

УДК 535.14

КВАНТОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ

Т.В. ГЕВОРГЯН

Институт физических исследований НАН Армении, Аштарак

(Поступила в редакцию 17 июня 2009 г.)

Принцип эргодичности квантовой теории использован для разработки нового метода численного моделирования функции Вигнера для открытых, диссипативных квантовых систем. С этой целью матрица плотности квантовой системы представлена в виде усреднения по ансамблю квантовых состояний временных интервалов вместо усреднения по ансамблю стохастических переменных. Показано, что такой подход приводит к новым приближенным выражениям для квантовых распределений в фазовом пространстве, в частности, функций Вигнера для систем, локализованных в области классических фазовых траекторий. В качестве приложения вычислены функции Вигнера для процесса внутривибрационной генерации второй гармоники в области бифуркаций Хопфа.

1. Введение

Квантовые открытые системы, т.е. системы, которые взаимодействуют с резервуаром, как правило, описываются с помощью матрицы плотности, но не в рамках уравнения Шредингера для вектора состояния. Основным уравнением в таком подходе является уравнение для редуцированной матрицы плотности $\rho(t)$, т.е. матрицы плотности открытой системы, которая усреднена по переменным резервуара. В марковском приближении такое уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \sum_i \left(L_i \rho L_i^\dagger - \frac{1}{2} L_i^\dagger L_i \rho - \frac{1}{2} \rho L_i^\dagger L_i \right), \quad (1)$$

где H является гамильтонианом системы и L_i представляют операторы Линдблада для каждой моды i , которые описывают взаимодействие системы с резервуаром. В большинстве случаев не удается найти аналитические решения уравнения (1), и поэтому используются численные методы. Обычно, при численных вычислениях матрица плотности записывается через базисные квантовые состояния в гильбертовом пространстве. При решении большинства квантово-механических проблем мы вынуждены оперировать с большим числом базисных состояний. В таких случаях очень эффективным оказывается

представление матрицы плотности в форме статистического среднего по ансамблю квантовых траекторий:

$$\rho(t) = M \left(|\Psi_{\xi}(t)\rangle\langle\Psi_{\xi}(t)| \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\xi=0}^N |\Psi_{\xi}(t)\rangle\langle\Psi_{\xi}(t)|, \quad (2)$$

где состояние $|\Psi_{\xi}(t)\rangle$ удовлетворяет так называемому стохастическому уравнению Шредингера [1,2] и ξ – стохастическая переменная (метод диффузии квантового состояния, ДКС-метод). При таком подходе динамика квантовой системы в присутствии диссипативных эффектов представляется через эволюцию состояний вдоль “квантовых траекторий”. Как известно, метод ДКС является очень эффективным численным методом исследования открытых квантовых систем. В работе [3] метод ДКС был сформулирован таким образом, чтобы усреднение по ансамблю стохастических переменных заменить усреднением по временным интервалам на основе принципа эргодичности квантовой теории. При таком подходе выражение (2) представляется в виде суммирования по ансамблю квантовых состояний временных интервалов следующим образом:

$$\rho(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N |\Psi_{\xi}(t+t_n)\rangle\langle\Psi_{\xi}(t+t_n)|. \quad (3)$$

Здесь $|\Psi_{\xi}(t+t_n)\rangle$ – ансамбль состояний, полученный из произвольной квантовой траектории для случайной последовательности временных интервалов, которые для определенности представлены в виде возрастающей последовательности $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Как было показано в [3], такой численный метод является эффективным при исследовании квантовых систем для временных интервалов, превышающих время диссипации. С этой целью, в этой работе были исследованы средние числа фотонов для двух процессов: генерации второй гармоники и параметрического рассеяния или вниз-конверсии в резонаторе. В настоящей работе показано, что данный подход может быть сформулирован не только для вычисления средних значений, но и для вычисления квантовых распределений, в частности, функции Вигнера, которая является распределением координаты и импульса произвольной квантовой системы в фазовом пространстве. Такой подход оказывается намного более экономичным в компьютерных вычислениях, как с точки зрения объема записи данных, так и компьютерного времени вычислений. Более того, как показано в настоящей работе, если взаимодействие квантовой системы с резервуаром является достаточно сильным, чтобы привести к эффекту локализации динамических переменных системы, то такой подход позволяет получить новые результаты для функции Вигнера в простой аналитической форме через классические фазовые траектории системы.

