

УДК 535.14

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ФОТОНОВ В ОБЛАСТИ НЕУСТОЙЧИВОГО ПОВЕДЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ВНУТРИРЕЗОНАТОРНОЙ ГЕНЕРАЦИИ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ

С.Т. ГЕВОРГЯН, М.С. ГЕВОРГЯН

Институт физических исследований НАН Армении, Аштарак, Армения

(Поступила в редакцию 22 ноября 2010 г.)

Для процесса внутрирезонаторной генерации второй гармоники в области неустойчивого поведения системы в положительном P -представлении с помощью моделирования ланжевеновских шумовых источников исследованы функции распределения числа фотонов фундаментальной моды и моды второй гармоники. Показано, что в неустойчивой области в отличие от устойчивой функции распределения имеют двухпиковую структуру. Исследована также функция совместного распределения числа фотонов взаимодействующих мод.

1. Введение

Для некоторых нелинейных оптических систем, как, например, процессы внутрирезонаторной генерации второй [1,2] и третьей гармоник [3], стационарные решения для числа фотонов имеются лишь для малых значений возмущающего поля. Выше некоторого значения возмущающего поля (точка бифуркации системы) стационарные решения для числа фотонов этих систем становятся неустойчивыми и полуклассические значения числа фотонов переходят в режим автоколебания.

Процесс генерации второй гармоники внутри двухмодового резонатора при внешнем когерентном возмущении фундаментальной моды является очень простой и удобной системой для исследования поведения неустойчивой оптической системы. Одновременно она является удобной системой для демонстрации применимости новых численных методов в квантовой оптике (см., например, работы [4-13]).

В настоящей работе в положительном P -представлении с помощью моделирования уравнений Ланжевена, описывающих динамику системы, исследуются функции распределения числа фотонов фундаментальной моды и моды второй гармоники в неустойчивой области в процессе внутрирезонаторной генерации второй гармоники. Производится численное решение уравнений Ланжевена и из ансамбля численных решений этих уравнений получают функции распределения числа фотонов фундаментальной моды и моды второй гармоники, а также совместное распределение числа фотонов этих мод.

2. Система и основные уравнения

Мы рассматриваем модель генерации второй гармоники внутри двухмодового резонатора. Нелинейная среда помещена внутри резонатора, который настроен на частоты фундаментальной моды ω_1 и второй гармоники ω_2 , $\omega_2 = 2\omega_1$. Система возмущается извне когерентным полем с частотой фундаментальной моды. Уравнение матрицы плотности оптического поля для этой системы в представлении взаимодействия можно представить в следующем виде:

$$\partial \rho / \partial t = (i\hbar)^{-1} [H_{\text{int}}, \rho] + L_1(\rho) + L_2(\rho). \quad (1)$$

Здесь первый член представляет возмущение системы извне и нелинейное взаимодействие оптических полей:

$$H_{\text{int}} = i\hbar E (a_1 - a_1^+) + i\hbar \chi (a_1^2 a_2^+ - a_1^{+2} a_2), \quad (2)$$

где a_i^+ и a_i ($i=1,2$) – операторы рождения и уничтожения фотонов фундаментальной моды и моды второй гармоники, соответственно; χ – коэффициент связи между модами, пропорциональный нелинейной восприимчивости среды $\chi^{(2)}$; E представляет амплитуду классического поля возмущения с частотой ω_1 .

Супероператоры $L_1(\rho)$ и $L_2(\rho)$ представляют затухание фундаментальной моды и моды второй гармоники через зеркала резонатора:

$$L_i(\rho) = -\gamma_i (2a_i \rho a_i^+ - a_i^+ a_i \rho - \rho a_i^+ a_i), \quad (i=1,2). \quad (3)$$

Здесь γ_1 и γ_2 – коэффициенты затухания мод с частотами ω_1 и ω_2 , соответственно.

