

УДК 539.1

МАТРИЦА ПЕРЕНОСА ДЛЯ ЗАДАЧИ ДВУХКАНАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ

Д.М. СЕДРАКЯН

Ереванский государственный университет, Армения

(Поступила в редакцию 1 апреля 2009 г.)

Получен вид матрицы переноса для двухканальной задачи рассеяния. Элементы этой матрицы выражены через амплитуды прохождения T_1 и T_2 и отражения R_1 и R_2 . Построением матрицы для системы из N локализованных и не перекрывающихся центров получены разностные уравнения для элементов матрицы переноса с заданными начальными условиями.

1. Введение

В работах [1,2] сформулирована задача рассеяния квантовой частицы на двумерном потенциале $U(x, y)$. Показано, что уравнение Шредингера удобно представить в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi(x, y) + (\chi^2 - V(x, y)) \psi(x, y) = 0, \quad (1)$$

где введены обозначения

$$\frac{2m}{\hbar^2} E = \chi^2, \quad \frac{2m}{\hbar^2} U = V(x, y). \quad (2)$$

Решение уравнения (1) с граничными условиями $V(x, 0) = V(x, a) = \infty$ ищется в виде

$$\psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \varphi_n(y), \quad (3)$$

где $\varphi_n(y)$ есть решение уравнения

$$\frac{d^2 \varphi_n(y)}{dy^2} + \chi_n^2 \varphi_n(y) = 0 \quad (4)$$

с $\chi_n = \pi n/a$, $n = 1, 2, \dots$ и имеет вид

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a} ny\right). \quad (5)$$

Отметим, что решения (5) ортонормированы и, следовательно, удовлетворяют требованиям

$$\int_0^a \phi_m^*(y) \phi_n(y) dy = \delta_{m,n}. \quad (6)$$

Для нахождения искомых функций $\psi_n(x)$ получается система уравнений

$$\frac{d^2 \psi_n(x)}{dx^2} + \kappa_n^2 \psi_n(x) - \sum_{m=1}^{\infty} V_{m,n} \psi_m(x) = 0, \quad (7)$$

где $\kappa_n^2 = \chi^2 - \chi_n^2$. Фактически, частица в направлении y совершает колебательное движение с дискретной энергией $E_n = \hbar^2 \chi_n^2 / 2m$, а в направлении x она может рассеиваться на потенциале $V_{mn}(x)$.

Таким образом, в отличие от задач рассеяния в одномерном случае, двумерное рассеяние при такой постановке задачи сводится к одномерному-много-канальному рассеянию. В общем случае число каналов бесконечно. Однако, если потенциал возбуждения частицы из основного канала в следующий канал мал или это возбуждение невозможно по энергетическим соображениям, то можно рассмотрение ограничить конечным числом каналов. Рассмотрим случай, когда $n=2$ и, следовательно, индекс m может принимать два значения: $m=1, 2$. Искомые функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ будут удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + k_1^2 \psi_1 - V_{11}(x) \psi_1(x) - V_{12} \psi_2(x) &= 0, \\ \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} + k_2^2 \psi_2 - V_{22}(x) \psi_2(x) - V_{21} \psi_1(x) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} V_{11}(x) &= 2 \int_0^1 V(x, at) \sin^2(\pi t) dt, \\ V_{22}(x) &= 2 \int_0^1 V(x, at) \sin^2(2\pi t) dt, \\ V_{12}(x) &= V_{21}(x) = 2 \int_0^1 V(x, at) \sin(\pi t) \sin(2\pi t) dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Как показано в [2], решение системы уравнений (8) и (9) приводит к нахождению амплитуд рассеяния по двум каналам, т.е. к нахождению T_1 , T_2 , R_1 и R_2 . В частности, в этой работе предложен метод для нахождения этих величин в зависимости от вида потенциала $V(x, y)$ и толщины рассеивающего слоя.

