

УДК 539.126

ЗАВИСИМОСТЬ ПЕРЕНОРМИРОВКИ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ТЯЖЕЛОГО КВАРКА В КХД ОТ МАССЫ c -КВАРКА

Г.М. АСАТРЯН, А.Г. АСАТРЯН, А.А. ГАБРИЕЛЯН

Ереванский физический институт им. А.И. Алиханяна, Армения

(Поступила в редакцию 15 января 2009 г.)

Используя численные методы для расчета высших поправок по теории возмущений, получены результаты для константы перенормировки волновой функции тяжелого кварка с учетом вклада петель c -кварка. При расчетах использованы автоматизированный алгоритм Лапорты, метод секторного разложения и представление Меллина-Барнеса.

1. Введение

Пертурбативные вычисления в квантовой теории поля являются очень эффективным методом для создания точных связей между экспериментом и теорией. В физике тяжелых кварков, занимающей особое место в исследованиях СР нарушений, пертурбативные эффекты играют основную роль наряду с непертурбативными.

Перенормируемость Квантовой Хромодинамики (КХД) подразумевает, что любое многопетлевое вычисление может быть интерпретировано, если известны соответствующие константы перенормировок [1]. Вычисления констант перенормировок однопетлевых поправок (NLO - Next to Leading Order) завершены – результаты вычислений представлены в [2-9].

На данном этапе вычисляются двухпетлевые $O(\alpha_s^2)$ поправки. Полученные к настоящему времени результаты можно найти в [10-20]. Как известно, константы перенормировки зависят от типа схемы перенормировки. Например, в $\overline{MS}$ -схеме перенормировки константы перенормировок были получены до четвертого порядка по теории возмущений. Однако, в случае, если процессы с тяжелыми кварками находятся на массовой поверхности (on-shell) в начальном и конечном состояниях, этого недостаточно. В этом случае нужны константы перенормировок по on-shell схеме. Если использовать on-shell схему перенормировки для кварков в КХД, то нужно будет вычислить две константы перенормировок - перенормировки массы и перенормировки волновой функции.

Целью данной работы было вычисление константы перенормировки волновой функции для тяжелых кварков в двухпетлевом приближении, с учетом вклада петель c -кварка (рис.1). Связь перенормированного кваркового поля ψ с голым (bare) кварковым полем ψ_0 имеет следующий вид:

$$\Psi_0 = \sqrt{Z_2} \Psi \quad (1)$$

где Z_2 – константа перенормировки.

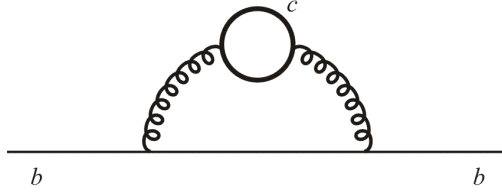


Рис.1. Собственно-энергетическая неприводимая диаграмма b-кварка с петлей массивного c-кварка.

Нами будет получено значение для вклада в Z_2 петель c-кварка, разложенное по степеням $z = m_c^2 / m_b^2$ (отношение квадратов масс c- и b-кварков). В работе используется MS-схема перенормировки, которая подробно описана в работе [21].

Одночастичный неприводимый кварковый собственно-энергетический оператор $\hat{\Sigma}(p, m)$ может быть параметризован двумя независимыми функциями следующим образом [22]:

$$\hat{\Sigma}(p, m) = m \Sigma_1(p^2, m) + (\not{p} - m) \Sigma_2(p^2, m). \quad (2)$$

Фермионный пропагатор в общем случае имеет вид

$$\hat{S}_F(p) = i / [\not{p} - m_0 + \hat{\Sigma}(p, m)], \quad (3)$$

где m_0 – голая масса кварка, а m – перенормированная масса кварка.

Разложим уравнение (2) в ряд Тейлора около точки $p^2 = m^2$:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}(p, m) &\approx m \hat{\Sigma}_1(p^2, m) \Big|_{p^2=m^2} + m \frac{\partial^2}{\partial p^2} \hat{\Sigma}_1(p^2, m) \Big|_{p^2=m^2} + (\not{p} - m) \hat{\Sigma}_2(p^2, m) \Big|_{p^2=m^2} \approx \\ &\approx m \hat{\Sigma}_1(p^2, m) \Big|_{p^2=m^2} + (\not{p} - m) \left(2m^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} \hat{\Sigma}_1(p^2, m) \Big|_{p^2=m^2} + \hat{\Sigma}_2(p^2, m) \Big|_{p^2=m^2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя (4) в выражение для фермионного пропагатора (3), получим константу перенормировки волновой функции:

$$Z_2^{-1} = 1 + 2m^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} \hat{\Sigma}_1(p^2, m) \Big|_{p^2=m^2} + \hat{\Sigma}_2(p^2, m) \Big|_{p^2=m^2}. \quad (5)$$

2. Методы расчетов и результаты

В работе для вычисления константы перенормировки волновой функции тяжелого кварка используется последовательность новых методов, которые дают

возможность получить высокоточные численные результаты. Первый шаг основан на приведении соответствующей фейнмановской диаграммы к набору так называемых мастер-интегралов, с помощью алгоритма Лапорты [23-25], основанного на интегрировании по частям.

