Известия НАН Армении, Физика, т.44, №3, с.155-161 (2009)

УДК 548.732

О ВКЛАДЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО И ХРОМОМАГНИТНОГО ДИПОЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В РАСПАДЕ $\bar{B} \to X_s\gamma$ В ПОРЯДКЕ $O\left(\alpha_s^2\right)$

А.А. ГАБРИЕЛЯН

Ереванский физический институт им. А.И. Алиханяна, Армения

(Поступила в редакцию 8 декабря 2008 г.)

В рамках Стандартной Модели проведен расчет вклада петель c-кварка в интерференцию электромагнитного и хромомагнитного дипольных операторов для парциальной ширины инклюзивного $\bar{B} \to X_s\gamma$ распада в порядке $O(\alpha_s^2)$. Рассчитан вклад петель c-кварка в распад во втором порядке теории возмущений. Использованы новые методы расчетов, а именно, автоматизированный алгоритм Лапорта, метод секторного разложения и представление Меллина(Барнеса.

1. Введение

Последние экспериментальные результаты, полученные в Belle, BABAR, CLEO [1-3], и усреднение, выполненное Heavy Flavor Averaging Group [4] для энергий гамма-кванта $E_\gamma > 1.6$ ГэВ, дают для парциальной ширины $\bar{B} \to X_s\gamma$ распада значение

$$\mathrm{Br}\left(\bar{B} \to X_s\gamma\right) = (3.52 \pm 0.23 \pm 0.09)\times 10^{-4}, \qquad (1)$$

где указаны, соответственно, статистические и систематические ошибки в результате экстраполяции общего нижнего порога энергии фотона.

Для того, чтобы привести теоретические предсказания в соответствие с полученными высокоточными экспериментальными результатами, нужно повысить точность теоретических прогнозов для парциальной ширины $\bar{B} \to X_s\gamma$ распада, т.е. подсчитать его в следующем-после-следующего-после-ведущего порядке (next-to-next-to-leading order, коротко NNLO) теории возмущений. Для порядка NLO вычислены все поправки (см., например, [5]). Согласования трехпетлевого дипольного оператора приведены в [6], трехпетлевого смешивания четырех кварковых операторов (в [7], трехпетлевого смешивания дипольных операторов - в [8]. Кроме того, четырехпетлевое смешивание четырех кварковых операторов в дипольные операторы вычислены в [9]. Двухпетлевые матричные элементы электромагнитного дипольного оператора, вместе с соответствующими членами тормозного излучения, можно найти в [10-13]. Трехпетлевые матричные элементы четырех кварковых операторов представлены в [14], вместе с так называемым большим β_0 - приближением и расчетами, которые выходят за рамки данного приближения, используя интерполяцию в массе m_c c-кварка, получены в [15]. Сочетания всех отдельных вкладов приведены в первой оценке парциальных ширин (branching ratio) распада $\bar{B} \to X_s\gamma$ в порядке $O(\alpha_s^2)$ [16]. Для энергий гамма-кванта $E_\gamma > 1.6$ ГэВ получается

$$\mathrm{Br}\,(\bar{B} \to X_s\gamma) = (3.15 \pm 0.23)\times 10^{-4}\,. \tag{2}$$

Следует отметить, что по теории возмущений существует несколько эффектов, которые не учтены при получении данной оценки.

Целью данной работы был численный расчет вклада петель c-кварка в интерференцию дипольных электромагнитного и хромомагнитного операторов (O_7, O_8).

2. Теория

Для теоретического описания редких распадов используется так называемая эффективная теория с пятью кварками, получаемая интегрированием по степеням свободы тяжелых t-кварка и W-бозона (по Стандартной Модели). Таким образом, в случае распада $b \to X_s\gamma$ эффективный гамильтониан имеет вид [17]

$$H_{eff}(b \to s\gamma) = \frac{4G_F}{\sqrt{2}}\lambda_t \sum_{j=1}^{8} C_j(\mu) O_j(\mu)\,, \tag{3}$$

где G_F – константа связи Ферми, $C_j(\mu)$ – коэффициенты Вильсона, определенные по масштабу μ, $\lambda_t = V_{tb}V_{ts}^*$, где V_{ij} - матричные элементы Кабиббо- - Кобаяши-Маскава.

