Известия НАН Армении, Физика, т.46, №2, с.109-114 (2011)

УДК 534.222

УЛЬТРАЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ В КРИСТАЛЛАХ С ЗАРЯЖЕННЫМИ ДИСЛОКАЦИЯМИ

А.В. ШЕКОЯН

Институт механики НАН Армении, Ереван

(Поступила в редакцию 2 июля 2010 г.)

С помощью вариационного принципа получена система уравнений для заряженных дислокаций, где учитываются квадратичные нелинейные члены. Система описывает распространение ультразвуковых (УЗ) волн в кристалле с заряженными дислокациями. Из линеаризованной системы уравнений выведено линейное дисперсионное уравнение. Получены формулы для фазовой линейной скорости волны и коэффициента поглощения, показывающие существенное влияние заряженности дислокаций и электрических свойств среды на указанные величины. Для нелинейной УЗ волны выведено уравнение для амплитуды первой гармоники, откуда, как следствие, получены выражения для нелинейной скорости УЗ волны, закон затухания амплитуды первой гармоники и изменения фазы.

1. Введение

В книге [1], являющейся фундаментальной работой по теории дислокаций, приведен анализ дислокационных несовершенств, откуда следует, что дислокация должна быть заряжена. В обзоре [2], на основе анализа структуры дислокации, показано, в каких случаях она бывает заряженной и в каких – нет. Показано, как влияют заряженные дислокации на физические свойства щелочногалоидных кристаллов. В статье [3] исследовано влияние заряженных дислокаций на физические свойства полупроводниковых кристаллов. Показано, что заряд дислокаций меняет акцепторные, донорные уровни и зонную структуру кристаллов германия и кремния.

Как известно, УЗ волна является эффективным методом для исследования физических свойств кристаллов. Однако в работах [2,3] акустические явления рассмотрены не были.

Целью данной работы было исследование линейных и нелинейных волновых процессов в диэлектрических кристаллах при наличии заряженных дислокаций.

2. Вывод основных уравнений

Пусть имеется диэлектрический кристалл, где есть заряженные дислокации. Будет использована струнная модель дислокаций, однако учитывается, что дислокации заряжены. Их заряд создает в кристалле электрическое поле E_i.

Под влиянием волнового поля в диэлектрическом кристалле дислокация будет колебаться. Для описания этого процесса будет использован метод, предложенный в статье [6], в которой развиты идеи, изложенные в работах [7-9].

Согласно [6], уравнение распространения УЗ волны записывается в виде

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \tag{1}$$

$$A\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} + B\frac{\partial \xi_i}{\partial t} = f_i, \tag{2}$$

где ρ – плотность среды, а u_i – смещения, *A* и *B* – постоянные коэффициенты, характеризующие массу и затухание колебаний дислокации, ξ_i – компоненты смещения дислокаций под воздействием УЗ волны.

Тензор напряжения σ_{ik}, компоненты силы f_i, действующей на дислокацию, и компоненты электрического смещения D_i определяются из соотношений

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}\right)_{\xi_i, E_i}, \quad f_i = -\left(\frac{\partial F}{\partial \xi_i}\right)_{E_i, u_{ik}}, \quad D_i = -\left(\frac{\partial F}{\partial E_i}\right)_{\xi_i, u_{ik}}, \tag{3}$$

где *F* – свободная энергия единицы объема среды, u_{ik} – тензор деформации.

Так как дислокации создают в среде электрическое поле, которое меняется в пространстве и во времени, то к уравнениям (1) и (2) следует добавить уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0, \tag{4}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0. \tag{5}$$

Свободная энергия записывается по методу, изложенному в [5], а именно, процесс в среде характеризуется величинами u_{ik}, ξ_i, E_i, и следовательно, приращение свободной энергии, обусловленное вышеуказанными величинами, должно составлять сумму комбинаций из указанных выше величин, дающих скаляр. Тогда выражение свободной энергии примет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
F = F_0 &+ \frac{1}{2}c_{ijkl}u_{ij}u_{kl} + \frac{1}{2}\lambda_{jk}\xi_j\xi_k + \frac{1}{2}\beta_{ijkl}\left(b_i\xi_j + b_j\xi_i\right)u_{ik} + \\
&+ \frac{1}{2}P_{mk}\xi_k E_m + \frac{1}{2}\varepsilon_{jk}E_j E_k + \frac{1}{2}m_{pjk}E_p u_{jk} + \frac{1}{3!}Q_{iklmpq}u_{ik}u_{lm}u_{pq} + \\
&+ \frac{1}{3!}\gamma_{jkl}\xi_j\xi_k\xi_l + \frac{1}{3!}q_{ijklpq}\left(b_i\xi_j + b_j\xi_i\right)\left(b_k\xi_l + b_l\xi_k\right)u_{pq} + \frac{1}{3!}d_{mkj}E_m E_k\xi_j + \\
&+ \frac{1}{3!}a_{jkm}E_j\xi_k\xi_m + n_{jklm}E_j E_k u_{lm},
\end{aligned} \tag{6}
$$