2. Выражения для функций Вигнера через фазовые траектории

Известно несколько представлений для функций Вигнера (см., напр., [4]). Здесь используется следующая формула:

$$W(\alpha) = 2e^{-2|\alpha|^2} \int \frac{d^2\beta}{\pi} \langle -\beta | \rho | \beta \rangle e^{-2(\beta\alpha^* - \beta^*\alpha)}, \quad (4)$$

где α, β – комплексные переменные в фазовом пространстве: $x = \text{Re } \alpha$, $y = \text{Im } \alpha$; ρ – матрица плотности и $|\beta\rangle$ – когерентное состояние. Для случая произвольного когерентного состояния $|\alpha_0\rangle$ матрица плотности равна $\rho = |\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|$ и для соответствующей функции Вигнера получаем гауссовское распределение в фазовом пространстве:

$$W_{\alpha_0}(\alpha) = 2 \exp(-2|\alpha - \alpha_0|^2). \quad (5)$$

Перейдем теперь к получению выражений для общего случая с матрицей плотности в форме (3). Будем различать два случая – системы с независимым от времени гамильтонианом и системы с гамильтонианом, периодическим по времени.

2.1. Стационарный случай

Для этого случая, как показано в работе [3], матрица плотности имеет вид

$$\rho(t) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |\Psi_{\xi}(t+\tau)\rangle\langle\Psi_{\xi}(t+\tau)| d\tau, \quad (6)$$

где T – интервал временного усреднения. Подставляя выражение (6) в формулу (4), легко получить результат для функции Вигнера, которая удобна для численных вычислений. Тем не менее, нетрудно получить простой аналитический результат для случая, когда в системе имеет место локализация в фазовом пространстве в окрестности соответствующих когерентных состояний. Для этого рассмотрим формулу (4) с матрицей плотности в представлении (6). В низшем приближении вектор состояния $|\Psi_{\xi}(t)\rangle$ рассмотрим как когерентное состояние $|\beta(t)\rangle$. В этом приближении получается следующее выражение для функции Вигнера:

$$W(\alpha) = \frac{2}{T} \int_0^T dt \exp(-2|\alpha - \beta(t)|^2). \quad (7)$$

Следует отметить, что этот результат для функции Вигнера справедлив для случая, когда квантовая система в фазовом пространстве локализуется в области определенных полуклассических фазовых траекторий. Для получения этих траекторий следует рассмотреть квантовую систему в полуклассическом приближении в представлении когерентных состояний. Таким образом, для вычисления по этой формуле необходимо использовать полуклассические урав-

нения системы и найти фазовую траекторию $\beta(t)$ в плоскости $x = \text{Re}\beta$, $y = \text{Im}\beta$. В этом случае последнее выражение (7) является гауссовским распределением в точках полуклассических решений системы. Временное интегрирование в этой формуле проводится в области временного изменения полуклассической траектории.

2.2. Случай периодического по времени гамильтониана

Перейдем к случаю квантовых систем с периодическим по времени гамильтонианом взаимодействия. Как показано в [3], для периодического по времени случая матрица плотности (3) может быть представлена в виде

$$\rho(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N |\Psi_{\xi}(t+nT)\rangle \langle \Psi_{\xi}(t+nT)|, \quad (8)$$

где T – период системы. Подставив это выражение в (4) и взяв вектор состояния в когерентном представлении $|\Psi_{\xi}(t+nT)\rangle = |\beta(t+nT)\rangle = |\beta_n(t)\rangle$, для функции Вигнера получаем следующее выражение:

$$W(\alpha) = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^N \exp(-2|\alpha - \beta_n(t)|^2), \quad (9)$$

где $\beta_n(t)$ – решение соответствующих полуклассических уравнений системы. Это выражение зависит от времени и представляет собой наложение большого числа гауссовских распределений в точках $\beta_n(t)$. Выражения (7) и (9) для функций Вигнера имеют простой вид и, как показывают численные расчеты, приводят к правильным результатам, т.е. приближенно совпадают с известными выражениями для функций Вигнера, которые могут быть вычислены также другими методами. С другой стороны, такой метод позволяет сравнительно просто получить приближенный результат для квантовых систем, анализ которых очень затруднителен даже известными численными методами, включая стандартный метод ДКС. Некоторые примеры приведены в следующем разделе для случая стационарного по времени гамильтониана (формулы (6) и (7)).