Вторым шагом является нахождение линейных алгебраических уравнений методом IBP (Integration By Parts – интегрирование по частям) [23,24]. Преобразовывая уравнения, можно получить из сложных интегралов более простые, которые в свою очередь преобразуются в мастер-интегралы. Используя те же уравнения, можно также получить выражения для производных мастер-интегралов по p^2 . Для взятия мастер-интегралов по петлям сначала вводится фейнмановская параметризация и только потом проводится интегрирование.

Для решения вопроса перекрывающихся ИК (инфракрасных) расходимостей используется метод секторного разложения [26]. Применение данного метода приводит к интегралам, в которых инфракрасное сингулярное поведение не содержится в сложных функциях: оно содержится в простых произведениях фейнмановских параметров, возведенных в некоторую степень.

Одна из основных процедур, которая используется для расчетов, это представление Меллина(Барнеса для пропагаторов типа $1/(x+y)^\lambda$ [27]. Преобразование имеет следующий вид:

$$\frac{1}{(x+y)^\lambda} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_{\gamma} \frac{ds}{2\pi i} \frac{x^s}{y^{\lambda+s}} \Gamma(\lambda+s) \Gamma(-s), \quad (6)$$

где $\lambda > 0$, а интегрирование производится по γ -контуре параллельно мнимой оси (в комплексной плоскости s) и проходит через реальную ось между точками γ -и 0. Данное представление успешно использовалось нами в работе [20].

При вычислении константы перенормировки нужно учитывать также перенормировку бегущей константы связи сильного взаимодействия α_s :

$$\alpha_s^{\text{bare}} = \mu^{2\varepsilon} \left(\frac{e^\gamma}{4\pi} \right)^\varepsilon Z_\alpha^{\overline{\text{MS}}} \alpha_s(\mu), \quad (7)$$

где $\varepsilon = (4-d)/2$, d – размерность пространства, α_s^{bare} – голая константа связи сильного взаимодействия, $\gamma \approx 0.5772$ – постоянная Эйлера–Маскерони, $Z_\alpha^{\overline{\text{MS}}}$ – константа, связанная с перенормировкой сильного взаимодействия по схеме $\overline{\text{MS}}$. Вклад s -кварка в $Z_\alpha^{\overline{\text{MS}}}$ равен

$$\Delta Z_\alpha^{\overline{\text{MS}}} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} + O(\alpha_s^2). \quad (8)$$

Константа перенормировки тяжелого b -кварка в первом приближении по $\alpha_s(\mu)$, представленная в [22], имеет следующий вид:

$$Z_{2b} = 1 - \frac{4}{3} \Gamma(\varepsilon) e^{\gamma\varepsilon} \frac{3-2\varepsilon}{1-2\varepsilon} \left(\frac{\mu}{m_b} \right)^{2\varepsilon} \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} + O(\alpha_s^2). \quad (9)$$

Используя IBP уравнения, а также дифференциальные уравнения для масер-интегралов, можно выразить все интегралы и их производные с помощью пяти мастер-интегралов в точке $p^2 = m_b^2$. Из них только два интеграла (с четырьмя и тремя пропагаторами) являются нетривиальными. Вычислив интегралы с помощью секторного разложения и преобразования Меллина–Барнеса, получим значение для вклада петель с-кварка в Z_{2b} , которое с учетом вклада перенормировки константы сильного взаимодействия (8), (9) принимает вид:

$$\begin{aligned} \delta Z_{2b} = & \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \right)^2 \left\{ \frac{1}{\epsilon} (1 + 8L_\mu - 4\ln(z)) + \left(\frac{44}{3} - 16\ln(z) \right) L_\mu + 24L_\mu^2 + \right. \\ & + \frac{16}{3} \ln(z) + 4\ln^2(z) + 41.06045174 - 59.21762638z^{1/2} + 48z - \\ & \left. - 98.69604400z^{3/2} + (81.14508457 + 6\ln^2(z) - 22\ln(z))z^2 \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $L_\mu = \ln(\mu/m_b)$ и мы сохранили члены разложения по z до членов z^2 включительно.

Численные расчеты показывают, что это приближение дает точность порядка 0.01% для $z = (0.26)^2$.

3. Заключение

В работе получено численное значение константы перенормировки волновой функции тяжелого кварка. Высокая точность результата основана на использовании алгоритма Лапорта, метода секторного разложения и представления Меллина–Барнеса. Полученная оценка выражения с точностью 0.01% согласуется с соответствующим аналитическим выражением.

Вышеперечисленные методы будут нами использованы также для более сложных случаев.

Работа выполнена в рамках темы РА №170 и проекта МНТЦ А-1606.