Из уравнений (1)-(3) в положительном P -представлении [14,15] можно получить следующие уравнения Ланжевена для стохастических амплитуд поля [12]:

$$\begin{aligned} d\alpha_1 &= (\epsilon - \alpha_1 - 2k\beta_1\alpha_2)d\tau + (-2k\alpha_2)^{1/2} w_1(\tau)(d\tau)^{1/2}, \\ d\beta_1 &= (\epsilon^* - \beta_1 - 2k\alpha_1\beta_2)d\tau + (-2k\beta_2)^{1/2} w_2(\tau)(d\tau)^{1/2}, \\ d\alpha_2 &= (-r\alpha_2 + k\alpha_1^2)d\tau, \\ d\beta_2 &= (-r\beta_2 + k\beta_1^2)d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь β_i, α_i ($i=1,2$) являются независимыми стохастическими переменными, которые соответствуют медленно меняющимся во времени операторам рождения a_i^+ и уничтожения a_i , соответственно. Величина $\tau = \gamma_1 t$ является нормированным временем, $r = \gamma_2 / \gamma_1$ представляет отношение коэффициентов затухания мод внутри резонатора, $k = \chi / \gamma_1$ является нормированным коэффициентом связи между модами и $\epsilon = E / \gamma_1$ представляет нормированное возмущение на частоте фундаментальной моды. Независимые шумовые

источники $w_1(\tau)$ и $w_2(\tau)$ имеют нулевое среднее значение: $\langle w_1(\tau) \rangle = \langle w_2(\tau) \rangle = 0$. Ненулевое значение имеют лишь средние значения квадратов этих величин:

$$\langle [w_1(\tau)]^2 \rangle = \langle [w_2(\tau)]^2 \rangle = 1. \quad (5)$$

Система уравнений (4) без шумовых источников в области больших времен взаимодействия имеет стабильное стационарное решение лишь для малых значений поля возмущения $\epsilon < \epsilon_{cr}$ [1,2]. Здесь ϵ_{cr} – точка бифуркации Хопфа и определяется следующей формулой:

$$\epsilon_{cr} = (2+r) \left[r(1+r)/2k^2 \right]^{1/2}. \quad (6)$$

В случае $\epsilon > \epsilon_{cr}$ малые флуктуации фаз фундаментальной моды и моды второй гармоники во времени перестают затухать. Система теряет стабильность вокруг стационарных решений системы уравнений (4) без шумовых членов. В этой области классические решения для числа фотонов переходят в режим автоколебания.

Наши вычисления основаны на моделировании шумовых источников. Эти источники мы моделируем с помощью следующих формул [16]:

$$\begin{aligned} w_1(\tau) &= [-2 \ln(z_1)]^{1/2} \cos(2\pi z_2), \\ w_2(\tau) &= [-2 \ln(z_1)]^{1/2} \sin(2\pi z_2), \end{aligned} \quad (7)$$

где z_1 и z_2 – независимые случайные числа, имеющие равномерное распределение в интервале $(0...1)$. Для случайных величин, представленных в выражении (7), имеем:

$$\langle w_i(\tau) \rangle = 0, \quad \langle w_i(\tau) w_j(\tau) \rangle = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2). \quad (8)$$

Для решения системы уравнений (4) мы используем численный метод Эйлера для решения дифференциальных уравнений.

3. Функции распределения числа фотонов фундаментальной моды и моды второй гармоники

Рассмотрим функции распределения числа фотонов фундаментальной моды и второй гармоники вокруг точки бифуркации системы. Вначале исследуем функции распределения фундаментальной моды в области больших времен взаимодействия.

Представим алгоритм вычисления этой функции. Сначала в фазовом пространстве числа фотонов фундаментальной моды выбираем отрезок для вычисления функции распределения. Это та область, вне которой функция распределения обращается в ноль; ее можно легко найти, исследуя динамику нескольких реализаций числа фотонов фундаментальной моды. Делим длину этого отрезка на N_p равных частей и вычисляем величину

$\Delta n_1 = (n_{1\max} - n_{1\min}) / N_p$. Выбираем массив чисел $A(i)$ с размерностью $N_p + 1$ ($i = 0, N_p$) и обнуляем все его элементы.

Далее идет цикл вычисления, один шаг которого представляем ниже. С помощью решения системы уравнений (4) для значения времени τ вычисляется значение числа фотонов фундаментальной моды $n_1(\tau)$. Далее рассчитывается

$$i = \text{Int}[(n_1(\tau) - n_{1\min}) / \Delta n_1], \quad (9)$$

где Int означает целую часть выражения, стоящего в скобках. Значение элемента массива $A(i)$ увеличивается на единицу:

$$A(i) \rightarrow A(i) + 1. \quad (10)$$

После этого вычисление повторяется до набора необходимого количества реализаций N .

