Известия НАН Армении, Физика, т.45, №3, с.183-192 (2010)

УДК 539.1

# МАТРИЦА ПЕРЕНОСА ДЛЯ ЗАДАЧИ МНОГОКАНАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ

Д.М. СЕДРАКЯН

Ереванский государственный университет, Армения

(Поступила в редакцию 4 декабря 2009 г.)

Получен вид матрицы переноса для многоканальной задачи рассеяния. Элементы этой матрицы выражены через амплитуды прохождения $T_1$ и $T_2$ и отражения $R_1$ и $R_2$. На основе матрицы для системы из $N$ локализованных и не перекрывающихся центров получены разностные уравнения для элементов матрицы переноса с заданными начальными условиями.

## 1. Введение

В работах [1,2] сформулирована задача рассеяния квантовой частицы на двумерном потенциале $U(x,y)$. Показано, что уравнение Шредингера удобно представить в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x,y)+\left(\chi^2-V(x,y)\right)\psi(x,y)=0, \tag{1}$$

где введены обозначения

$$\frac{2m}{\hbar^2}E=\chi^2, \quad \frac{2m}{\hbar^2}U=V(x,y). \tag{2}$$

Решение уравнения (1) с граничными условиями $V(x,0)=V(x,a)=\infty$ ищется в виде

$$\psi(x,y)=\sum_{m=1}^{n}\psi_m(x)\varphi_m(y), \tag{3}$$

где $\varphi_m(y)$ есть решение уравнения

$$\frac{d^2\varphi_m(y)}{dy^2}+\chi_m^2\varphi_m(y)=0 \tag{4}$$

с $\chi_m=(\pi/a)m, \ m=1,2,...,n$ и имеет вид

$$\varphi_m=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}my\right). \tag{5}$$

Отметим, что решения (5) ортонормированы и, следовательно, удовлетворяют требованиям

$$\int_0^a \varphi_m^*(y)\varphi_{\mathrm{i}}(y)\,dy = \delta_{m,i}. \tag{6}$$

Для нахождения искомых функций $\psi_m(x)$ получается система уравнений

$$\frac{d^2\psi_m(x)}{dx^2} + \kappa_m^2\psi_m(x) - \sum_{m=1}^{n} V_{m,i}\psi_i(x) = 0, \quad m = 1,2,...,n, \tag{7}$$

где $\kappa_m^2 = \chi^2 - \chi_m^2$. Фактически, частица в направлении $y$ совершает колебательное движение с дискретной энергией $E_m = \left(\hbar^2/2m\right)\chi_m^2$, а в направлении $x$ она может рассеиваться на потенциале $V_{mn}(x)$:

$$V_{mi}(x) = \int_0^a \varphi_m(y)V(x,y)\varphi_i(y)\,dy. \tag{8}$$

В работах [2,3] показано, что решение системы уравнений (7) и (8) приводит к нахождению амплитуд рассеяния, т.е. к нахождению $t_i$ и $r_i$. В частности, в работе [3] предложен метод нахождения этих величин в зависимости от вида потенциала $V(x,y)$ и толщины рассеивающего слоя.

Как показано в работах [4,5], при изучении одномерных задач рассеяния на системе $N$ неперекрывающихся потенциалов важную роль играет матрица переноса. Эта матрица связывает амплитуды отражения $R_N$ с амплитудами прохождения $T_N$. Важно, что, согласно методу матрицы переноса, элементы этой матрицы выражаются через величины $R_N$ и $T_N$. Знание этой матрицы позволяет найти рекуррентные соотношения между элементами матрицы, которые составляют основную систему алгебраических разностных уравнений для решения задач рассеяния частицы на системе потенциалов, состоящих из $N$ звеньев [4]. Эти уравнения могут быть основой для изучения локализации частицы при прохождении системы потенциалов, не обладающей высокой степенью периодичности [5].