Операторы O_j имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
O_1 &= \left(\overline{c_{L\beta}}\gamma^\mu b_{L\alpha}\right)\left(\overline{s_{L\alpha}}\gamma_\mu c_{L\beta}\right),\\
O_2 &= \left(\overline{c_{L\alpha}}\gamma^\mu b_{L\alpha}\right)\left(\overline{s_{L\beta}}\gamma_\mu c_{L\beta}\right),\\
O_3 &= \left(\overline{s_{L\alpha}}\gamma^\mu b_{L\alpha}\right)\left[\left(\overline{u_{L\beta}}\gamma_\mu u_{L\beta}\right)+\cdots+\left(\overline{b_{L\beta}}\gamma_\mu b_{L\beta}\right)\right],\\
O_4 &= \left(\overline{s_{L\alpha}}\gamma^\mu b_{L\beta}\right)\left[\left(\overline{u_{L\beta}}\gamma_\mu u_{L\alpha}\right)+\cdots+\left(\overline{b_{L\beta}}\gamma_\mu b_{L\alpha}\right)\right],\\
O_5 &= \left(\overline{s_{L\alpha}}\gamma^\mu b_{L\alpha}\right)\left[\left(\overline{u_{R\beta}}\gamma_\mu u_{R\beta}\right)+\cdots+\left(\overline{b_{R\beta}}\gamma_\mu b_{R\beta}\right)\right],\\
O_6 &= \left(\overline{s_{L\alpha}}\gamma^\mu b_{L\beta}\right)\left[\left(\overline{u_{R\beta}}\gamma_\mu u_{R\alpha}\right)+\cdots+\left(\overline{b_{R\beta}}\gamma_\mu b_{R\alpha}\right)\right],\\
O_7 &= \left(e/16\pi^2\right)\overline{s_\alpha}\sigma^{\mu\nu}\left[m_b(\mu)R + m_s(\mu)L\right]b_\alpha F_{\mu\nu},\\
O_8 &= \left(g_s/16\pi^2\right)\overline{s_\alpha}\sigma^{\mu\nu}\left[m_b(\mu)R + m_s(\mu)L\right]\left(\lambda_{\alpha\beta}^A/2\right)b_\beta G_{\mu\nu}^A.
\end{aligned} \tag{4}$$

В дипольных операторах O_7 и O_8 через e и $F_{\mu\nu}$ (g_s и $G^A_{\mu\nu}$) обозначены, соответственно, электромагнитная (сильная) константа связи и тензор напряженности поля, а $L=(1-\gamma_5)/2$ и $R=(1+\gamma_5)/2$ - левосторонние и правосторонние проекции операторов. Следует отметить, что явные массовые факторы в O_7 и O_8 - это бегущие кварковые массы.

В рамках низкоэнергетической эффективной теории скорость партонного $b \to X_s\gamma$ распада может быть записана в виде

$$\Gamma\left(b \to X_s^{\text{parton}}\gamma\right)_{E_\gamma > E_0} = \frac{G_F^2 \alpha_{em} \overline{m}_b^2(\mu) m_b^3}{32\pi^4} \left|V_{tb}V_{ts}^*\right|^2 \sum_{i,j} C_i^{eff}(\mu) C_j^{eff}(\mu) G_{ij}(E_0,\mu), \quad (5)$$

где m_b и $\overline{m}_b(\mu)$ обозначают, соответственно, полюс и бегущую $\overline{\text{MS}}$ массу b-кварка, $C_i^{eff}(\mu)$ - эффективные вильсоновские коэффициенты в низкоэнергетическом масштабе и E_0 - энергетический порог в спектре фотона.

3. Учет вклада с-кварка и результаты

Приведение соответствующей фейнмановской диаграммы, представленной на рис.1, к набору так называемых мастер-интегралов, произведено с помощью алгоритма Лапорты. Этот алгоритм, впервые представленный в [18,19], основан на интегрировании по частям. Алгоритм Лапорты, но уже автоматизированный [20], использован для получения «упрощенных» мастер-интегралов.