3. Функция Вигнера для генерации второй гармоники: бифуркация Хопфа

Хотя приведенные ниже результаты имеют общий характер, для конкретности будет рассмотрена генерация второй гармоники в присутствии резонатора. Этот процесс, как известно, представляет большой интерес для различных приложений, однако он также интересен с точки зрения исследования фундаментальных проблем квантовой нелинейной динамики, связанной с неустойчивостями и бифуркациями [5]. Квантовая динамика системы описывается уравнением (1) для редуцированной матрицы плотности в представлении взаимодействия, где гамильтониан взаимодействия имеет следующий вид:

$$H = i \frac{\hbar \chi}{2} (a_1^{+2} a_2 - a_1^2 a_2^+) + i \hbar (E a_1^+ - E^* a_1). \quad (10)$$

В этом процессе фундаментальная мода на частоте ω_1 (оператор уничтожения a_1), которая возбуждается внешним лазерным полем в резонаторе на этой же частоте, преобразуется в $\chi(2)$ нелинейной среде в моду второй гармоники $\omega_2 = 2\omega_1$ (оператор уничтожения a_2). Среда помещена в резонатор, χ – постоянная взаимодействия мод, пропорциональная $\chi(2)$, а величина E пропорциональна амплитуде лазерного поля. Коэффициенты затухания обеих мод в резонаторе γ_1 и γ_2 включены в уравнения (1) через операторы Линдблада: $L_1 = \sqrt{\gamma_1} a_1$ и $L_2 = \sqrt{\gamma_2} a_2$. Полуклассические уравнения для этой же системы имеют следующий вид:

$$\partial \alpha_1 / \partial t = E - \gamma_1 \alpha_1 - \chi \alpha_1^* \alpha_2, \quad \partial \alpha_2 / \partial t = -\gamma_2 \alpha_2 + (\chi/2) \alpha_1^2, \quad (11)$$

где α_1 и α_2 являются амплитудами мод ω_1 и ω_2 . В полуклассическом приближении эта система характеризуется бифуркацией Хопфа, которая связывает стационарный режим при $E < E_{cr}$ с самопульсирующим по времени режимом при $E > E_{cr}$ [6-8]. Критический параметр имеет вид

$$E_{cr} = (2\gamma_1 + \gamma_2) \left[2\gamma_2 (\gamma_1 + \gamma_2) / \chi^2 \right]^{1/2}. \quad (12)$$

Необходимо отметить, что квантовая теория внутриврезонаторной генерации второй гармоники, в режиме неустойчивости Хопфа, разработана в линейном приближении по квантовым флуктуациям около полуклассических решений, которые описывают самопульсации [9]. Очевидно, что такой анализ не пригоден в критической области $E \cong E_{cr}$, где уровень квантовых флуктуаций существенно растет. С другой стороны, нахождение точных квантовых решений для нелинейно-оптических систем в присутствии диссипации является очень затруднительным. Такие решения найдены для некоторых простейших систем, но не для генерации второй гармоники (см. напр., [10]). Отметим, что численный квантовый анализ процесса генерации второй гармоники в области бифуркаций проведен в ряде работ (см. [5], где приведены ссылки на предыдущие работы). Тем не менее, даже такой анализ довольно сложен и в работе [5] вычислены функции Вигнера фундаментальной моды и моды второй гармоники лишь в области вблизи бифуркаций $E \leq E_{cr}$. Разработанный в данной статье подход позволяет получить результаты как в критической области, так и в надпороговой области $E > E_{cr}$, где режим самопульсаций существенно меняется и возникает так называемый режим удвоения периода. Численные результаты приведены ниже.