Целью настоящей работы было обобщить полученные в работе [6] результаты для двухканального рассеяния на случай многоканального рассеяния квантовой частицы. Это означает найти матрицу, которая связывает амплитуды отражения $R_m$ с амплитудами прохождения $T_m$, соответствующими рассеянию с импульсами $\mathbf{k}_m$. Предполагается, что частица падает на потенциал $V(x,y)$ с импульсом $\mathbf{k}_1$, следовательно, первый канал характеризуется амплитудами рассеяния $R_1$ и $T_1$. В разделе 2 получена матрица переноса для многоканального рассеяния. Элементы этой матрицы выражаются через амплитуды рассеяния $T_m$ и $R_m$ в разделе 3. В последнем разделе получены разностные уравнения для элементов матрицы переноса. Показано, что задача $n$-канального рассеяния в случае $N$ потенциалов сводится к решению системы уравнений, исследованных в задачах одномерного рассеяния [4,5].

## 2. Матрица переноса для *n*-канального рассеяния

Предположим, что потенциал $V(x,y)$ имеет произвольный вид вдоль оси $y$ и отличается от нуля только в интервале $x_1 \le x \le x_2$. Общие решения уравнений (7) в интервалах $x \le x_1$ и $x \ge x_2$ можно написать в следующем виде:

$$\psi_{im} = A_{im} e^{ik_m x} + B_{im} e^{-ik_m x}, \quad m = 1,2,...,n \quad \text{при} \quad x \le x_1 \tag{9}$$

и

$$\psi_{fm} = A_{fm} e^{ik_m x} + B_{fm} e^{-ik_m x}, \; m = 1,2,...,n \quad \text{при} \quad x \ge x_2. \tag{10}$$

Решение этой системы уравнений в области $x_1 \le x \le x_2$ будем искать в следующем виде:

$$\psi_m = a_m e^{ik_m x} - b_m e^{-ik_m x}, \quad m = 1,2,...,n, \tag{11}$$

где $a_m(x)$ и $b_m(x)$ – неизвестные функции от *x*, которые удовлетворяют условию

$$da_m(x)/dx = \left(db_m(x)/dx\right) e^{-2ik_m x}, \qquad m = 1,2,...,n. \tag{12}$$

Такой выбор функций $a_m(x)$ и $b_m(x)$ означает, что независимо от вида потенциалов $V_{mi}(x)$, функции $\psi_m(x)$ и их первые производные по *x* будут непрерывными функциями от *x*, если только потребовать непрерывность функции $\psi_m(x)$ [7]. Поэтому, при сшивке решений уравнений (7) на границах потенциала $x_1$ и $x_2$ достаточно потребовать непрерывность функций $\psi_m(x)$ в этих точках. Прежде чем перейти к сшивке этих решений, заметим, что если $\psi_m(x)$ выражаются формулами (11) и являются решениями уравнений (7), то другой линейно-независимой парой решений будут их комплексно-сопряженные решения. Общее решение этих уравнений легко получить, если решение (11) умножить на $L_1$, а их комплексно-сопряженные – на $L_2$ и сложить. Здесь $L_1$ и $L_2$ – произвольные постоянные, которые далее определятся из условий сшивки. Полученное общее решение представим в следующем виде:

$$\begin{gathered}\psi_m = \left[L_1 a_m(x) - L_2 b_m^*(x)\right] e^{ik_m x} + \left[L_2 a_m^*(x) - L_1 b_m(x)\right] e^{-ik_m x}, \\ m = 1,2,...n, \; \text{при} \; x_1 \le x \le x_2.\end{gathered} \tag{13}$$

Непрерывность функций $\psi_m$ на границе $x = x_1$ приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} A_{im} &= L_1 a_m(x_1) - L_2 b_m^*(x_1), \\ B_{im} &= -L_1 b_m(x_1) + L_2 a_m^*(x_1). \end{aligned} \tag{14}$$