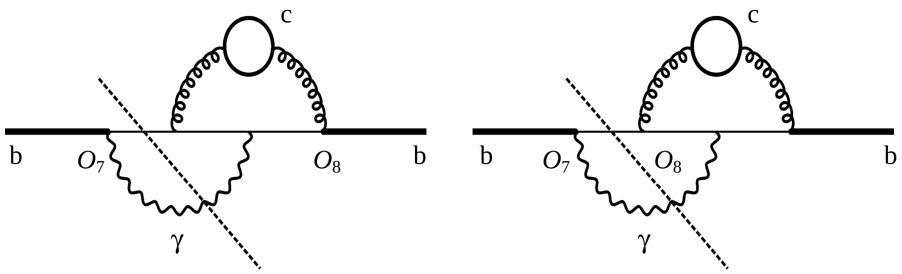

Рис.1. Собственно-энергетические неприводимые диаграммы разрезов b-кварка с петлей массивного с-кварка, дающие вклад в распад $b \to s\gamma$.

Алгоритм Лапорты работает следующим образом. Рассматривается конкретный тип интегралов, которые получаются из фейнмановской диаграммы. При соответствующих действиях, приведенных в алгоритме, из конкретной диаграммы получается интеграл, содержащий некое количество пропагаторов в отрицательных или положительных степенях. После этого шага нужно найти алгебраические уравнения - тождества, соответствующие этим интегралам. Для получения этих тождеств используется метод IBP (Integration By Parts – интегрирование по частям) [18,19]. Методом IBP подынтегральное выражение умножается петлей/петлевым импульсом (импульсом замкнутого контура, по которому производится интегрирование) или внешним четырех-импульсом и дифференцируется по импульсу петли. Отметим, что все производные интегрируются и приравниваются нулю (равны нулю). Таким образом получаются тождества IBP – линейные алгебраические уравнения. Полученные линейные уравнения и связывают интегралы, имеющие разные пропагаторы. Преобразовывая уравнения, можно получить из сложных интегралов более простые, которые в свою очередь преобразуются в мастер-интегралы.

Для взятия мастер-интегралов по петлям сначала вводим фейнмановскую параметризацию и только потом проводим интегрирование.

Введением фейнмановских параметров интеграл может быть представлен в виде симметричной $(L \times L)$-матрицы *M*, *L*-вектора Q (с 4-вектором в каждом слагаемом) и скалярной функцией J [21]:

$$G = \Gamma(N) \int d^N x \, \delta(1 - \sum_{l=1}^{N} x_l) \int \frac{d^D k_1}{i\pi^{(D/2)}} \cdots \frac{d^D k_L}{i\pi^{(D/2)}} \left[\sum_{j,l=1}^{L} k_j k_l M_{jl} - 2 \sum_{j=1}^{L} k_j Q_j + J \right]^{-N}. \quad (6)$$

После сдвига импульса петли (для избавления от линейного слагаемого) и после интегрирования по импульсу получается следующее параметрическое представление диаграммы *G*:

$$G = (-1)^N \Gamma(N - LD/2) \int_0^{\infty} d^N x \, \delta(1 - \sum_{l=1}^{N} x_l) \frac{U^{N-(L+1)D/2}}{F^{N-LD/2}} \quad (7)$$

где

$$F(x) = \det(M) \left[\sum_{j,l=1}^{L} Q_j Q_l M_{jl}^{-1} - J \right] \quad (8)$$

$$U(x) = \det(M). \quad (9)$$

Здесь U -полином второй степени, состоящий из некоторой комбинации пропагаторов, а F - полином третьей степени.

Для решения вопроса перекрывающих ИК (инфракрасных) расходимостей используется метод секторного разложения [21]. Применение итерации приводит к интегралам, в которых инфракрасное сингулярное поведение не содержится в сложных функциях. Инфракрасное сингулярное поведение содержится в произведении остатков функций *U*, F - простых произведениях фейнмановских параметров, возведенных в некоторую степень. Однако, структура этих простых произведений такова, что они не приводят к полюсам и не меняют соответствующие экспоненты полюсов. Более детально процедура состоит из четырех частей.

В первой части алгоритма мы разбиваем области интегрирования на N частей и исключаем δ-функции таким образом, что оставшиеся интегралы имеют пределы интегрирования от 0 до 1.

Во второй части производим итерационное применение секторного разложения и переотображаем пространство параметров в единичный куб, чтобы освободить перекрывающие сингулярные области подынтегральных функций.

Третья часть алгоритма состоит в вычитании полюсов для подсекторных интегралов. Так как переменные, которые чувствительны к инфракрасным расхождениям, разложены на множители в подсекторных интегралах, то можно отделить части подынтегральной функции, которые приводят к ε-полюсам.

В четвертой части производится вычисление подсекторных интегралов.