После вычисления элементы массива $A(i)$ представляют приблизительные значения ненормированной функции распределения числа фотонов фундаментальной моды для момента времени τ в точках $n_{1\min} + i\Delta n_1$, ($i = 0, N_p$). Через эти точки проводим линию и нормируем полученную функцию на единицу. Нормированная кривая представляет приблизительный график распределения числа фотонов фундаментальной моды в положительном P -представлении.

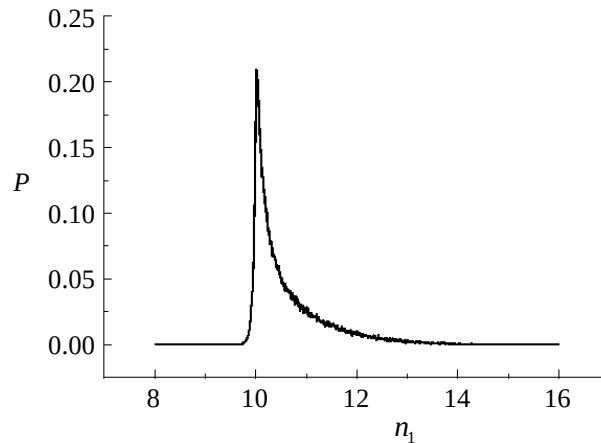


Рис.1. Функция распределения числа фотонов фундаментальной моды в критической точке системы ($\epsilon = \epsilon_{cr} = 30$) и в области больших времен взаимодействия ($\tau = 10$) при эволюции системы из начального состояния с нормальным распределением стохастических амплитуд мод поля (11). Значения параметров $k = 0.1$, $r = 1$. Кривая получена с помощью 100000 независимых решений системы уравнений (4).

На рис.1 представлена функция распределения числа фотонов фундаментальной моды ($n_1 = \beta_1 \alpha_1$) в критической точке системы ($\epsilon = \epsilon_{cr} = 30$). Для вычисления этой функции было использовано 100000 независимых

численных решений системы уравнений Ланжевена (4) с начальными значениями стохастических амплитуд мод поля

$$\begin{aligned}\alpha_1(0) &= [-2\ln(z_1)]^{1/2} \cos(2\pi z_2) + i[-2\ln(z_1)]^{1/2} \sin(2\pi z_2), \\ \beta_1(0) &= \alpha_1^*(0), \\ \alpha_2(0) &= [-2\ln(z_3)]^{1/2} \cos(2\pi z_4) + i[-2\ln(z_3)]^{1/2} \sin(2\pi z_4), \\ \beta_2(0) &= \alpha_2^*(0),\end{aligned}\tag{11}$$

где z_1, z_2, z_3, z_4 – независимые случайные числа, имеющие равномерное распределение в интервале $(0...1)$. В частности, для этих начальных значений амплитуд мод оптического поля имеем:

$$\begin{aligned}\langle \alpha_i(0) \rangle &= \langle \beta_i(0) \rangle = 0, \\ \langle \beta_i(0) \alpha_j(0) \rangle &= 2\delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2).\end{aligned}\tag{12}$$

Функция вычислена в области больших времен взаимодействия ($\tau=10$) и для значений параметров $k=0.1$, $r=1$. Она асимметрична относительно наиболее вероятного значения. Правее точки наиболее вероятного значения числа фотонов она имеет большую вероятность реализации, чем левее.

На рис.2 представлена функция распределения числа фотонов фундаментальной моды в области неустойчивости ($\epsilon=50$) и для больших времен взаимодействия ($\tau=10$). Для вычисления этой функции было использовано 100000 независимых численных реализаций системы уравнений Ланжевена (4). Функция вычислена для тех же значений параметров, что и предыдущая ($k=0.1$, $r=1$). В этом случае функция распределения числа фотонов имеет два наиболее вероятных значения. Каждое из этих значений представляет состояние системы, в котором она проводит свое основное время. После прохождения критической точки, по мере проникновения системы в глубь неустойчивой области системы, функция распределения числа фотонов из однокомпонентной асимметричной структуры (рис.1) постепенно переходит в двухкомпонентную структуру (рис.2).