Уравнения (14) дают возможность выразить постоянные $L_1$ и $L_2$ через $A_{im}$ и $B_{im}$ и значения $a_m$, $b_m$ и их комплексно-сопряженные величины в точке $x_1$. Выражения для постоянных $L_1$ и $L_2$ можно записать в виде

$$L_1 = \sum_{m=1}^{n} \left[A_{im} a_m^*(x_1) + B_{im} b_m^*(x_1)\right] \Big/ \Delta, \tag{15}$$

$$L_2 = \frac{\sum_{m=1}^{n}\left[A_{im}b_m\left(x_1\right) + B_{im}a_m\left(x_1\right)\right]}{\Delta}, \tag{16}$$

где

$$\Delta = \sum_{m=1}^{n}\Delta_m, \quad \Delta_m = \left|a_m\left(x_1\right)\right|^2 - \left|b_m\left(x_1\right)\right|^2.$$

Заметим, что при определенной нормировке функций $a_m$ и $b_m$ можно добиться условия $\Delta = 1$.

Теперь перейдем к сшивке решений $\psi_m\left(x\right)$ на другом конце потенциала: $x = x_2$. Условия их непрерывности дают:

$$A_{fm} = L_1 a_m\left(x_2\right) - L_2 b_m^{*}\left(x_2\right), \tag{17}$$

$$B_{fm} = -L_1 b_m\left(x_2\right) + L_2 a_m^{*}\left(x_2\right). \tag{18}$$

Подставляя $L_1$ и $L_2$ из решений (15) и (16) в уравнения (17) и (18), можно найти выражения, связывающие постоянные $A_{fm}$ и $B_{fm}$ с $A_{im}$ и $B_{im}$. В частности, получим

$$A_{fm} = \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_{mk}^{*}A_{ik} - \beta_{mk}^{*}B_{ik}\right), \tag{19}$$

$$B_{fm} = \sum_{k=1}^{n}\left(-\beta_{mk}A_{ik} + \alpha_{mk}B_{ik}\right), \tag{20}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha_{mk}^{*}\left(x_1, x_2\right) &= \left[a_m\left(x_2\right)a_k^{*}\left(x_1\right) - b_m^{*}\left(x_2\right)b_k\left(x_1\right)\right]\big/\Delta, \\ \beta_{mk}^{*}\left(x_1, x_2\right) &= \left[-a_m\left(x_2\right)b_k^{*}\left(x_1\right) + b_m^{*}\left(x_2\right)a_k\left(x_1\right)\right]\big/\Delta. \end{aligned} \tag{21}$$

Полученные уравнения (19) и (20), связывающие начальные амплитуды $A_{im}$ и $B_{im}$ с конечными амплитудами $A_{fm}$ и $B_{fm}$, можно представить в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} A_{f1} \\ B_{f1} \\ \vdots \\ A_{fn} \\ B_{fn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{*} & -\beta_{11}^{*} & \cdots & \alpha_{1n}^{*} & -\beta_{1n}^{*} \\ -\beta_{11} & \alpha_{11} & \cdots & -\beta_{1n} & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1}^{*} & -\beta_{n1}^{*} & \cdots & \alpha_{nn}^{*} & -\beta_{nn}^{*} \\ -\beta_{n1} & \alpha_{n1} & \cdots & -\beta_{nn} & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{i1} \\ B_{i1} \\ \vdots \\ A_{in} \\ B_{in} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

В случае отсутствия потенциала возбуждения ($V_{1m}\left(x\right) = 0$) решения $\psi_m\left(x\right) = 0$, $m = 2, 3, ..., n$ и, следовательно, равны нулю также $a_m$ и $b_m$. Легко видеть, что равняются нулю также элементы матрицы переноса $\alpha_{mk}$ и $\beta_{mk}$, когда $m = 2, 3, ..., n$ и $k = 2, 3, ..., n$. Тогда матрица, входящая в (22), переходит в матрицу переноса для одномерной задачи рассеяния [7].