При $E < E_{cr}$ фазовые траектории амплитуд α_1 и α_2 приведены на рис. 1а, в как решения уравнений (11), для параметров $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, $\chi / \gamma = 0.1$, $E / E_{cr} = 0.5$, $E_{sp} / \gamma = 60$. Для времени $t \gg \gamma_1^{-1}, \gamma_2^{-1}$ эти траектории стремятся к определенной стационарной точке, фундаментальная мода ($x = 14.8, y = 0$) и мода второй гармоники ($x = -11.5, y = 0$). Средние числа фотонов для мод α_1

и α_2 приведены на рис.2. Действительно, при $E < E_{cr}$ легко видеть, что числа фотонов в области больших времен становятся стационарными. Вычисления функций Вигнера по формуле (7) в этой области временных интервалах приводят к результатам, представленным на рис.1б,г. Таким образом, рис.1 и 2 показывают, что в режиме $E < E_{cr}$ решения для амплитуд поля фундаментальной моды и моды второй гармоники становятся стационарными при больших временных интервалах. Фазовые распределения являются гауссовскими распределениями с центрами в стационарных точках.

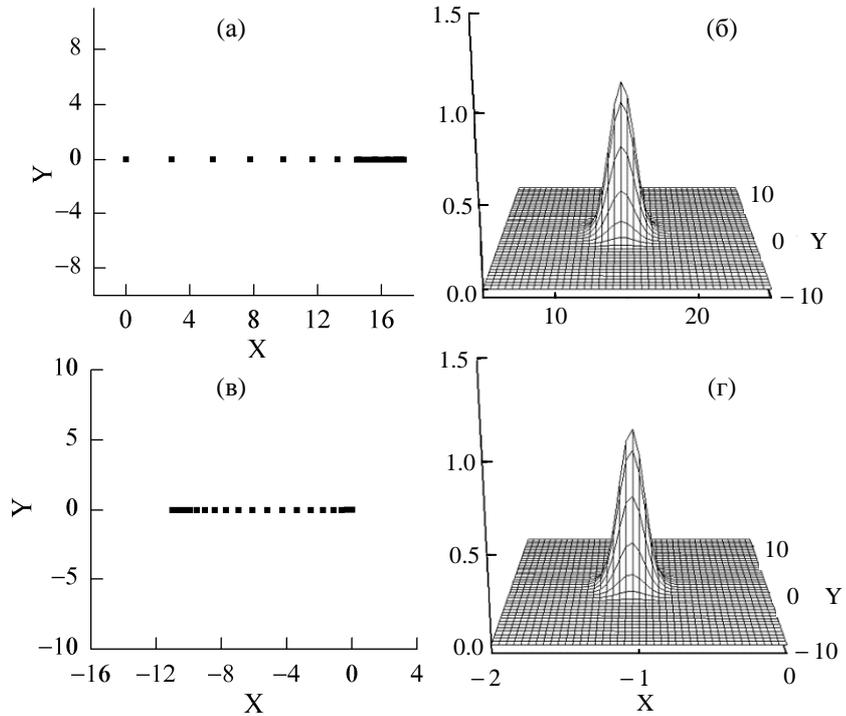


Рис.1. Фазовые траектории для фундаментальной моды α_1 (а), для моды второй гармоники α_2 (в), для параметров $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$; $\chi/\gamma = 0.1$; $E/E_{cr} = 0.5$, $E_{cr}/\gamma = 60$; (б) Функция Вигнера фундаментальной моды; (г) функция Вигнера моды второй гармоники.

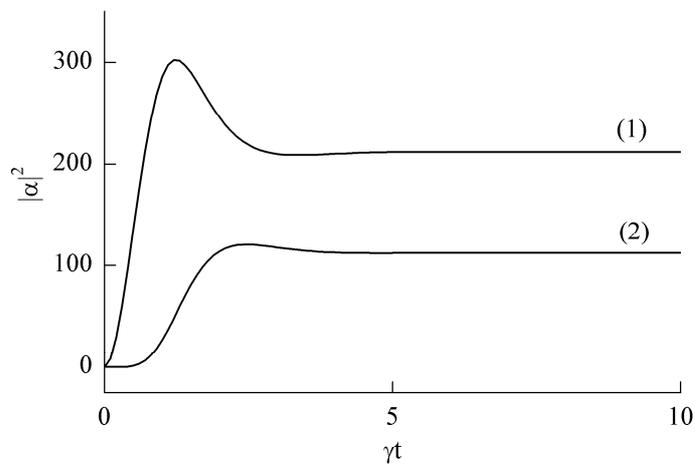


Рис.2. Числа фотонов в зависимости от γt для параметров $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$; $\chi / \gamma = 0.1$; $E / E_{cr} = 0.5$, $E_{cr} / \gamma = 60$. Кривая 1 – для фундаментальной моды α_1 ; 2 – для моды второй гармоники α_2 .

