d \right) e^{i(k_1 + k_m) \frac{d}{2}} e^{-i(k_1 - k_m)x_N}, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\Phi_i^+ = F_i^+ e^{-ik_1 a}, \quad (23)$$

x_N – координата центра, a – ширина барьера.

Найдем амплитуды рассеяния для Π -образного потенциала:

$$V(x, y) = P \delta(x - x_0) \delta(y - y_0). \quad (24)$$

Величины D_m и \tilde{D}_m для этой задачи можно определить из формул (22), если входящие в них потенциалы V_{ik} выбрать так, чтобы они были конечными при $d \rightarrow 0$. Другие величины, пропорциональные d , естественно, будут стремиться к нулю. Для этого необходимо в формулах (3) $V(y)$ заменить на $\delta(y - y_0)$ и потребовать, чтобы

$$\lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ K \rightarrow \infty}} dK = P. \quad (25)$$

При этом выражение dV_{ik} заменяется на конечную величину v_{ik} , равную

$$v_{ik} = P\Phi_i(y_0)\Phi_k(y_0). \quad (26)$$

Необходимо также принять $\cos Q_i d \approx 1$, $\sin Q_i d \approx Q_i d$ и заменить $Q_i^2 d$ на x_i^2 . Учитывая соотношения

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i^+ = -1, \quad \sum_{i=1}^N c_{mi} \Phi_i^+ = 0, \quad m \neq 1, \quad (27)$$

вытекающие из (15) и (23), для D_1 , \tilde{D}_1 , D_m и \tilde{D}_m получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} D_1 &= 1 + iu_{11}/2k_1, & \tilde{D}_1 &= (iu_{11}/2k_1)e^{-2ik_1 x_N}, \\ D_m &= (iu_{1m}/2k_m)e^{-i(k_1 - k_m)x_N}, & \tilde{D}_m &= (iu_{1m}/2k_m)e^{-i(k_1 + k_m)x_N}. \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$u_{1m} = \sum_{i=1}^N c_{mi} \Phi_i^+ x_i^2. \quad (29)$$

Определяя Φ_i^+ из уравнений (27) и подставляя в формулу (29), для величины u_{1m} получим:

$$u_{1m} = - \frac{\begin{vmatrix} c_{m1}x_1^2 & c_{m2}x_2^2 & \cdots & c_{mN}x_N^2 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{NN} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{NN} \end{vmatrix}}, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (30)$$

Возьмем m -ое уравнение из системы уравнений (10), умножим на малое d и, меняя индекс i от единицы до N , составим новую систему уравнений для определения v_{1m} ($m = 1, 2, \dots, N$). Чтобы получить эту систему уравнений, нужно устремить d к нулю и K – к бесконечности так, чтобы выражение dK заменить на P и, следовательно, dV_{ik} на v_{ik} . Решая полученную систему уравнений относительно v_{1m} , можно убедиться, что $u_{1m} = v_{1m}$ для $m = 1, 2, \dots, N$. Итак, формулы (28) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} D_1 &= 1 + iv_{11}/2k_1, & \tilde{D}_1 &= (iv_{11}/2k_1)e^{-2ik_1 x_N}, \\ D_m &= (iv_{1m}/2k_m)e^{-i(k_1 - k_m)x_N}, & \tilde{D}_m &= (iv_{1m}/2k_m)e^{-i(k_1 + k_m)x_N}, \quad m = 2, 3, \dots, N. \end{aligned} \quad (31)$$

Подставляя (31) в формулы (7), определим амплитуды рассеяния для задачи с потенциалом (24).

4. Обсуждение результатов

Используя выражения (22) для функций D_m и \tilde{D}_m , из формул (7) можно получить амплитуды рассеяния и коэффициенты прохождения и отражения для многоканального рассеяния как для потенциала (1), так и для потенциала (24). Полученные выражения амплитуд рассеяния для потенциала (1) слишком громоздки, поэтому здесь мы приведем их выражения только для потенциала (24). Подставляя выражения D_m и \tilde{D}_m из формул (31) в формулу (7), для амплитуд рассеяния получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \frac{\left(1 - \frac{i v_{11}}{2k_1}\right)}{\left[\Gamma + \sum_{m=2}^N \frac{v_{1m}^2}{4k_1 k_m}\right]}, & r_1 &= \frac{-i \frac{v_{11}}{2k_1} \left(1 - \frac{i v_{11}}{2k_1}\right) e^{2ik_1 x_N}}{\left(1 + \frac{v_{11}^2}{4k_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\Gamma + \sum_{m=2}^N \frac{v_{1m}^2}{4k_1 k_m}\right]^{\frac{1}{2}}}, \\
 t_m &= -\frac{i \frac{v_{1m}}{2k_m} e^{i(k_1 - k_m)x_N}}{\left[\Gamma + \sum_{m=2}^N \frac{v_{1m}^2}{4k_1 k_m}\right]}, & r_m &= -\frac{i \frac{v_{1m}}{2k_m} e^{i(k_1 + k_m)x_N}}{\left[\Gamma + \sum_{m=2}^N \frac{v_{1m}^2}{4k_1 k_m}\right]^{\frac{1}{2}}}, \quad m = 2, 3, \dots, N,
 \end{aligned} \tag{32}$$

где

$$\Gamma = \left(1 + \frac{v_{11}^2}{4k_1^2}\right).$$

Используя формулы (32), легко проверить равенство

$$|t_1|^2 + |r_1|^2 + \sum_{m=2}^N \frac{k_m}{k_1} (|t_m|^2 + |r_m|^2) = 1, \tag{33}$$

т.е. условие непрерывности потока частиц.