## 3. Выражение матрицы переноса через амплитуды прохождения $T_m$ и отражения $R_m$

Предположим, что частица с импульсом $\mathbf{k}_1$ падает на потенциал $V(x,y)$. Взаимодействуя с ним, не меняя импульс $\mathbf{k}_1$ и проходя через потенциал толщиной $z = x_2 - x_1$, она может выйти с амплитудой $T_1$ или отразиться с амплитудой $R_1$. Одновременно, с определенной вероятностью частица может, меняя импульс на $\mathbf{k}_m$, пройти потенциал с амплитудой $T_m$ или отразиться с амплитудой $R_m$. Вероятность прохождения частицы через потенциал имеет вид

$$|T|^2 = \sum_{m=1}^{n} |T_m|^2. \tag{23}$$

Можно рассмотреть также величину

$$|R|^2 = \sum_{m=1}^{n} |R_m|^2, \tag{24}$$

которая есть полная вероятность отражения и связана с $|T|^2$ следующей формулой:

$$|R|^2 = 1 - |T|^2. \tag{25}$$

Это условие вытекает из закона сохранения плотности потока вероятности, который имеет вид

$$\sum_{m=1}^{n} \left( |T_m|^2 + |R_m|^2 \right) = 1. \tag{26}$$

При рассмотренной нами постановке задачи постоянные $A_{fm}$, $B_{fm}$, $A_{im}$ и $B_{im}$ связаны с амплитудами рассеяния $T_m$ и $R_m$ следующими формулами:

$$A_{i1} = 1,\ \ A_{im} = 0,\ \ m > 1,\ \ B_{im} = R_m,$$

тогда как

$$A_{fm} = T_m \ \text{ и } \ B_{fm} = 0.$$

Тогда окончательно имеем:

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ 0 \\ \vdots \\ T_k \\ 0 \\ \vdots \\ T_n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^* & -\beta_{11}^* & \cdots & \alpha_{1n}^* & -\beta_{1n}^* \\ -\beta_{11} & \alpha_{11} & \cdots & -\beta_{1n} & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{k1}^* & -\beta_{k1}^* & \cdots & \alpha_{kn}^* & -\beta_{kn}^* \\ -\beta_{k1} & \alpha_{k1} & \cdots & -\beta_{kn} & \alpha_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1}^* & -\beta_{n1}^* & \cdots & \alpha_{nn}^* & -\beta_{nn}^* \\ -\beta_{n1} & \alpha_{n1} & \cdots & -\beta_{nn} & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ R_1 \\ \vdots \\ 0 \\ R_k \\ \vdots \\ 0 \\ R_n \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Раскрывая уравнение (27), получим:

$$T_k = \alpha_{k1}{}^* - \beta_{k1}{}^* R_1 - \sum_{m=2}^{n} \beta_{km}{}^* R_m, \tag{28а}$$

$$0 = -\beta_{k1} + \alpha_{k1} R_1 + \sum_{m=2}^{n} \alpha_{km} R_m. \tag{28б}$$

Уравнение (28б) определяет $\beta_{k1}$ как

$$\beta_{k1} = \alpha_{k1} R_1 + \sum_{m=2}^{n} \alpha_{km} R_m. \tag{29}$$

Подставляя (29) в уравнения (28а), можем записать

$$1 = \frac{\alpha_{k1}{}^*}{T_k}\left(1 - |R_1|^2\right) - \sum_{m=2}^{\mathrm{n}} \frac{\beta_{km}{}^*}{T_k} R_m - \sum_{m=2}^{\mathrm{n}} \frac{\alpha_{km}{}^*}{T_k} R_m^* R_1. \tag{30}$$

Правая часть этого уравнения должна быть действительной величиной, и, следовательно,

$$\alpha_{k1}{}^* / T_k = 1 / |T|^2, \quad \beta_{km}{}^* / T_k = R_m{}^* / |T|^2, \quad \alpha_{km}^* / T_k = C_m^k R_1^* R_m. \tag{31}$$

Подставляя (31) в (30), получим

$$1 = \frac{1}{|T|^2}\left(1 - \sum_{m=1}^{n} |R_m|^2\right) - \sum_{m=2}^{n} C_m^k |R_m|^2 |R_1|^2. \tag{32}$$