где c_{ijkl} и Q_{iklmpq} – линейные и нелинейные модули упругости, λ_{ik} и γ_{jkl} – тензоры линейной и нелинейной „жесткости” дислокаций, β_{ijkl} и q_{ijklpq} – тензоры линейного и нелинейного акустодислокационного взаимодействия, ε_{ik} – диэлектрический тензор, m_{pjk}, P_{ik}, d_{mkj}, a_{jkm}, n_{jklm} – тензоры, обусловленные электрическим, акустическим и дислокационным взаимодействием, b_i – компоненты вектора Бюргерса, F_0 – свободная энергия до возмущений.

В выражении (6) мы ограничиваемся слагаемыми, которые дают в уравнениях квадратичные члены. Воспользовавшись выражениями (5), (6) и ограничиваясь одномерным приближением $\left(\partial/\partial x_1 = \partial/\partial x_2 = 0\right)$, отбрасывая индексы для простоты записи, получим следующую систему уравнений:

$$
\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta b\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{m}{2}\frac{\partial E}{\partial x} + \left(3c + Q\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3}qb^2\xi\frac{\partial \xi}{\partial x} + nE\frac{\partial E}{\partial x}, \tag{7}
$$

$$
\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + B\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\lambda\xi - b\beta\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{P}{2}E - \frac{1}{2}b\beta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\gamma\xi^2 - \frac{4}{3}qb^2\xi\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{d}{6}E^2 - \frac{a}{3}E\xi, \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}P\frac{\partial \xi}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{2}m\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{d}{6}E\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{d}{6}\xi\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{a}{3}\xi\frac{\partial \xi}{\partial x} + \\
&+ 2n\frac{\partial E}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + 2nE\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x} = 0.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Из уравнения (4) следует, что в одномерном приближении E_1 и E_2 – постоянные, поэтому в системе уравнений (7)–(9) они не фигурируют. Оценки показывают, что при ускорении заряд дислокаций излучает ничтожно слабое электромагнитное излучение, которым можно пренебречь.

3. Линейное дисперсионное уравнение и коэффициент поглощения

Линеаризуя уравнения (7)–(9), получим:

$$
\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta b\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{2}m\frac{\partial E}{\partial x}, \tag{10}
$$

$$
A\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + B\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\lambda\beta - b\beta\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{P}{2}E, \tag{11}
$$

$$\frac{P}{2}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{m}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0. \qquad (12)$$

Решение системы уравнений (10)–(11) ищется в виде бегущей волны. Тогда можно получить дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$-\omega^2\rho+ck^2=-\frac{k^2\left[b\beta\left(\frac{mp}{2\varepsilon}-\beta b\right)+\frac{m^2}{4\varepsilon}\left(\lambda-\omega^2A-i\omega B\right)\right]}{\lambda-\omega^2A-i\omega B+\frac{p^2}{4\varepsilon}}, \qquad (13)$$

где k – волновое число, ω – комплексная частота, $\omega=\omega_0+\omega_1+i\alpha=\omega_0+\omega_2$, ω_1 – действительная частота, α – коэффициент поглощения, а ω_2 – комплексное приращение частоты. Разделяя действительные и мнимые части выражения (13), учитывая малость дисперсии и диссипации, можно получить

$$\omega_1=\omega_0\left\{1-\frac{1}{2v_0^2\beta}\cdot\frac{\left[\alpha\beta b\left(\frac{mp}{4\varepsilon}-\beta b\right)-\frac{m^2}{4\varepsilon}\left(\lambda-\omega_0^2A\right)\right]\left(\lambda-\omega_0^2A-\frac{e^2p^2}{4\varepsilon}\right)-\frac{m^2\omega_0^2}{4\varepsilon}B^2}{\left(\lambda-\omega_0^2A-\frac{p^2}{4\varepsilon}\right)^2+\omega_0^2B^2}\right\}, \qquad (14)$$

$$\alpha=-\frac{k^2B}{2\beta}\frac{b\beta\left(\frac{mp}{4\varepsilon}-b\beta\right)-\frac{m^2}{4\varepsilon}\left(\lambda-\omega_0^2A\right)+\frac{m^2\omega_0^2}{4\varepsilon}\left(\lambda-\omega_0^2A-\frac{p^2}{4\varepsilon}\right)}{\left(\lambda-\omega_0^2A-\frac{p^2}{4\varepsilon}\right)^2+\omega_0^2B^2}, \qquad (15)$$

где $\omega_0^2=v_0^2k^2=\left(c/\rho\right)k^2$.