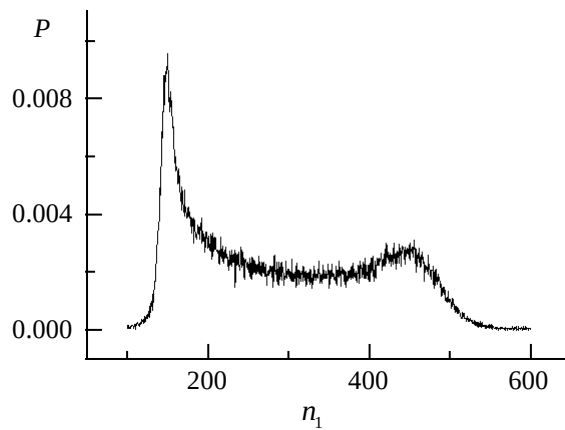


Рис.2. Функция распределения числа фотонов фундаментальной моды в области неустойчивости ($\epsilon = 50$) и в области больших времен взаимодействия ($\tau = 10$) при эволюции системы из начального состояния с нормальным распределением стохастических амплитуд мод поля. Значения параметров $k = 0.1$, $r = 1$. Для вычисления функции было использовано 100000 независимых решений системы уравнений (4).

В области больших времен взаимодействия и в области неустойчивости поведение функции распределения числа фотонов моды второй гармоники ана-

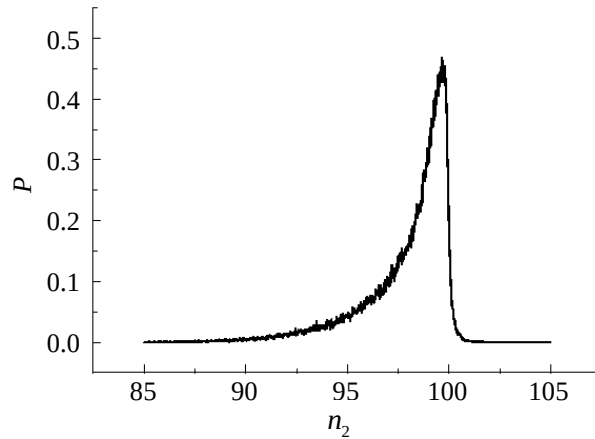


Рис.3. Функция распределения числа фотонов моды второй гармоники в критической точке системы ($\epsilon = \epsilon_{cr} = 30$) и в области больших времен взаимодействия ($\tau = 10$) при эволюции системы из начального состояния с нормальным распределением стохастических амплитуд мод поля (11). Значения параметров $k = 0.1$, $r = 1$. Функция вычислена с помощью 100000 независимых решений системы уравнений Ланжевена (4).

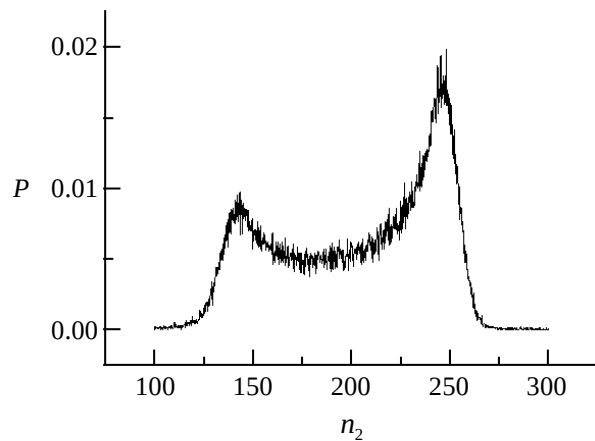


Рис.4. Функция распределения числа фотонов моды второй гармоники выше точки бифуркации оптической системы ($\epsilon = 50$) и в области больших времен взаимодействия ($\tau = 10$) при эволюции системы из начального состояния с нормальным распределением стохастических амплитуд взаимодействующих мод (11). Значения параметров $k = 0.1$,

$r=1$. Функция вычислена с помощью 100000 независимых реализаций системы уравнений Ланжевена (4).