Учитывая, что уравнение (32) должно переходить в (26), мы должны потребовать, чтобы $C_m^k = 0$ при $m = 2, ..., n.$ Из этого требования и уравнения (31) вытекает, что $\alpha_{km} = 0$ для всех $k$ и $m = 2, ..., n.$ Таким образом, отлична от нуля только функция $\alpha_{k1}$, которую обозначим через $\alpha_k$. Тогда, согласно формулам (31), имеем

$$\alpha_k = \frac{1}{T_k}\left|\frac{T_k}{T}\right|^2, \quad \beta_{km} = \frac{R_m}{T_k}\left|\frac{T_k}{T}\right|^2. \tag{33а}$$

Аналогичным образом из $\beta_{km}$ отделим $\beta_{k1}$ и введем обозначения

$$\beta_{k1} = \beta_k = \frac{R_1}{T_k}\left|\frac{T_k}{T}\right|^2, \quad \beta_{km} \equiv \delta_{km} = \frac{R_m}{T_k}\left|\frac{T_k}{T}\right|^2. \tag{33б}$$

Тогда систему уравнений (27) можно записать в следующем виде:

$$
\begin{pmatrix} T_1 \\ 0 \\ \vdots \\ T_k \\ 0 \\ \vdots \\ T_n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^* & -\beta_1^* & 0 & -\delta_{12}^* & \cdots & 0 & -\delta_{1n}^* \\ -\beta_1 & \alpha_1 & -\delta_{12} & 0 & \cdots & -\delta_{1n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_k^* & -\beta_k^* & 0 & -\delta_{k2}^* & \cdots & 0 & -\delta_{kn}^* \\ -\beta_k & \alpha_k & -\delta_{k2} & 0 & \cdots & -\delta_{kn} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n^* & -\beta_n^* & 0 & -\delta_{n2}^* & \cdots & 0 & -\delta_{nn}^* \\ -\beta_n & \alpha_n & -\delta_{n2} & 0 & \cdots & -\delta_{nn} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ R_1 \\ \vdots \\ 0 \\ R_k \\ \vdots \\ 0 \\ R_n \end{pmatrix}, \tag{34}
$$

где, как уже отмечалось, элементы матрицы переноса выражаются через амплитуды прохождения $T_m$ и отражения $R_m$ по формулам (33а) и (33б).

В конце отметим, что выполняются следующие соотношения:

$$
\sum_{k=1}^{n} \left|\alpha_k\right|^2 = \frac{1}{\left|T\right|^2}, \quad \sum_{k=1}^{n} \left|\beta_{km}\right|^2 = \frac{\left|R\right|^2}{\left|T\right|^2},
$$

и, следовательно, согласно (25), имеем

$$
\sum_{k=1}^{n} \left( \left|\alpha_k\right|^2 - \sum_{m=2}^{n} \left|\beta_{km}\right|^2 \right) = 1. \tag{35}
$$

Заметим также, что элементы матрицы переноса $\beta_{km}$ выражаются через $\alpha_k$ и $R_m$ соотношением $\beta_{km} = \alpha_k R_m$.

### 4. Разностное уравнение для элементов матрицы переноса

В конце рассмотрим задачу движения квантовой частицы по направлению $x$ в поле цепочки, состоящей из конечного числа рассеивающих центров. Пусть модельный потенциал рассматриваемой задачи имеет следующий вид:

$$
U(x, y) = \sum_{i=1}^{N} U_i\left(x - x_i, y\right), \tag{36}
$$

где $N$ – число рассеивателей цепочки, $U_i\left(x - x_i, y\right)$ – локализованные возле точек $x_i$ $\left(i = 1, 2, \ldots N\right)$, не перекрывающие друг друга функции. Если параметры $x_1,\ x_2,\ \ldots x_N$, характеризующие расположение рассеивателей в пространстве, удовлетворяют условию $x_i = x_1 + \left(i-1\right)b,$, то мы имеем цепочку из периодически расположенных рассеивателей. Если, наряду с этим, поля, создаваемые различными рассеивателями, идентичны, то цепочка состоит из периодически расположенных, идентичных потенциалов. Однако обсудим задачу в наиболее общем виде, когда рассеиватели не идентичны и периодичность их расположения отсутствует. Согласно методу матриц, развитому в разделе 3, можно записать