Как показано в работах [3-5], при изучении одномерных задач рассеяния на системе N неперекрывающихся потенциалов важную роль играет матрица

переноса. Эта матрица связывает амплитуды отражения R_N с амплитудами прохождения T_N . Важно, что, согласно методу матрицы переноса, элементы этой матрицы выражаются через величины R_N и T_N . Знание этой матрицы позволяет найти рекуррентные соотношения между элементами матрицы, которые составляют основную систему алгебраических разностных уравнений для решения задач рассеяния частицы на системе потенциалов, состоящих из N звеньев [3]. Эти уравнения могут быть основой для изучения локализации частицы при прохождении системы потенциалов, не обладающей высокой степенью периодичности [5].

Целью настоящей работы было получить матрицу переноса при двухканальном рассеянии квантовой частицы. Это означает найти матрицу, которая связывает амплитуды отражения R_1 и R_2 с амплитудами прохождения T_1 и T_2 , соответствующими рассеянию с импульсами $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$. В разделе 2 получена матрица переноса для двухканального рассеяния, элементы которой выражаются в разделе 3 через амплитуды рассеяния T_1 , T_2 , R_1 и R_2 . В последнем разделе получены разностные уравнения для элементов матрицы переноса. Показано, что задача двухканального рассеяния в случае N потенциалов сводится к решению системы уравнений, исследованных в задачах одномерного рассеяния [3,5].

2. Общие решения уравнений (8) и матрица переноса

Предположим, что потенциал $V(x, y)$ имеет произвольный вид вдоль оси y и отличен от нуля только в интервале $x_1 \leq x \leq x_2$. Общие решения уравнений (8) в интервалах $x \leq x_1$ и $x \geq x_2$ можно написать в следующем виде:

$$\psi_{1i} = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}, \quad \psi_{2i} = C_1 e^{ik_2 x} + D_1 e^{-ik_2 x} \quad \text{при } x \leq x_1 \quad (10)$$

и

$$\psi_{1f} = A_2 e^{ik_1 x} + B_2 e^{-ik_1 x}, \quad \psi_{2f} = C_2 e^{ik_2 x} + D_2 e^{-ik_2 x} \quad \text{при } x \geq x_2. \quad (11)$$

Решение этой системы уравнений в области $x_1 \leq x \leq x_2$ будем искать в следующем виде:

$$\psi_1 = a_1 e^{ik_1 x} - b_1 e^{-ik_1 x}, \quad \psi_2 = a_2 e^{ik_2 x} - b_2 e^{-ik_2 x}, \quad (12)$$

где $a_1(x)$, $b_1(x)$, $a_2(x)$ и $b_2(x)$ – неизвестные функции от x , которые удовлетворяют условию

$$\frac{da_i(x)}{dx} = \frac{db_i(x)}{dx} e^{-2ik_i x}, \quad i = 1, 2. \quad (13)$$

Такой выбор функций $a_i(x)$ и $b_i(x)$ означает, что независимо от вида потенциалов $V_{ik}(x)$, функции $\psi_i(x)$ и их первые производные по x будут непрерывными функциями от x , если только потребовать непрерывность функции $\psi_i(x)$ [6]. Поэтому при сшивке решений уравнений (8) на границах

потенциала x_1 и x_2 достаточно потребовать непрерывность функций $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ в этих точках. Прежде чем перейти к сшивке этих решений, заметим, что, если ψ_1 и ψ_2 , выражающиеся формулами (12), являются решениями уравнений (8), то другой линейно-независимой парой решений будут их комплексно-сопряженные решения. Общее решение этих уравнений легко получить, если решения (12) умножить на L_1 , а их комплексно-сопряженные – на L_2 и сложить. Здесь L_1 и L_2 – произвольные постоянные, которые далее определяются из условий сшивки. Полученное общее решение представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= [L_1 a_1(x) - L_2 b_1^*(x)] e^{ik_1 x} + [L_2 a_1^*(x) - L_1 b_1(x)] e^{-ik_1 x}, \\ \psi_2 &= [L_1 a_2(x) - L_2 b_2^*(x)] e^{ik_2 x} + [L_2 a_2^*(x) - L_1 b_2(x)] e^{-ik_2 x}, \text{ при } x_1 \leq x \leq x_2.\end{aligned}\quad (14)$$