Перейдем к исследованию режима временной самопульсации, которая реализуется при $E > E_{cr}$. Как было отмечено выше, при $E > E_{cr}$ система имеет неустойчивость Хопфа. Физическая природа этой неустойчивости состоит в расщеплении величин фаз каждой из мод на два значения при переходе через критическую точку E_{cr} . При дальнейшем увеличении амплитуды E над E_{cr} возникает режим удвоения периода самопульсаций Хопфа. К сожалению, нет возможности найти величину второй критической точки E_d аналитически и в работе приведен численный анализ этого вопроса. Ниже приводятся результаты для области $E > E_d$, где система имеет неустойчивую динамику удвоения периода самопульсаций Хопфа. Примеры фазовых траекторий для моды α_1 и α_2 , как решения уравнений (11) при $E > E_{cr}$, приведены на рис. 3 (а) и (б), соответственно, для параметров $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$; $\chi / \gamma = 0.1$; $E / E_{cr} = 10$, $E_{cr} / \gamma = 60$. В этом режиме решения уравнений (11) неустойчивы, и как следствие этого, фазовые траектории на рис.3а,б имеют формы, типичные для случая систем с неустойчивостью, т.е. описывают замкнутые циклы. Такой неустойчивостью в данном случае является бифуркация Хопфа. На рис.4а,б приведены результаты вычислений числа фотонов мод в полуклассическом приближении, из уравнений (11). Эти результаты очевидным образом показывают самопульсацию мод, т.е. что даже для временных интервалов, превышающих переходное время $t \gg \gamma_1^{-1}, \gamma_2^{-1}$, решения для чисел фотонов не стремятся к стационарному решению (см. рис.2), а являются неустойчивыми. Как показано в [7], такие самопульсации исчезают в квантовом рассмотрении из-за статистического усреднения по ансамблю.

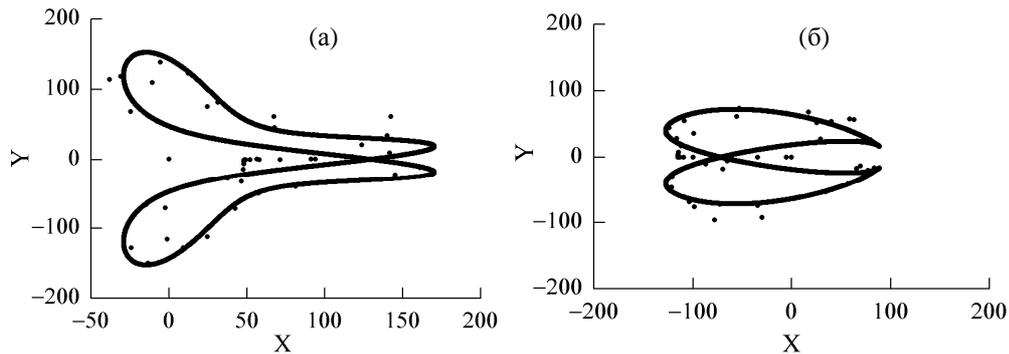


Рис.3. Фазовые траектории: (а) фундаментальная мода, (б) мода второй гармоники для следующих параметров: $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$; $\chi/\gamma = 0.1$; $E/E_{cr} = 10$, $E_{cr} / \gamma = 60$.