$$
\begin{pmatrix} T_{1N} \\ 0 \\ T_{2N} \\ 0 \\ \vdots \\ T_{nN} \\ 0 \end{pmatrix} = \prod_{i=N}^{1} \begin{pmatrix} \alpha_1^*(i) & -\beta_1^*(i) & 0 & -\delta_{12}^*(i) & \cdots & 0 & -\delta_{1n}^*(i) \\ -\beta_1(i) & \alpha_1(i) & -\delta_{12}(i) & 0 & \cdots & -\delta_{1n}(i) & 0 \\ \alpha_2^*(i) & -\beta_2^*(i) & 0 & -\delta_{22}^*(i) & \cdots & 0 & -\delta_{2n}^*(i) \\ -\beta_2(i) & \alpha_2(i) & -\delta_{22}(i) & 0 & \cdots & -\delta_{2n}(i) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n^*(i) & -\beta_n^*(i) & 0 & -\delta_{n2}^*(i) & \cdots & 0 & -\delta_{nn}^*(i) \\ -\beta_n(i) & \alpha_n(i) & -\delta_{n2}(i) & 0 & \cdots & -\delta_{nn}(i) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ R_{1N} \\ 0 \\ R_{2N} \\ \vdots \\ 0 \\ R_{nN} \end{pmatrix}, \quad (37)
$$

где $\alpha_k(i)$, $\beta_k(i)$ и $\delta_{k,m}(i)$ являются элементами матрицы переноса от $i$-ого рассеивателя цепочки при отсутствии в ней всех остальных рассеивателей. Заметим, что матрицы переноса, входящие в (37), коммутативны, когда рассеиватели в цепочке идентичны и расположены эквидистантно. Важно отметить, что фигурирующие в (37) элементы матрицы переноса должны быть вычислены с учетом местоположения рассеивателей.

Покажем, что задача определения амплитуд $T_{iN}$ и $R_{iN}$ многоканального рассеяния частицы может быть, в общем виде, сведена к решению системы $3n$ линейных разностных уравнений первого порядка, где $n$ – число каналов. Для этого введем матрицу переноса для всей цепочки:

$$
\begin{pmatrix} T_{1N} \\ 0 \\ T_{2N} \\ 0 \\ \vdots \\ T_{nN} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1^*(N) & -D_1^*(N) & 0 & -M_{12}^*(N) & \cdots & 0 & -M_{1n}^*(N) \\ -D_1(N) & S_1(N) & -M_{12}(N) & 0 & \cdots & -M_{1n}(N) & 0 \\ S_2^*(N) & -D_2^*(N) & 0 & -M_{22}^*(N) & \cdots & 0 & -M_{2n}^*(N) \\ -D_2(N) & S_2(N) & -M_{22}(N) & 0 & \cdots & -M_{2n}(N) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_n^*(N) & -D_n^*(N) & 0 & -M_{n2}^*(N) & \cdots & 0 & -M_{nn}^*(N) \\ -D_n(N) & S_n(N) & -M_{n2}(N) & 0 & \cdots & -M_{nn}(N) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ R_{1N} \\ 0 \\ R_{2N} \\ \vdots \\ 0 \\ R_{nN} \end{pmatrix}. \quad (38)
$$