логично поведению функции распределения числа фотонов фундаментальной моды. На рис.3 в области больших времен взаимодействия ($\tau=10$) и в критической точке системы ($\epsilon = \epsilon_{cr} = 30$) представлена функция распределения числа фотонов моды второй гармоники. Функция вычислена для тех же параметров системы, что и функция распределения, представленная на рис.2. Для получения этой функции было использовано 100000 независимых реализаций системы уравнений Ланжевена с начальными значениями (11). Как и функция распределения числа фотонов фундаментальной моды в критической точке (см. рис.1), эта функция тоже асимметрична относительно наиболее вероятного значения. Но в этом случае числа фотонов, имеющих значение меньшее, чем наиболее вероятное, имеют большую вероятность реализации, чем числа фотонов, имеющих большее значение.

На рис.4 приведена функция распределения числа фотонов моды второй гармоники в области больших времен взаимодействия ($\tau=10$) и в области неустойчивости ($\epsilon = 50$). Функция получена с помощью 100000 независимых реализаций системы уравнений Ланжевена (4) с начальными независимыми значениями (11). Функция вычислена для значений параметров $k = 0.1$, $r = 1$. Функция распределения числа фотонов моды второй гармоники имеет двухпиковую структуру, как и функция распределения числа фотонов фундаментальной моды. Каждое из наиболее вероятных значений функции распределения представляет состояние системы, в котором она проводит свое основное время.

4. Функция совместного распределения числа фотонов фундаментальной моды и моды второй гармоники

Рассмотрим поведение функции совместного распределения числа фотонов фундаментальной моды и моды второй гармоники.

Представим алгоритм вычисления этой функции. В фазовом пространстве числа фотонов фундаментальной моды и моды второй гармоники выбираем прямоугольник с вершинами в точках (n_{1min}, n_{2min}) , (n_{1min}, n_{2max}) , (n_{1max}, n_{2max}) , (n_{1max}, n_{2min}) . Это та область фазового пространства, вне которой функция совместного распределения числа фотонов фундаментальной моды и моды второй гармоники обращается в нуль. Делим стороны этого прямоугольника на N_p равных частей и вычисляем следующие величины: $\Delta n_1 = (n_{1max} - n_{1min})/N_p$, $\Delta n_2 = (n_{2max} - n_{2min})/N_p$. Затем определяем двумерный массив чисел $A(i, j)$ с размерностью $(N_p + 1) \times (N_p + 1)$, $(i, j = 0, N_p)$ и обнуляем все его элементы. Далее идет цикл вычисления, один шаг которого представляем ниже. С помощью решения системы уравнений (4) вычисляем число фотонов фундаментальной моды и моды второй гармоники при значениях времени τ : $n_1(\tau)$ и $n_2(\tau)$. Далее применяем следующие формулы:

$$\begin{aligned} i &= \text{Int}[(n_1(\tau) - n_{1\min}) / \Delta n_1], \\ j &= \text{Int}[(n_2(\tau) - n_{2\min}) / \Delta n_2]. \end{aligned} \quad (13)$$

Затем значение элемента массива $A(i, j)$ под номером (i, j) увеличиваем на единицу:

$$A(i, j) \rightarrow A(i, j) + 1. \quad (14)$$

После этого вычисление повторяем до набора необходимого количества реализаций N .

После вычисления элементы массива $A(i, j)$ представляют приближенные значения ненормированной функции совместного распределения

числа фотонов фундаментальной моды и моды второй гармоники в точках $(n_{1\min} + i\Delta n_1, n_{2\min} + j\Delta n_2)$.

Через точки $(n_{1\min} + i\Delta n_1, n_{2\min} + j\Delta n_2, A(i, j))$ трехмерного пространства проводим поверхность. Эта поверхность представляет ненормированную функцию совместного распределения числа фотонов фундаментальной моды и моды второй гармоники в момент времени τ . Далее нормируем эту функцию.