Перейдем к вычислению функций Вигнера по формуле (7) в режиме $E > E_{cr}$. Как было отмечено выше, из-за статистического усреднения эти величины не зависят от временных интервалов, превышающих время переходного режима. Результаты вычислений функций Вигнера для обеих мод и их сечения показаны на рис.5. Видно, что сечения функций Вигнера совпадают по форме с

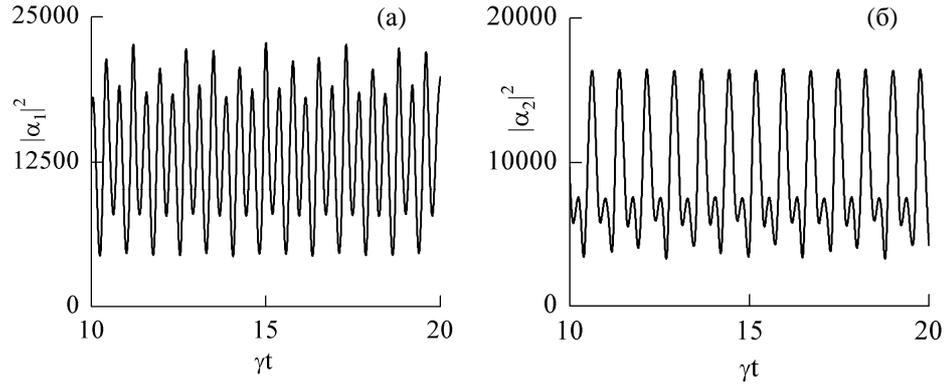


Рис.4. Числа фотонов в зависимости от γt для параметров: $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$; $\chi/\gamma = 0.1$; $E/E_{cr} = 10$, $E_{cr} / \gamma = 60$; (а) для фундаментальной моды α_1 ; (б) для моды второй гармоники α_2 .

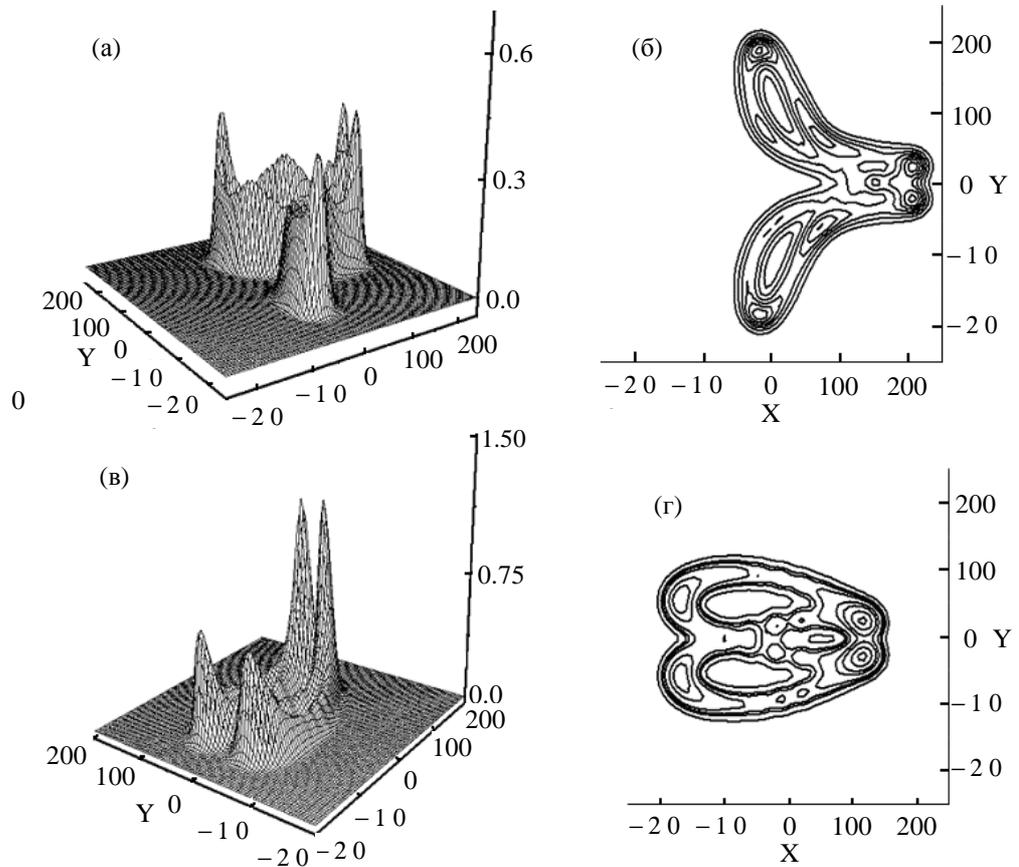


Рис.5. Функции Вигнера и их сечения: для фундаментальной моды α_1 (а) и (б); для моды второй гармоники α_2 (в) и (г). Параметры те же, что на рис.3.