Здесь для цепочки, состоящей из $N$ рассеивателей, использована матрица переноса, входящая в (27), введя вместо $\alpha_{ik}$ и $\beta_{ik}$ обозначения $S(N)$, $D(N)$ и $M(N)$. Сравнение (38) с (37) показывает, что матрица, входящая в (38), вычисляется как произведение матриц переноса для отдельных рассеивателей цепочки. Рассмотрим элементы матриц переноса $S_m(N)$, $D_m(N)$ и $M_{km}(N)$ как функции от дискретного параметра $N$, так что $S_m(N-1)$, $D_m(N-1)$ и $M_{km}(N-1)$ должны соответствовать элементам матрицы при прохождении частицы от первых $N-1$ потенциалов цепочки. Легко видеть, что между элементами матриц переноса всей цепочки и цепочки без последнего потенциала существует связь:

$$
\begin{pmatrix}
S_1^* & -D_1^* & \cdots & 0 & -M_{1n}^* \\
-D_1 & S_1 & \cdots & -M_{1n} & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
S_n^* & -D_n^* & \cdots & 0 & -M_{nn}^* \\
-D_n & S_n & \cdots & -M_{nn} & 0
\end{pmatrix}_N =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
\alpha_1^*(N) & -\beta_1^*(N) & \cdots & 0 & -\delta_{1n}^*(N) \\
-\beta_1(N) & \alpha_1(N) & \cdots & -\delta_{1n}(N) & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\alpha_n^*(N) & -\beta_n^*(N) & \cdots & 0 & -\delta_{nn}^*(N) \\
-\beta_n(N) & \alpha_n(N) & \cdots & -\delta_{nn}(N) & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
S_1^* & -D_1^* & \cdots & 0 & -M_{1n}^* \\
-D_1 & S_1 & \cdots & -M_{1n} & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
S_n^* & -D_n^* & \cdots & 0 & -M_{nn}^* \\
-D_n & S_n & \cdots & -M_{nn} & 0
\end{pmatrix}_{N-1}. \tag{39}
$$

Заметим, что закон сохранения плотности потока вероятности, записанный через величины *S*, *D* и *M*, имеет вид

$$
\sum_{m=1}^{n}\left(\left|S_m(N)\right|^2 - \left|D_m(N)\right|^2 - \sum_{k=1}^{n}\left|M_{mk}(N)\right|^2\right) = 1. \tag{40}
$$

Рассматривая в (39) $N$ как переменную величину, равенство (39) может быть представлено в виде следующей системы линейных разностных уравнений первого порядка:

$$
\begin{aligned}
&S_k(N) = \alpha_k(N)S_1(N-1) + \beta_k(N)D_1^*(N-1) + \sum_{m=2}^{n}\delta_{km}(N)D_m^*(N-1),\\
&D_k(N) = \alpha_k(N)D_1(N-1) + \beta_k(N)S_1^*(N-1) + \sum_{m=2}^{n}\delta_{km}(N)S_m^*(N-1),\\
&M_{km}(N) = \alpha_k(N)M_{1m}(N-1).
\end{aligned} \tag{41}
$$

Здесь $N \geq 1,$ а начальные условия имеют вид

$$
S_1(0) = 1,\ D_1(0) = 0,\ M_{1m}(0) = \delta_{1m}(1)/\alpha_1(1),\ \ S_m(0) = D_m(0) = 0,\ \ m \geq 1. \tag{42}
$$

Таким образом, система разностных уравнений (41) с начальными условиями (42) определяет амплитуды прохождения $T_m(N)$ и отражения $R_m(N)$ для системы потенциалов (36).

В конце преобразуем систему уравнений (41), используя формулы (33), записав их для последнего *N*-ого потенциала в виде

$$
\frac{\beta_k(N)}{\alpha_k(N)} = R_1(N), \quad \frac{\delta_{km}(N)}{\alpha_k(N)} = R_m(N). \tag{43}
$$

Подставляя их в систему уравнений (41), получим

$$S_k(N)=\alpha_k(N)\left[S_1(N-1)+R_1(N)D_1^*(N-1)+\sum_{m=2}^{n}R_m(N)D_m^*(N-1)\right],$$

$$D_k(N)=\alpha_k(N)\left[D_1(N-1)+R_1(N)S_1^*(N-1)+\sum_{m=2}^{n}R_m(N)S_m^*(N-1)\right], \quad (44)$$

$$M_{km}(N)=\alpha_k(N)M_{1m}(N-1).$$

Из системы уравнений (44) имеем

$$\frac{S_k(N)}{S_1(N)}=\frac{D_k(N)}{D_1(N)}=\frac{M_{km}(N)}{M_{1m}(N)}=\frac{\alpha_k(N)}{\alpha_1(N)}. \quad (45)$$

Это означает, что достаточно определить $S_1(N)$, $D_1(N)$ и $M_{1m}(N)$, и тогда неизвестные функции $S_k(N)$, $D_k(N)$ и $M_{km}(N)$ определятся из (45).