На рис.5 в критической точке ($\varepsilon = \varepsilon_{cr} = 30$) и в области больших времен взаимодействия ($\tau = 10$) представлена функция совместного распределения числа фотонов фундаментальной моды и моды второй гармоники. Функция вычислена с помощью 50000 независимых реализаций системы уравнений (4) с начальными значениями (11) и для значений параметров системы $k = 0.1$, $r = 1$. Она имеет однопиковую структуру, но асимметрична относительно наиболее вероятного значения функции распределения. Пара больших значений числа фотонов фундаментальной моды с меньшими значениями числа фотонов второй гармоники относительно наиболее вероятного значения функции распределения имеет большую вероятность реализаций, чем пара меньших значений числа фотонов фундаментальной моды с большими значениями числа фотонов второй гармоники.

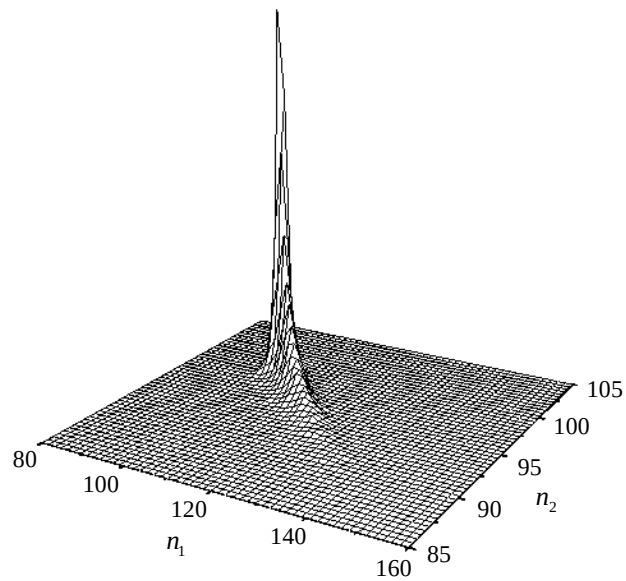


Рис.5. Функция совместного распределения числа фотонов фундаментальной моды и моды второй гармоники в критической точке системы ($\epsilon = \epsilon_{cr} = 30$) и в области больших времен взаимодействия ($\tau = 10$) при эволюции системы из начального состояния с нормальным распределением стохастических амплитуд мод поля (11). Значения параметров $k = 0.1$, $r = 1$. Для вычисления функции было использовано 50000 независимых реализаций системы уравнений Ланжевена (4).

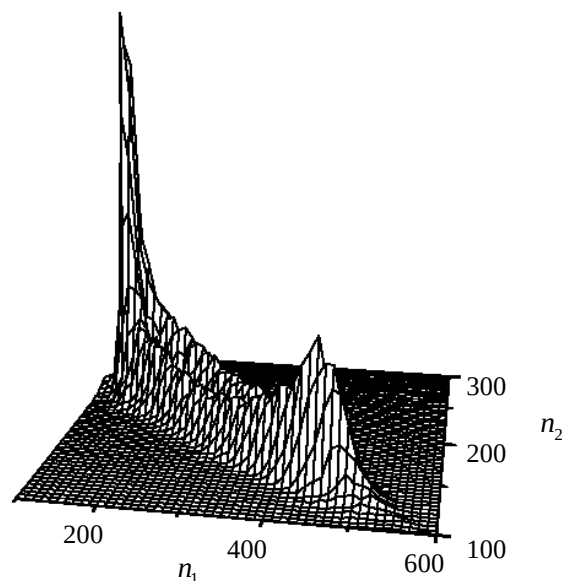


Рис.6. Функция совместного распределения числа фотонов фундаментальной моды и моды второй гармоники в области неустойчивости системы ($\epsilon = 50$) и в области больших времен взаимодействия ($\tau = 10$) при эволюции из начального состояния с нормальным распределением стохастических амплитуд мод поля (11). Значения параметров $k = 0.1$, $r = 1$. Функция вычислена с помощью 50000 независимых реализаций системы уравнений (4).

На рис.6 в области неустойчивости ($\epsilon = 50$) и в области больших времен взаимодействия ($\tau = 10$) представлена функция совместного распределения числа фотонов фундаментальной моды и моды второй гармоники. Для вычисления этой функции было использовано 50000 независимых численных решений системы уравнений Ланжевена (4) с начальными значениями (11). Функция вычислена для значений параметров системы $k = 0.1$, $r = 1$. Функция имеет двухпиковую структуру. Каждое из наиболее вероятных значений функции распределения представляет состояние системы, в котором она проводит свое основное время.