Непрерывность функций ψ_1 и ψ_2 на границе $x = x_1$ приведет к следующим уравнениям:

$$A_1 = L_1 a_1(x_1) - L_2 b_1^*(x_1), \quad B_1 = L_2 a_1^*(x_1) - L_1 b_1(x_1), \quad (15a)$$

$$C_1 = L_1 a_2(x_1) - L_2 b_2^*(x_1), \quad D_1 = L_2 a_2^*(x_1) - L_1 b_2(x_1). \quad (15b)$$

Уравнения (15a) и (15b) дают возможность выразить постоянные L_1 и L_2 через A_1 , B_1 , C_1 и D_1 и значения a_1 , b_1 , a_2 и b_2 и их комплексно-сопряженные величины в точке x_1 . Выражения для постоянных L_1 и L_2 можно записать в виде

$$\begin{aligned}L_1 &= \frac{A_1 a_1^*(x_1) + B_1 b_1^*(x_1)}{\Delta_1} = \frac{C_1 a_2^*(x_1) + D_1 b_2^*(x_1)}{\Delta_2}, \\ L_2 &= \frac{A_1 b_1(x_1) + B_1 a_1(x_1)}{\Delta_1} = \frac{C_1 b_2(x_1) + D_1 a_2(x_1)}{\Delta_2},\end{aligned}\quad (16)$$

где

$$\Delta_1 = |a_1(x_1)|^2 - |b_1(x_1)|^2, \quad \Delta_2 = |a_2(x_1)|^2 - |b_2(x_1)|^2.$$

Используя решения (15) для L_1 и L_2 , можно для них получить более удобные выражения:

$$\begin{aligned}L_1 &= \frac{A_1 a_1^*(x_1) + B_1 b_1^*(x_1) + C_1 a_2^*(x_1) + D_1 b_2^*(x_1)}{\Delta_1 + \Delta_2}, \\ L_2 &= \frac{A_1 b_1(x_1) + B_1 a_1(x_1) + C_1 b_2(x_1) + D_1 a_2(x_1)}{\Delta_1 + \Delta_2}.\end{aligned}\quad (17)$$

Удобство выражений (17) заключается в том, что при определенной нормировке функций a_2 и b_2 можно добиться условия $\Delta_1 + \Delta_2 = 1$.

Теперь перейдем к сшивке решений ψ_1 и ψ_2 на другом конце потенциала: $x = x_2$. Условие их непрерывности дает:

$$A_2 = L_1 a_1(x_2) - L_2 b_1^*(x_2), \quad B_2 = L_2 a_1^*(x_2) - L_1 b_1(x_2), \quad (18a)$$

$$C_2 = L_1 a_2(x_2) - L_2 b_2^*(x_2), \quad D_2 = L_2 a_2^*(x_2) - L_1 b_2(x_2). \quad (18б)$$

Подставляя L_1 и L_2 из решений (17) в уравнение (18a), можно найти выражения, связывающие постоянные A_2 и B_2 с A_1 , B_1 , C_1 и D_1 . В частности, получим

$$\begin{aligned} A_2 &= \alpha_1^* A_1 - \beta_1^* B_1 + \gamma_1^* C_1 - \delta_1^* D_1, \\ B_2 &= -\beta_1 A_1 + \alpha_1 B_1 - \delta_1 C_1 + \gamma_1 D_1, \end{aligned} \quad (19)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha_1(x_1, x_2) &= [a_1(x_1) a_1^*(x_2) - b_1^*(x_1) b_1(x_2)] / (\Delta_1 + \Delta_2), \\ \beta_1(x_1, x_2) &= [a_1^*(x_1) b_1(x_2) - b_1(x_1) a_1^*(x_2)] / (\Delta_1 + \Delta_2), \\ \gamma_1(x_1, x_2) &= [a_2(x_1) a_1^*(x_2) - b_2^*(x_1) b_1(x_2)] / (\Delta_1 + \Delta_2), \\ \delta_1(x_1, x_2) &= [a_2^*(x_1) b_1(x_2) - b_2(x_1) a_1^*(x_2)] / (\Delta_1 + \Delta_2). \end{aligned} \quad (20)$$