Напишем уравнения для определения $S_1(N)$, $D_1(N)$ и $M_{1m}(N)$. Они получаются из системы уравнений (44), если в них, используя формулы (45), заменить $S_k(N)$, $D_k(N)$ на $S_1(N)$, $D_1(N)$. Для $S_1(N)$ и $D_1(N)$ окончательно получим

$$\begin{aligned} S_1(N)&=\alpha_1(N)S_1(N-1)+\alpha_1(N)r_1(N)D_1^*(N-1),\\ D_1(N)&=\alpha_1(N)D_1(N-1)+\alpha_1(N)r_1(N)S_1^*(N-1), \end{aligned} \quad (46)$$

где

$$r_1(N)=R_1(N)\left[1+\sum_{m=2}^{n}\frac{R_m(N)T_m(N-1)}{R_1(N)T_1(N-1)}\right]. \quad (47)$$

Неизвестная функция $M_{1m}(N)$ определяется из уравнения

$$M_{1m}(N)=\alpha_1(N)M_{1m}(N-1), \quad (48)$$

которое входит в систему уравнений (41).

Отметим, что система уравнений (46) совпадает с системой уравнений, полученной для одномерной задачи рассеяния, только коэффициенты перед функциями $S_1(N-1)$ и $D_1(N-1)$ другие. Решение такой системы уравнений было исследовано в работах [4,5].

## ЛИТЕРАТУРА


1. **D.Boese, M.Lischka, L.E.Reichl**. Phys. Rev. B, **82**, 16933 (2000).
2. **Д.М.Седракян, Э.М.Казарян, Л.Р.Седракян.** Изв. НАН Армении, Физика, **44**, 395 (2009).
3. **Л.Р.Седракян.** Доклады НАН Армения, **109**, 214 (2009).
4. **Д.М.Седракян, А.Ж.Хачатрян.** Доклады НАН Армении, **98**, 301 (1998).
5. **Д.М.Седракян, Д.А.Бадалян, А.Ж.Хачатрян.** ФТТ, **41**, 1687 (1999).
6. **Д.М.Седракян.** Изв. НАН Армении, Физика, **45**, 39 (2010).
7. **А.Ж.Хачатрян, Д.М.Седракян, В.А.Хоецян.** Изв. НАН Армении, Физика, **44**, 133 (2009).

## ԲԱԶՄՈՒՂԻ ՑՐՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՏՐԱՆՍՖԵՐ-ՄԱՏՐԻՑԸ

Դ.Մ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ

Ստացված է բազմուղի ցրման խնդրի տրանսֆեր-մատրիցի տեսքը: Այդ մատրիցի էլե-մենտներն արտահայտված են անցման և անդրադարձման ամպլիտուդներով՝ սահմանված սկզբնական պայմանների դեպքում: Օգտագործելով տրանսֆեր-մատրիցը $N$ լոկալիզացված և չվերածածկվող ցրող կենտրոնների համար, ստացված են տարբերակային հավասարում-ներ մատրիցի էլեմենտների համար:

## TRANSFER-MATRIX FOR THE MULTICHANNEL SCATTERING PROBLEM

D.M. SEDRAKIAN

The transfer-matrix for the multichannel scattering problem is obtained. The elements of this matrix are expressed by means of transmission and reflection amplitudes. The transfer-matrix for $N$ localized and nonoverlapped scattering centers is presented. Recurrent equations for matrix elements are derived and initial conditions for them are defined.