полуклассическими фазовыми траекториями системы. Сечение рис.5б соответствует фазовой траектории рис.3а для фундаментальной моды и сечение рис.5г соответствует фазовой траектории рис.3б для моды второй гармоники. Это является следствием локализации квантовой системы в области классических траекторий для выбранных параметров. Функции Вигнера на рис.5а и б имеют многопиковую структуру в фазовом пространстве, что является квантовым проявлением бифуркации удвоения периода. Действительно, каждая из мод имеет четыре пика в фазовом пространстве, которые определяют наиболее вероятные значения фаз фундаментальной моды и моды второй гармоники. Легко видеть из рис.1б,г, что ниже критической точки $E < E_{cr}$ каждая из мод имеет лишь одно наиболее вероятное значение фазы. В работе показано, что переход в область удвоения периода фазы расщепляются на четыре составляющие.

Автор выражает благодарность А.А. Адамяну и Г.Ю. Крючкяну за многочисленные обсуждения. Работа была поддержана грантом CRDF/NFSAT, UCER 02/07, а также грантами МНТЦ А-1451 и А-1606.

ЛИТЕРАТУРА

1. **N.Gisin, I.C.Percival.** J. Phys., **A 25**, 5677 (1992).
2. **R.Schack, T.A.Brun, I.C. Percival.** J. Phys., **A 28**, 5401 (1995).
3. **А.А.Адамян, Т.В.Геворгян, Г.Ю.Крючкян.** Изв. НАН Армении, Физика, **42**, 3 (2007).
4. **В.П.Шляйх.** Квантовая оптика в фазовом пространстве. М., Физматлит, 2005.
5. **S.T.Gevorkyan, G.Yu.Kryuchkyan, N.T.Muradyan.** Phys. Rev. A, **61**, 043805 (2000).
6. **P.D.Drumond, K.J.Mcneil, D.F.Walls.** Opt. Acta, **27**, 321 (1980); **28**, 211 (1981).
7. **H.J.Kimble, J.L.Hall,** in Quantum Optics IV, ed. by J.D. Harvey, D.F. Walls. Berlin, Springer, 1986.
8. **S.Schiller, R.Byer.** J. Opt. Soc. Am., **B10**, 1696 (1993).
9. **N.T.Pettiaux, P.Mandel, C.Fabre.** Phys. Rev. Lett., **66**, 1838 (1991).
10. **G.Yu.Kryuchkyan, K.V.Kheruntsyan.** Opt. Comm., **127**, 230 (1996).

ԼՈՎԱԼԻԶԱՅՎԱԾ ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿՆԵՐԻ
ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ԲԱՇԽՎԱԾՈՒԹՅՈՒՆԸ

Տ.Վ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Քվանտային տեսության էրգոդիկության սկզբունքն օգտագործված է քվանտային դիսիպատիվ համակարգերի համար Վիգների ֆունկցիայի մոդելավորման նոր մեթոդի մշակման համար: Այս նպատակով քվանտային համակարգի խտության օպերատորը ներկայացվում է

որպես քվանտային վիճակի կամայական ժամանակային ինտերվալների անսամբլ, քվանտային վիճակի ստոքաստիկ անսամբլի փոխարեն:

QUANTUM DISTRIBUTIONS FOR LOCALIZED QUANTUM STATES

T.V. GEVORGYAN

The ergodicity of quantum theory is used for elaboration of a new method for numerical simulation of Wigner functions of quantum dissipative systems. For this goal the reduced density operator of a quantum system is represented via an ensemble of quantum states for random time intervals instead of an ensemble of stochastic quantum states. This approach leads to novel approximate results for quantum distributions in phase-space, in particular, the Wigner functions for the systems that may be localized around semiclassical phase trajectories. As an application, the Wigner functions for intracavity second-harmonic generation in the regime of Hopf instability are calculated.