Из уравнений (18б) находим

$$\begin{aligned} C_2 &= \alpha_2^* A_1 - \beta_2^* B_1 + \gamma_2^* C_1 - \delta_2^* D_1, \\ B_2 &= -\beta_2 A_1 + \alpha_2 B_1 - \delta_2 C_1 + \gamma_2 D_1, \end{aligned} \quad (21)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \alpha_2(x_1, x_2) &= [a_1(x_1) a_2^*(x_2) - b_1^*(x_1) b_2(x_2)] / (\Delta_1 + \Delta_2), \\ \beta_2(x_1, x_2) &= [a_1^*(x_1) b_2(x_2) - b_1(x_1) a_2^*(x_2)] / (\Delta_1 + \Delta_2), \\ \gamma_2(x_1, x_2) &= [a_2(x_1) a_2^*(x_2) - b_2^*(x_1) b_2(x_2)] / (\Delta_1 + \Delta_2), \\ \delta_2(x_1, x_2) &= [a_2^*(x_1) b_2(x_2) - b_2(x_1) a_2^*(x_2)] / (\Delta_1 + \Delta_2). \end{aligned} \quad (22)$$

Полученные уравнения (19) и (21), связывающие начальные амплитуды A_1 , B_1 , C_1 и D_1 с конечными амплитудами A_2 , B_2 , C_2 и D_2 , можно представить в виде матрицы переноса:

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^* & -\beta_1^* & \gamma_1^* & -\delta_1^* \\ -\beta_1 & \alpha_1 & -\delta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2^* & -\beta_2^* & \gamma_2^* & -\delta_2^* \\ -\beta_2 & \alpha_2 & -\delta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

В случае отсутствия потенциала возбуждения ($V_{12}(x) = 0$), решение $\psi_2 = 0$ и, следовательно, равны нулю также a_2 и b_2 . Легко видеть, что равняются нулю

также элементы матрицы переноса $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = \delta_2 = \delta_1 = \gamma_1 = 0$. Тогда матрица, входящая в (23), переходит в матрицу переноса для одномерной задачи рассеяния [6].

3. Выражение матрицы переноса через амплитуды прохождения и отражения

Предположим, что частица с импульсом $\mathbf{k}_1$ падает на потенциал $V(x, y)$. Взаимодействуя с ним, не меняя импульс $\mathbf{k}_1$ и проходя через потенциал толщиной $z = x_2 - x_1$, она может выйти с амплитудой T_1 или отразиться с амплитудой R_1 . Одновременно с определенной вероятностью частица может, меняя импульс на $\mathbf{k}_2$, пройти потенциал с амплитудой T_2 или отразиться с амплитудой R_2 . Мы здесь предполагаем, что переходы частицы на другие состояния с $\mathbf{k}_i$ ($i = 3, 4, \dots$) не происходят и, следовательно, пренебрегаем рассеянием по этим каналам. В случае двухканального рассеяния вероятность прохождения частицы через потенциал имеет вид

$$|T|^2 = |T_1|^2 + |T_2|^2. \quad (24)$$

Можно рассмотреть также величину $|R|^2 = |R_1|^2 + |R_2|^2$, которая есть полная вероятность отражения и связана с $|T|^2$ следующей формулой:

$$|R|^2 = 1 - |T|^2. \quad (25)$$

Это условие вытекает из закона сохранения плотности потока вероятности, который имеет вид

$$|T_1|^2 + |T_2|^2 + |R_1|^2 + |R_2|^2 = 1. \quad (26)$$

При рассмотренной нами постановке задачи постоянные A_1, B_1, C_1, D_1 и A_2, B_2, C_2, D_2 связаны с амплитудами рассеяния T_1, T_2, R_1 и R_2 следующими формулами:

$$A_1 = 1, \quad B_1 = R_1, \quad C_1 = 0 \quad \text{и} \quad D_1 = R_2,$$

тогда как

$$A_2 = T_1, \quad B_2 = 0, \quad C_2 = T_2 \quad \text{и} \quad D_2 = 0.$$

Для обеспечения такого перехода легко увидеть, что элементы матрицы переноса γ_1 и γ_2 должны равняться нулю. Тогда окончательно имеем:

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ 0 \\ T_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^* & -\beta_1^* & 0 & -\delta_1^* \\ -\beta_1 & \alpha_1 & -\delta_1 & 0 \\ \alpha_2^* & -\beta_2^* & 0 & -\delta_2^* \\ -\beta_2 & \alpha_2 & -\delta_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ R_1 \\ 0 \\ R_2 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Теперь выразим α_1 , β_1 , α_2 , β_2 , δ_1 и δ_2 через величины T_1 , T_2 , R_1 и R_2 . Раскрывая матрицу (27), получим:

$$T_1 = \alpha_1^* - \beta_1^* R_1 - \delta_1^* R_2, \quad (28a)$$

$$0 = -\beta_1 + \alpha_1 R_1, \quad (28б)$$

$$T_2 = \alpha_2^* - \beta_2^* R_1 - \delta_2^* R_2, \quad (28в)$$

$$0 = -\beta_2 + \alpha_2 R_1. \quad (28г)$$

Уравнения (28б) и (28г) сразу дают

$$\beta_1/\alpha_1 = \beta_2/\alpha_2 = R_1. \quad (29)$$

Подставляя (29) в уравнения (28а) и (28в), получим

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\alpha_1^*}{T_1} (1 - |R_1|^2) - \frac{\delta_1^*}{T_1} R_2, \\ 1 &= \frac{\alpha_2^*}{T_2} (1 - |R_1|^2) - \frac{\delta_2^*}{T_2} R_2. \end{aligned} \quad (30)$$

Так как оба эти уравнения должны переходить в (26), записанное в виде

$$1 = \frac{1}{|T|^2} (1 - |R_1|^2) - \frac{|R_2|^2}{|T|^2},$$

то должны иметь место соотношения

$$\frac{\alpha_1^*}{T_1} = \frac{\alpha_2^*}{T_2} = \frac{1}{|T|^2}, \quad \frac{\delta_1^*}{T_1} = \frac{\delta_2^*}{T_2} = \frac{R_2^*}{|T|^2}. \quad (31)$$

Формулы (29) и (31) однозначно определяют элементы матрицы переноса через амплитуды рассеяния T_1 , T_2 , R_1 и R_2 :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{T_1} \left| \frac{T_1}{T} \right|^2, \quad \alpha_2 = \frac{1}{T_2} \left| \frac{T_2}{T} \right|^2, \quad \beta_1 = \frac{R_1}{T_1} \left| \frac{T_1}{T} \right|^2, \\ \beta_2 &= \frac{R_1}{T_2} \left| \frac{T_2}{T} \right|^2, \quad \delta_1 = \frac{R_2}{T_1} \left| \frac{T_1}{T} \right|^2, \quad \delta_2 = \frac{R_2}{T_2} \left| \frac{T_2}{T} \right|^2. \end{aligned} \quad (32)$$

Легко видеть, что выполняются следующие соотношения:

$$|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = \frac{1}{|T|^2}, \quad |\beta_1|^2 + |\beta_2|^2 + |\delta_1|^2 + |\delta_2|^2 = \frac{|R|^2}{|T|^2},$$

и, следовательно,

$$|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 - |\beta_1|^2 - |\beta_2|^2 - |\delta_1|^2 - |\delta_2|^2 = 1. \quad (33)$$

Отметим, что из шести элементов матрицы переноса $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \delta_1$ и δ_2 независимы только четыре, так как между ними имеются две связи: (29) и вытекающее из (32) соотношение

$$\delta_1/\alpha_1 = \delta_2/\alpha_2 = R_2. \quad (34)$$

Это согласуется с постановкой задачи, где неизвестными являются четыре амплитуды T_1, T_2, R_1 и R_2 .