ЛИТЕРАТУРА

1. **K.Melnikov, T. van Ritbergen.** Phys. Lett. B, **482**, 99 (2000), hep-ph/0005131.
2. **C.Greub, T.Hurth, D.Wyler.** Phys. Rev. D, **54**, 3350 (1996), hep-ph/9603404.
3. **H.M.Asatrian, H.H.Asatryan, A.Hovhannisyan.** Phys. Lett. B, **585**, 263 (2004), hep-ph/0401038.
4. **H.M.Asatrian, H.H.Asatryan, A.Hovhannisyan, V.Poghosyan.** Mod. Phys. Lett. A, **19**, 603 (2004), hep-ph/0311187.
5. **H.H.Asatryan, H.M.Asatrian.** Phys. Rev. D, **66**, 034009 (2002), hep-ph/0204341.
6. **A.Ali, H.Asatrian, C.Greub.** Phys. Lett. B, **429**, 87 (1998), hep-ph/9803314.
7. **K.Bieri, C.Greub.** Eur. Phys. J. C, **33**, 277 (2004), hep-ph/0310214.
8. **F.Borzumati, C.Greub, Y.Yamada.** hep-ph/0305063.
9. **C.Greub, M.Walker.** hep-ph/0110388.
10. **M.Misiak, M.Steinhauser.** Nucl. Phys. B, **583**, 277 (2004), hep-ph/0401041.
11. **M.Gorbahn, U.Haisch.** Nucl. Phys. B, **713**, 291 (2005), hep-ph/0411071.

12. **M.Gorbahn, U.Haisch, M.Misiak.** Phys. Rev. Lett., **95**, 102004 (2005), hep-ph/0504194.
13. **M.Czakon, U.Haisch, M.Misiak.** JHEP, **0703**, 008 (2007), hep-ph/0612329.
14. **I.Blokland, A.Czarnecki, M.Misiak, M.Slusarczyk, F.Tkachov.** Phys. Rev. D, **72**, 033014 (2005), hep-ph/0506055.
15. **K.Melnikov, A.Mitov.** Phys. Lett. B, **620**, 69 (2005), hep-ph/0505097.
16. **H.M.Asatryan, A.Hovhannisyan, V.Poghosyan, T.Ewerth, C.Greub, T.Hurth.** Nucl. Phys. B, **749**, 325 (2006), hep-ph/0605009.
17. **H.M.Asatryan, T.Ewerth, A.Ferroglia, P.Gambino, C.Greub.** Nucl. Phys. B, **762**, 212 (2007), hep-ph/0607316.
18. **H.M.Asatryan, C.Greub, B.D.Pecjak.** Phys. Rev. D, **78**, 114028 (2008), arXiv:0810.0987.
19. **H.M.Asatryan, T.Ewerth, H.Gabrielyan, C.Greub.** Phys. Lett. B, **647**, 173 (2007), hep-ph/0611123.
20. **А.Габриелян.** Изв. НАН Армении, Физика, **44**, 155 (2009).
21. **A.J.Buras.** “Weak Hamiltonian, CP violation and rare decays”, in “Probing the Standard Model of Particle Interactions”, F.David and R.Gupta, ed., pp. 281–359, North Holland, Les Houches, 1997. hep-ph/9806471.
22. **K.Melnikov, T. van Ritbergen.** Nucl. Phys. B, **515**, 591 (2000), hep-ph/0005131.
23. **F.V.Tkachov.** Phys. Lett. B, **100**, 65 (1981).
24. **K.G.Chetyrkin, F.V.Tkachov.** Nucl. Phys. B, **192**, 159 (1981).
25. **C.Anastasiou, A.Lazopoulos.** JHEP, **0407**, 046 (2004), hep-ph/0404258.
26. **T.Binoth, G. Heinrich.** Nucl. Phys. B, **585**, 741 (2000), hep-ph/0004013.
27. **C. Greub, T. Hurth, D. Wyler.** Phys. Rev. D, **54**, 3350 (1996), hep-ph/9603404.

ԾԱՆՐ ՔՎԱՐԿԻ ԱԼԻՔՍԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՎԵՐԱՆՈՐՄԱՎՈՐՄԱՆ ԿԱԽՈՒՄԸ
ՔՔԴ-ՈՒՄ c-ՔՎԱՐԿԻ ԶԱՆԳՎԱԾԻՑ

Հ.Մ. ԱՍՍՏՐՅԱՆ, Հ.Հ. ԱՍՍՏՐՅԱՆ, Հ.Ա. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ

Ներկայացված է ծանր քվարկի ալիքային ֆունկցիայի վերանորմավորման հաստատունի, c-քվարկային օղակների ներդրմամբ, թվային հաշվարկը խոտորումների տեսության բարձր կարգի ուղղումների հաշվարկման մեթոդներով: Աշխատանքում կիրառված են Լա-պորտայի ավտոմատացված ալգորիթմը, սեկտորային վերծանման մեթոդը և Մելլին–Բար-նեսի ներկայացումը:

DEPENDENCE OF THE HEAVY QUARK WAVE FUNCTION RENORMALIZATION ON THE c-QUARK MASS IN QCD

H.M. ASATRIAN, H.H. ASATRYAN, H.A. GABRIELYAN

We present results for the renormalization of the heavy quark wave function, taking into account the contribution of c-quark loops. This has been achieved by the usage of numerical methods for the calculation of high order corrections of perturbation theory. In calculations the Laporta's automated algorithm, the sector decomposition techniques and the Mellin–Barnes representation have been used.