В соотношениях (14) и (15) слагаемые, содержащие m, d, ε, a, n обусловлены заряженностью дислокации и электрическими свойствами диэлектрика. Если положить $m=d=\varepsilon=a=n=0$, выражения (14) и (15) совпадут с соответствующими величинами, полученными в статье [6].

4. Вывод и решение уравнений для амплитуды первой гармоники

Решения уравнений (7)–(9), которые имеют квадратичные нелинейные члены из-за наличия дисперсии и диссипации, можно искать в виде квазимонохроматических волн, имеющих вид [5,6,9]

$$\left(u,\xi,E\right)=\frac{1}{2}\left[\left(u_0,\xi_0,E_0\right)e^{i\varphi}+\left(u_0',\xi_0',E_0'\right)e^{2i\varphi}+\left(u_0'',\xi_0'',E_0''\right)+\text{c.c.}\right], \qquad (16)$$

где $\varphi=kx-\omega t$.

Подставив (16) в систему уравнений (7)–(9), можно получить новую систему уравнений для медленно меняющихся амплитуд.

Полученная новая система упрощается. В качестве основной функции берем u_0, а k считается большим. Малость дисперсии и диссипации дает соотношения $\omega_2 \sim k^{\varepsilon_1} u_0$, $\omega_0 \sim k$, причем $0 < \varepsilon_1 < 1$, $\xi_0 \sim E_0 \sim k^{\varepsilon} u_0$. Последнее соотношение означает, что ξ_0 и E_0 меньше u_0, следовательно, ξ_0 и E_0 можем исключить линейными соотношениями. В уравнении для u_0 нелинейные слагаемые, обусловленные ξ_0 и E_0, малы и остаются упругие, геометрические нелинейности и нелинейность со свободным членом. В уравнениях для амплитуд второй гармоники оставляются только нелинейные слагаемые, пропорциональные u_0^2. Согласно [10], $\partial/\partial t \sim (\partial\omega/\partial k)(\partial/\partial x)$, тогда из уравнений для u'' легко найти $\partial u_0''/\partial x$. Таким образом, получаются следующие уравнения для амплитуд:

$$-2ikc\frac{\partial u_0}{\partial x} - 2i\omega\rho\frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{m}{2}\frac{\partial E_0}{\partial x} - \beta b\frac{\partial \xi_0}{\partial x} = ik^3(3c+Q)e^{2\alpha t}u_0' u_0^* - k^2(3c+Q)u_0\frac{\partial u_0''}{\partial x}, \quad (17)$$

$$4\left(k^2 c - \omega^2\rho\right)u_0' = -\frac{ik^3}{2}(3c+Q)u_0^2 + 2ikb\beta\xi_0' + ikmE_0^2, \quad (18)$$

$$-A\omega^2\xi_0 - i\omega B\xi_0 - ikb\beta u_0 + \frac{p}{2}E_0 + \lambda\xi_0 = 0, \quad (19)$$

$$\left(-4\omega^2 A - 2i\omega B + \lambda\right)\xi_0' = -2ik\beta bu_0' - \frac{p}{2}E_0' + \frac{1}{4}b\beta k^2 u_0^2, \quad (20)$$

$$ik\frac{p}{2}\xi_0 + i\varepsilon kE_0 + \frac{mk^2}{2}u_0 = 0, \quad (21)$$

$$2ip\xi_0' + 2i\varepsilon E_0' - 2kmu_0^2 = -\frac{imk^2}{2}u_0^2, \quad (22)$$

$$\frac{\partial u_0''}{\partial x} = \frac{k^3(3c+Q)e^{2\alpha t}}{2\rho v_0\,\partial\omega_2/\partial k}|u_0|^2. \quad (23)$$

Последовательно исключая все функции из системы уравнений (17)–(23) и переходя к новой координате $\tau = x/v - t$, где $v = \omega/k$, получим следующее уравнение относительно u_0:

$$-i\,du_0/dx = (e_1 + ie_2)|u_0|^2 u_0, \quad (24)$$

где

$$e_1 = \frac{k^3(3c+Q)^2 e^{2\alpha t}}{c'}\left\{\left[\frac{R_4R_5 + 32\omega_0^2B^2\rho\left(v^2 - v_0^2\right)}{N_3} + \frac{\omega_n}{2\rho v_0\left(\omega_n^2 + \alpha_n^2\right)}\right]\right\},$$