Как видно из решений (32), амплитуды рассеяния зависят только от потенциалов v_{11} , v_{1m} и не зависят от v_{mm} . Причина такого поведения амплитуд рассеяния обусловлена тем, что потенциал рассеяния (24) локализован в точке $x = x_0$, $y = y_0$. Падающий поток имеет импульс k_1 , и, следовательно, рассеяние по первому каналу должно описываться потенциалом v_{11} . Рассеяние же по каналу m есть переход частицы в точке x_0 , y_0 в состояние с продольным импульсом k_m и ее распространение по двум противоположным направлениям x . Поэтому амплитуды рассеяния должны быть пропорциональны только v_{1m} . Если же потенциал имеет конечную ширину d , как в случае (1), то в выражения для амплитуд рассеяния войдут потенциалы v_{mm} .

Отметим также еще одно важное свойство N -канального рассеяния. Из формул (7), (22) и (31) вытекает, что амплитуда прохождения t_1 не зависит от координаты середины потенциала x_0 , тогда как амплитуда отражения r_1 имеет фазовый множитель $\exp(2ik_1 x_0)$. Что касается рассеяния по каналу m , то

амплитуды прохождения и отражения t_m и r_m имеют фазовые множители $\exp(i(k_1 - k_m)x_0)$ и $\exp(i(k_1 + k_m)x_0)$, соответственно. Отсюда следует, что фазовый множитель произведения $r_m t_m$ равняется $\exp(2ik_1 x_0)$, т.е. не зависит от канала рассеяния. Это свойство N -канального рассеяния будет использовано при решении задачи локализации электрона на квазипериодической системе потенциалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Д.М.Седракийн, А.Ж.Хачатрян, Э.М.Казарян, Л.Р.Седракийн.** Изв. НАН Армении, Физика, **44**, 167 (2009).
2. **Д.М.Седракийн, Э.М.Казарян, Л.Р.Седракийн.** Изв. НАН Армении, Физика, **44**, 395 (2009).
3. **D.Boese, M.Lischka, L.E.Reichl.** Phys. Rev. B, **62**, 16933 (2000).
4. **S.Souma, A.Suzuki.** Phys. Rev. B, **65**, 115307 (2002).
5. **D.M.Sedrakian, E.M.Kazaryan, L.R.Sedrakian.** Proc. of the seventh international conference Semiconductor micro- and nanoelectronics. Tsakhcadzor, Armenia, 2009, p.11.
6. **Л.Р.Седракийн.** Доклады НАН Армении, **109**, 214 (2009).
7. **Д.М.Седракийн, Э.М.Казарян, Л.Р.Седракийн.** Изв. НАН Армении, Физика, **45**, 173 (2010).

ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԲԱՐՁՐՈՒԹՅԱՄԲ ԵՐԿՉԱՓ ՊՈՏԵՆՑԻԱԼԱՅԻՆ
ԱՐԳԵԼՔԻ ՎՐԱ ԲԱԶՄՈՒՂԻ ՑՐՄԱՆ ԱՍՊԼԻՏՈՒԴՆԵՐԸ

Դ.Մ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ, Լ.Ր. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ, Ա.Վ. ՄԱՐԳԱՐՅԱՆ

Բազմուղի ցրման խնդրի լուծման համար կիրառված է ընկղման մեթոդը կոնկրետ պոտենցիալի դեպքում: Մասնավորապես դիտարկված է մասնիկի ցրումը երկչափ արգելքի վրա, որը հաստատուն է ցրման ուղղությամբ և կամայական լայնական ուղղությամբ: Այս դեպքի համար որոշված են ցրման t_m և r_m ($m=1,2,\dots,N$) ամպլիտուդները: Ստացված բանաձևերից անցում է կատարվել δ -պոտենցիալի դեպքին: Այդ դեպքի համար ստացված են արտահայտություններ անցման t_m և անդրադարձման r_m ամպլիտուդների համար: Ցույց է տրված, որ անցման և անդրադարձման ամպլիտուդների արտադրյալը ըստ m -երորդ ուղու կախված չէ ցրման ուղղուց:

AMPLITUDES OF MULTICHANNEL SCATTERING ON A TWO-DIMENSIONAL POTENTIAL BARRIER WITH CONSTANT HEIGHT

D.M. SEDRAKIAN, L.R. SEDRAKIAN, A.V. MARGARYAN

The immersing method is applied to solve the N -channel scattering problem for concrete potential. In particular, we consider the particle scattering on a two-dimensional potential barrier, which is constant in the scattering direction and arbitrary in the cross-section direction. For this case the scattering amplitudes t_m and r_m ($m=1,2,\dots,N$) are determined. A transition from the obtained formulas to the case of δ -potential is performed. For this case transmission amplitudes t_m and reflection amplitudes r_m are obtained. It is also shown that the product of transmission and reflection amplitudes along the channel m does not depend on the scattering channel.