4. Разностное уравнение для элементов матрицы переноса

В конце рассмотрим задачу движения квантовой частицы по направлению x в поле цепочки, состоящей из конечного числа рассеивающих центров. Пусть модельный потенциал рассматриваемой задачи имеет следующий вид:

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^N U_n(x - x_n, y), \quad (35)$$

где N – число рассеивателей цепочки, $U_n(x - x_n, y)$ – локализованные возле точек x_n ($n=1, 2, \dots, N$), не перекрывающие друг друга функции. Если параметры $x_1, x_2, \dots, x_N$, характеризующие расположение рассеивателей в пространстве, удовлетворяют условию $x_n = x_1 + (n-1)b$, то мы имеем цепочку из периодически расположенных рассеивателей. Если, наряду с этим, поля, создаваемые различными рассеивателями, идентичны, то цепочка состоит из периодически расположенных, идентичных потенциалов. Однако обсудим задачу в наиболее общем виде, когда рассеиватели не идентичны и периодичность их расположения отсутствует. Согласно методу, развитому в разделе 3, можно записать

$$\begin{pmatrix} T_{1N} \\ 0 \\ T_{2N} \\ 0 \end{pmatrix} = \prod_{n=1}^N \begin{pmatrix} \alpha_1^*(n) & -\beta_1^*(n) & 0 & -\delta_1^*(n) \\ -\beta_1(n) & \alpha_1(n) & -\delta_1(n) & 0 \\ \alpha_2^*(n) & -\beta_2^*(n) & 0 & -\delta_2^*(n) \\ -\beta_2(n) & \alpha_2(n) & -\delta_2(n) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ R_{1N} \\ 0 \\ R_{2N} \end{pmatrix}, \quad (36)$$

где $\alpha_{1,2}(n)$, $\beta_{1,2}(n)$ и $\delta_{1,2}(n)$ являются элементами матрицы переноса от n -ого рассеивателя цепочки при отсутствии в ней всех остальных рассеивателей. Заметим, что матрицы (36) коммутативны, когда рассеиватели в цепочке идентичны и расположены эквидистантно. Важно отметить, что фигурирующие в (36) элементы матрицы переноса должны быть вычислены с учетом местоположения рассеивателей.

Покажем, что задача определения T_{1N}, T_{2N}, R_{1N} и R_{2N} амплитуд двухканального рассеяния частицы может быть, в общем виде, сведена к решению системы четырех линейных разностных уравнений первого порядка. Для этого введем матрицу переноса для всей цепочки:

$$\begin{pmatrix} T_{1N} \\ 0 \\ T_{2N} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1^*(N) & -D_1^*(N) & 0 & -M_1^*(N) \\ -D_1(N) & S_1(N) & -M_1(N) & 0 \\ S_2^*(N) & -D_2^*(N) & 0 & -M_2^*(N) \\ -D_2(N) & S_2(N) & -M_2(N) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ R_{1N} \\ 0 \\ R_{2N} \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Здесь для цепочки, состоящей из N рассеивателей, использована матрица переноса (27), где вместо α, β, γ введены обозначения $S(N)$, $D(N)$ и $M(N)$. Сравнение (37) с (36) показывает, что матрица, входящая в (37), вычисляется как произведение матриц переноса для отдельных рассеивателей цепочки. Рассмотрим элементы матриц переноса $S_{1,2}(N)$, $D_{1,2}(N)$ и $M_{1,2}(N)$ как функции от дискретного параметра N , так что $S_{1,2}(N-1)$, $D_{1,2}(N-1)$ и $M_{1,2}(N-1)$ должны соответствовать элементам матрицы при прохождении частицы от первых $N-1$ потенциалов цепочки. Легко видеть, что между элементами матриц переноса всей цепочки и цепочки без последнего потенциала существует связь:

$$\begin{pmatrix} S_1^* & -D_1^* & 0 & -M_1^* \\ -D_1 & S_1 & -M_1 & 0 \\ S_2^* & -D_2^* & 0 & -M_2^* \\ -D_2 & S_2 & -M_2 & 0 \end{pmatrix}_N = \begin{pmatrix} \alpha_1^*(N) & -\beta_1^*(N) & 0 & -\delta_1^*(N) \\ -\beta_1(N) & \alpha_1(N) & -\delta_1(N) & 0 \\ \alpha_2^*(N) & -\beta_2^*(N) & 0 & -\delta_2^*(N) \\ -\beta_2(N) & \alpha_2(N) & -\delta_2(N) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^* & -D_1^* & 0 & -M_1^* \\ -D_1 & S_1 & -M_1 & 0 \\ S_2^* & -D_2^* & 0 & -M_2^* \\ -D_2 & S_2 & -M_2 & 0 \end{pmatrix}_{N-1}. \quad (38)$$

Заметим, что закон сохранения плотности потока вероятности, записанный через величины S , D и M , имеет вид

$$|S_1(N)|^2 + |S_2(N)|^2 - |D_1(N)|^2 - |D_2(N)|^2 - |M_1(N)|^2 - |M_2(N)|^2 = 1. \quad (39)$$

Рассматривая в (38) N как переменную величину, равенство (38) может быть представлено в виде следующей системы линейных разностных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} S_1(N) &= \alpha_1(N)S_1(N-1) + \beta_1(N)D_1^*(N-1) + \delta_1(N)D_2^*(N-1), \\ D_1(N) &= \alpha_1(N)D_1(N-1) + \beta_1(N)S_1^*(N-1) + \delta_1(N)S_2^*(N-1), \\ S_2(N) &= \alpha_2(N)S_1(N-1) + \beta_2(N)D_1^*(N-1) + \delta_2(N)D_2^*(N-1), \\ D_2(N) &= \alpha_2(N)D_1(N-1) + \beta_2(N)S_1^*(N-1) + \delta_2(N)S_2^*(N-1), \\ M_1(N) &= \alpha_1(N)M_1(N-1), \quad M_2(N) = \alpha_2(N)M_1(N-1). \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь $N \geq 1$, а начальные условия имеют вид

$$S_1(0)=1, \quad M_1(0)=\delta_1(1)/\alpha_1(1), \quad S_2(0)=D_1(0)=D_2(0)=0. \quad (41)$$

Отметим также, что из равенства (38) можно получить уравнение

$$\beta_2^* M_1(N-1) = \delta_2^* M_2(N-1). \quad (42)$$

Это означает, что разностное уравнение для элемента матрицы $M_2(N)$ можно написать также в виде

$$M_2(N) = \frac{\alpha_2(N)\delta_2^*(N)}{\beta_2^*(N)} M_2(N-1). \quad (43)$$

Таким образом, система разностных уравнений (40) с начальными условиями (41) определяет амплитуды прохождения $T_1(N)$, $T_2(N)$ и отражения $R_1(N)$, $R_2(N)$ для системы потенциалов (35).

В конце преобразуем систему уравнений (40), используя формулы (29) и (34), записав их для последнего N -ого потенциала в форме

$$\frac{\beta_1(N)}{\alpha_1(N)} = \frac{\beta_2(N)}{\alpha_2(N)} = r_1(N), \quad \frac{\delta_1(N)}{\alpha_1(N)} = \frac{\delta_2(N)}{\alpha_2(N)} = r_2(N). \quad (44)$$

Подставляя их в систему уравнений (40), получим

$$\begin{aligned} S_1(N) &= \alpha_1(N) [S_1(N-1) + r_1(N) D_1^*(N-1) + r_2(N) D_2^*(N-1)], \\ S_2(N) &= \alpha_2(N) [S_1(N-1) + r_1(N) D_1^*(N-1) + r_2(N) D_2^*(N-1)], \\ D_1(N) &= \alpha_1(N) [D_1(N-1) + r_1(N) S_1^*(N-1) + r_2(N) S_2^*(N-1)], \\ D_2(N) &= \alpha_2(N) [D_1(N-1) + r_1(N) S_1^*(N-1) + r_2(N) S_2^*(N-1)]. \end{aligned} \quad (45)$$