Одна из основных процедур, которая используется для расчетов, это представление Меллина-Барнеса пропагаторов тип $1/(x+y)^{\lambda}$ [5]. Преобразование имеет следующий вид:

$$\frac{1}{(x+y)^{\lambda}}=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_{\gamma}\frac{ds}{2\pi i}\frac{x^{s}}{y^{\lambda+s}}\Gamma(\lambda+s)\Gamma(-s)\,, \tag{10}$$

где $\lambda>0$ и интегрирование производится по γ-контуру параллельно мнимой оси (в комплексной плоскости *s*) и проходит через реальную ось между точками -λ и 0.

Нами проведены расчеты по получению вклада интерференции хромомагнитного и электромагнитного дипольных операторов в порядке $O(\alpha_s^2)$, а именно, вклад функции $G_{78}(E_0,\mu)$ в (5). Полученные результаты представляют неперенормированные вклады учета петель c-кварка в общую ширину распада. Функцию $G_{78}(E_0,\mu)$ в аппроксимации по NNLO можно разложить следующим образом:

$$G_{78}(E_0,\mu)=\frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi}C_F Y^{(1)}(z_0,\mu)+\left(\frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi}\right)^2 C_F Y^{(2)}(z_0,\mu)+O\left(\alpha_s^3\right), \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}Y^{(2)}(z_0,\mu)&=C_F Y^{(2,CF)}(z_0,\mu)+C_A Y^{(2,CA)}(z_0,\mu)+\\&+T_R N_L Y^{(2,NL)}(z_0,\mu)+T_R N_H Y^{(2,NH)}(z_0,\mu)+T_R N_V Y^{(2,NV)}(z_0,\mu).\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $z_0=2E_0/m_b$, N_L, N_H и N_V обозначают число легких $(m_q=0)$, тяжелых $(m_q=m_b)$ и виртуальных $(m_q=m_c)$ кварковых ароматов, соответственно, $\alpha_s(\mu)$ -бегущая константа связи по $\overline{\text{MS}}$, а C_F, C_A и T_R-цветовые факторы с численными значениями 4/3, 3 и 1/2. В данной статье представлены результаты для функции $Y^{(2,NV)}(z_0,\mu)$.

Разложив по степеням ε, получим

$$Y^{(2,NV)}(z_0,\mu)=(\mu/m_b)^{4\varepsilon}\left(a_0+a_1/\varepsilon+a_2/\varepsilon^2\right). \tag{13}$$

Окончательно для коэффициентов a_i получаем

$$\begin{aligned}&a_0=55.7073+1280z-3930.30\,z^{3/2}+2904.28z^2+\\&+512z\ln z+1600z^2\ln z+512z^2\ln^2 z,\\&a_1=-101.410,\quad a_2=-42.6667.\end{aligned} \tag{14}$$

В формулах (11)–(14) введено следующее обозначение для соотношения масс кварков: $z = m_c^2 / m_b^2$. Расчеты проведены до квадратичной степени по *z*. Численные расчеты показывают, что это приближение дает точность порядка нескольких процентов.

4. Заключение

В работе получены неперенормированные вклады учета с-кварка в интерференции электромагнитного и хромомагнитного операторов для распада $\bar{B} \to X_s \gamma$. Полученные результаты будут обобщены в будущем, с учетом перенормировок и других типов поправок [22], а также с учетом вкладов от излучения реальных глюонов.

В заключение автор выражает благодарность доктору физ.-мат. наук Г.М. Асатряну за постановку задачи и полезные обсуждения. Работа выполнена в рамках проекта МНТЦ A-1606.