$$e_2 = \frac{k^3(3c+Q)^2 e^{2\alpha t}\omega_0 B}{c'}\left[\frac{R_4 + 16\rho\left(v_1^2 - v_0^2\right) - 2R_5}{N_3} - \frac{\alpha_n}{2\rho v_0\left(\omega_n^2 + \alpha_n^2\right)}\right],$$

$$R_4 = -\lambda + 4\omega_0^2 A - \frac{p^2}{2\varepsilon} + 2b^2\beta^2 - \frac{m^2p^2}{2\varepsilon^2},$$

$$R_5 = -\frac{1}{8}\rho\left(v^2 - v_0^2\right)\left(\lambda - 4\omega_0^2 A + \frac{p^2}{2\varepsilon}\right) + 2\left(2b\beta - \frac{mp}{\varepsilon}\right)\left(\frac{mp}{2\varepsilon} - 2b\beta\right),$$

$$\omega_n = \partial\omega_1/\partial k, \quad \alpha_n = \partial\alpha/\partial k,$$

$$N_3 = R_5^2 + 256\rho^2\left(v^2 - v_0^2\right)^2 \omega^2 B^2,$$

$$c' = 2c - \frac{1}{\beta b - mp/4\varepsilon}\left[m^2\beta b + \left(mp\rho + 4\rho b\beta\right)\left(v^2 - v_0^2\right) - \frac{m^2\beta b}{4\varepsilon}\right].$$

В уравнении (24) коэффициент e_1 обусловлен нелинейностями, а e_2 – нелинейной диссипацией. Сделаем в нем подстановку

$$u_0 = L(x)\exp\left[-iS(k)\right],$$

после чего для действительной амплитуды $L(x)$ и фазы $S(x)$ получаются простые обыкновенные дифференциальные уравнения, которые легко решаются и имеют следующий вид:

$$L = \left[L_0^2 / \left(1 + 2L_0^2 e_2 x\right)\right]^{1/2}, \quad S = -\left(e_1/2e_2\right)\ln\left(1 + 2L_0^2 e_2 x\right). \qquad (25)$$

Первое выражение в (25) показывает, как меняется амплитуда в пространстве, а из второго выражения видно, что время прохождения импульса волны при $e_1/e_2 > 0$ уменьшается, а при $e_1/e_2 < 0$ увеличивается.

Автор благодарен А.Г. Багдоеву за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дж.Хирт, И.Лотке.** Теория дислокаций. М., Атомиздат, 1972.
2. **Н.А.Тяпунина, Э.П.Белозерова.** УФН, **156**, 683 (1988).
3. **В.Б.Шикин, Ю.В.Шикина.** УФН, **165**, 888 (1995).
4. **Р.Труэлл, Ч.Эльбаум, Б.Чик.** Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М., Мир, 1972.
5. **А.Г.Багдоев, В.И.Ерофеев, А.В.Шекоян.** Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. М., Физматлит, 2009.
6. **А.В.Шекоян.** Письма в ЖТФ, **35**, №7, 93 (2009).
7. **Г.Н.Бурак, И.В.Островский.** Письма в ЖТФ, **23**, №18, 69 (1997).
8. **В.И.Ерофеев.** Письма в ЖТФ, **34**, №4, 32 (2008).
9. **А.В.Шекоян.** Изв. АН Арм. ССР, Физика, **23**, 283 (1988).
10. **Дж.Уизем.** Линейные и нелинейные волны. М., Мир. 1977.

ԳԵՐՁԱՅՆԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԸ ԼԻՑՔԱՎՈՐՎԱԾ ԴԻՍԼՈԿԱՑԻԱՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԲՅՈՒՐԵՂՆԵՐՈՒՄ

Ա.Վ. ՇԵԿՈՅԱՆ

Արտածված է ոչ գծային հավասարումների համակարգ, որը նկարագրում է ուլտրաձայնային ալիքների տարածումը լիցքավորված դիսլոկացիաներ ունեցող բյուրեղներում: Ստացված են բանաձևեր գծային դիսպերսիայի և կլանման գործակցի համար: Ոչ գծային ուլտրա-

ձայնային ալիքների համար արտածված են ամպլիտուդի մարման և էյկոնալի փոփոխման օրինաչափությունները:

ULTRASONIC WAVES IN CRYSTALS WITH CHARGED DISLOCATIONS

A.V. SHEKOYAN

A system of equations for charged dislocations is derived using variational principle. This system describes the propagation of ultrasonic (US) waves in crystals with charged dislocations. From the linearized system of equations a linear dispersion equation is obtained. Formulas for the phase linear velocity of wave and the attenuation coefficient are obtained, which show essential influence of charged dislocations and electrical properties of media on the mentioned quantities. For nonlinear US wave an equation for the amplitude of the first harmonic is derived.