Работа выполнена при частичной поддержке фонда ANSEF, грант № ps-opt-1091. Авторы выражают благодарность О.Г. Геворгян за помощь при подготовке статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **P.D.Drummond, K.J.McNeil, D.F.Walss.** Optica Acta, **27**, 321 (1980).
2. **P.D.Drummond, K.J.McNeil, D.F.Walls.** Optica Acta, **28**, 211 (1981).
3. **S.T.Gevorkyan, G.Yu.Kryuchkyan, K.V.Kheruntsyan.** Optics Comm., **134**, 440 (1997).
4. **M.Dorfle, A.Schenzle.** Z. Phys. B, **65**, 113 (1986).
5. **M.Dorfle, R.Graham.** Optical instabilities, ed. by R.U. Boyd, M.G. Raymer, L. M. Narducci. Cambridge; Cambridge University Press, 1986, p.352.
6. **C.M.Savage.** Phys. Rev. A, **37**, 158 (1988).
7. **R.Schack, A.Schenzle.** Phys. Rev. A, **41**, 3847 (1990).
8. **P.Goetsch, R.Graham.** Ann. Phys. Lpz, **2**, 706 (1993).
9. **N.Gisin, I.C.Percival.** J. Phys. A, **25**, 5677 (1992).
10. **R.Schack, T.A.Brun, I.C.Percival.** J. Phys. A, **28**, 1995 (1995).
11. **X.P.Zheng, C.M.Savage.** Phys. Rev. A, **51**, 792 (1995).
12. **S.T.Gevorkyan.** Phys. Rev. A, **62**, 013813 (2000).
13. **S.T.Gevorkyan, G.Yu.Kryuchkyan, N.T.Muradyan.** Phys. Rev. A, **61**, 043805 (2000).
14. **P.D.Drummond, C.W.Gardiner.** J. Phys. A, **13**, 2353 (1980).
15. **C.W.Gardiner.** Handbook of Stochastic Methods. Berlin, Springer, 1985.
16. **С.М.Ермаков, Г.А.Михайлов.** Статистическое моделирование. М., Наука, 1982.

ՖՈՏՈՆՆԵՐԻ ԹՎԻ ԲԱՇԽՈՒՄԸ ԵՐԿՐՈՐԴ ՀԱՐՄՈՆԻԿԻ ՆԵՐՈՒԶՈՆԱՏՈՐԱՅԻՆ ԳԵՆԵՐԱՅԻԱՅԻ ԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ԱՆԿԱՅՈՒՆ ՎԱՐՔԻ ՏԻՐՈՒՅԹՈՒՄ

Ս.Թ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ, Մ.Ս. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Ներդրվող աշխատանքը երկրորդ հարմոնիկի գեներացիայի երևույթի համար համակարգի անկայուն վարքի տիրույթում դրական P -պատկերացումում լանժևելեյան աղմուկային աղբյուրների մոդելավորման օգնությամբ հետազոտված էն ֆունկցիաները: Ցույց է տրված, որ անկայունության տիրույթում, ի տարբերություն կայունության տիրույթի, բաշխման ֆունկցիաները ունեն երկկոմպոնենտային կառուցվածք: Հետազոտված է նաև փոխազդող մոդերի ֆոտոնների թվի համատեղ բաշխման ֆունկցիան:

DISTRIBUTION OF NUMBER OF PHOTONS IN THE REGION OF UNSTABLE BEHAVIOR IN THE PROCESS OF INTRACAVITY SECOND HARMONIC GENERATION

S.T. GEVORGYAN, M.S. GEVORGYAN

For the process of intracavity second harmonic generation, in the region of unstable behavior of the system, the functions of distribution of photon numbers in fundamental and second harmonic modes are studied in the positive P -representation by means of simulation of Langevin noise sources. It is shown that in unstable region, as distinct from stable one, the distribution functions have two-peak structure. The function of joint distribution of photon numbers in interacting modes was also investigated.