ЛИТЕРАТУРА

1. **S.Chen et al.** CLEO Collaboration, Phys. Rev. Lett., **87**, 251807 (2001), hep-ex/0108032.
2. **B.Aubert et al.** BaBar Collaboration, Phys. Rev. D, **77,** 051103(2008), arXiv:0711.4889.
3. **K.Abe et al.** Belle Collaboration, arXiv:0804.1580.
4. **E.Barberio et al.** Heavy Flavor Averaging Group, arXiv: 0704.3575.
5. **C.Greub, T.Hurth, D.Wyler.** Phys. Rev. D, **54**, 3350 (1996), hep-ph/9603404.
6. **M.Misiak, M.Steinhauser.** Nucl. Phys. B, **583,** 277 (2004), hep-ph/0401041.
7. **M.Gorbahn, U.Haisch.** Nucl. Phys. B, **713,** 291 (2005), hep-ph/0411071.
8. **M.Gorbahn, U.Haisch, M.Misiak.** Phys. Rev. Lett., **95,** 102004 (2005), hep-ph/0504194.
9. **M.Czakon, U.Haisch, M.Misiak.** JHEP, **0703,** 008 (2007), hep-ph/0612329.
10. **I.Blokland, A.Czarnecki, M.Misiak, M.Slusarczyk, F.Tkachov**. Phys. Rev. D, **72,** 033014 (2005), hep-ph/0506055.
11. **K.Melnikov, A.Mitov.** Phys. Lett. B, **620,** 69 (2005), hep-ph/0505097.
12. **H.M.Asatrian, A.Hovhannisyan, V.Poghosyan, T.Ewerth, C.Greub, T.Hurth.** Nucl. Phys. B, **749,** 325 (2006), hep-ph/0605009.
13. **H.M.Asatrian, T.Ewerth, A.Ferroglia, P.Gambino, C.Greub.** Nucl. Phys. B, **762,** 212 (2007), hep-ph/0607316.
14. **K.Bieri, C.Greub, M.Steinhauser.** Phys. Rev. D, **67,** 114019 (2003), hep-ph/0302051.
15. **M.Misiak, M.Steinhauser.** Nucl. Phys. B, **764,** 62 (2007), hep-ph/0609241.
16. **M.Misiak, H.M.Asatryan, K.Bieri, M.Czakon, et al.** Phys. Rev. Lett., **98,** 022002 (2007), hep-ph/0609232.
17. **B.Grinstein, R.Springer, M.B.Wise.** Phys. Lett. B, **202,** 138 (1988); Nucl. Phys. B, **339**, 269 (1990).
18. **F.V.Tkachov.** Phys. Lett. B, **100,** 65 (1981).
19. **K.G.Chetyrkin, F.V.Tkachov.** Nucl. Phys. B, **192,** 159 (1981).
20. **C.Anastasiou, A.Lazopoulos.** JHEP, **0407,** 046 (2004), hep-ph/0404258.
21. **T.Binoth, G. Heinrich.** Nucl. Phys. B, **585,** 741 (2000), hep-ph/0004013.
22. **H.M.Asatrian, T.Ewerth, H.Gabrielyan, C.Greub.** Phys. Lett. B, **647,** 173 (2007), hep-ph/0611123.

$\bar{B} \to X_s\gamma$ ՏՐՈՀՄԱՆ ՄԵՋ $O(\alpha_s^2)$ ԿԱՐԳԻ ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԵՎ ՔՐՈՄԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԻՊՈԼԱՅԻՆ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ԻՆՏԵՐՖԵՐԵՆՑԻԱՅԻ ՆԵՐԴՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Հ.Ա. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ

Ստանդարտ Մոդելի (ՍՄ) շրջանակներում հաշվարկված է էլեկտրամագնիսական և քրոմամագնիսական դիպոլային օպերատորների ինտերֆերենցիայում c-քվարկային օղակ-ների ներդրումը $\bar{B} \to X_s\gamma$ ինկլյուզիվ տրոհման մասնակի լայնության համար $O(\alpha_s^2)$ կար-գում: Հաշվարկված է c-քվարկի օղակների ներդրումը խոտորումների տեսության երկրորդ կարգում: Աշխատանքում կիրառված են հաշվարկման նոր մեթոդներ, որոնցից են Լապոր-տայի ավտոմատացված ալգորիթմը, սեկտորային վերծանման մեթոդը և Մելլին–Բարնեսի ներկայացումը:

ON THE CONTRIBUTION OF INTERFERENCE OF ELECTROMAGNETIC AND CHROMOMAGNETIC DIPOLE OPERATORS IN THE $\bar{B} \to X_s\gamma$ DECAY AT $O(\alpha_s^2)$

H.A. GABRIELYAN

The contribution of c-quark loops to the interference of electromagnetic and chromomagnetic dipole operators for the decay $\bar{B} \to X_s\gamma$ at $O(\alpha_s^2)$ is calculated within the Standard Model. The work is carried out for improvement of the accuracy of theoretical predictions in correspondence with the high-precision experimental results. The contribution of c-quark loops in the decay in the second order of perturbation theory is calculated. Several new calculating methods such as Laporta's automated algorithm, the sector decomposition techniques and Mellin– Barnes representation have been used.