Из системы уравнений (45) и последних двух уравнений (40) имеем

$$\frac{S_2(N)}{S_1(N)} = \frac{D_2(N)}{D_1(N)} = \frac{M_2(N)}{M_1(N)} = \frac{\alpha_2(N)}{\alpha_1(N)}. \quad (46)$$

Это означает, что достаточно определить $S_1(N)$, $D_1(N)$ и $M_1(N)$, и неизвестные функции $S_2(N)$, $D_2(N)$ и $M_2(N)$ определяются из (46).

Напишем уравнения для определения $S_1(N)$ и $D_1(N)$. Они получаются из системы уравнений (45), если в них, используя формулы (46), заменить $S_2(N)$, $D_2(N)$ на $S_1(N)$, $D_1(N)$. Окончательно получим

$$\begin{aligned} S_1(N) &= \alpha_1(N) S_1(N-1) + \varepsilon_1(N) D_1^*(N-1), \\ D_1(N) &= \alpha_1(N) D_1(N-1) + \varepsilon_1(N) S_1^*(N-1), \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$\varepsilon_1(N) = r_1(N) + r_2(N) \alpha_2^*(N) / \alpha_1^*(N). \quad (48)$$

Неизвестная функция $M_1(N)$ определяется из уравнения

$$M_1(N) = \alpha_1(N) M_1(N-1), \quad (49)$$

которое входит в систему уравнений (40).

Отметим, что система уравнений (47) совпадает с системой уравнений, полученной для одномерной задачи рассеяния, только коэффициенты перед функциями $S_1(N-1)$ и $D_1(N-1)$ другие. Отметим, что решение такой системы уравнений исследовано в [3,5].

ЛИТЕРАТУРА

1. **D.Boese, M.Lischka, L.E.Reichl.** Phys. Rev. B, **82**, 16933 (2000).
2. **Д.М.Седракий, Э.М.Казарян, Л.Р.Седракий.** Метод погружения для многоканальной задачи рассеяния. Изв. НАН Армении, Физика, **44**, 395 (2009).
3. **Д.М.Седракий, А.Ж.Хачатрян.** Доклады НАН Армении, **98**, 301 (1998).
4. **Д.М.Седракий, А.Ж.Хачатрян, Э.М.Казарян, Л.Р.Седракий.** Изв. НАН Армении, Физика, **44**, 167 (2009).
5. **Д.М.Седракий, Д.А.Бадалян, А.Ж.Хачатрян.** ФТТ, **41**, 1687 (1999).
6. **А.Ж.Хачатрян, Д.М.Седракий, В.А.Хоецян.** Изв. НАН Армении, Физика, **44**, 133 (2009).

ԵՐԿՈՒՂԻ ՑՐՄԱՆ ԽՆԴԻ ՏՐԱՆՍՖԵՐ ՄԱՏՐԻՑԸ

Դ.Մ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ

Ստացված է երկուղի ցրման խնդրի տրանսֆեր-մատրիցի տեսքը: Այդ մատրիցի էլեմենտներն արտահայտված են անցման T_1 , T_2 և անդրադարձման R_1 և R_2 ամպլիտուդներով՝ սահմանված սկզբնական պայմանների դեպքում: Գրելով տրանսֆեր-մատրիցը N լոկալիզացված և չվերաձևվող ցրող կենտրոնների համար, ստացված են տարբերակային հավասարումներ մատրիցի էլեմենտների համար:

TRANSFER-MATRIX FOR THE TWO-CHANNEL SCATTERING PROBLEM

D.M. SEDRAKIAN

The transfer-matrix for the two-channel scattering problem is obtained. The elements of this matrix are expressed by means of transmission T_1 , T_2 and reflection R_1 , R_2 amplitudes. The transfer-matrix for N localized and nonoverlapping scattering centers is presented. Recurrent equations for matrix elements are derived and initial conditions for them are defined.