Известия НАН Армении, Физика, т.44, №1, с.3-9 (2009)

УДК 530.145

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БОЛИНА ДЛЯ ДВУМЕРНОГО СИНГУЛЯРНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

К.С. АРАМЯН

Арцахский государственный университет,
Степанакерт, Нагорно-Карабахская Республика

(Поступила в редакцию 27 июня 2008 г.)

Рассмотрено преобразование Болина кругового сингулярного осциллятора в постоянном магнитном поле. Показано, что это преобразование приводит к двумерной задаче Кеплера с дополнительным центробежным потенциалом в присутствии постоянного магнитного поля, напряженность которого убывает обратно пропорционально расстоянию от центра притяжения системы. Построен энергетический спектр полученной системы.

1. Введение

Задачи Кулона и изотропного осциллятора (в d-мерном пространстве) являются наиболее известными системами классической и квантовой меха-ник, обладающими скрытой симметрией. Несмотря на качественное различие этих систем, они обладают рядом общих черт. Так, еще в XIX веке отмечалось сходство осциллятора и задачи Кулона, проявляющееся, в частности, в эллиптичности классических траекторий. В начале XX века незави-симо Болиным и Леви-Чивитой было установлено соответствие между классической (двумерной) задачей Кеплера и круговым осциллятором [1]. Было показано, что траектории, соответствующие этим задачам, связаны преоб-разованием

$$w = z^2 , \tag{1}$$

где комплексные координаты $z = x_1 + ix_2/\sqrt{2}$ и $w = y_1 + iy_2/\sqrt{2}$ параметри-зуют положение частицы в осцилляторной и в кеплеровой задачах. На классическом уровне это соответствие "один на один". Однако, было известно, что квантовомеханическая задача Кулона переходит в четные уровни кругового осциллятора. Проведя редукцию квантового кругового осциллятора по дискретной группе $Z/2$ (действующей как оператор четности), мы получим, что, в то время как четные уровни переходят в двумерную задачу Кулона, нечетные переходят в двумерную задачу Кулона в присутствии потока бесконечно тонкого соленоида, снабжающего систему спином $1/2$ [2]. Иными словами, нечетным состояниям кругового осциллятора отвечает двумерная задача Кулона со спином $1/2$, имеющая по построению скрытую симметрию двумерной задачи Кулона. Преобразование Болина–Леви–Чивиты прямо рас-пространяется на пространства постоянной кривизны: сферу и гиперболоид [3]. Более того, имеется его аналог, связывающий системы со степенными потенциалами [4], приводящий на квантовом уровне [2] к системам с дроб-ным спином, введенным в физический оборот в работе [5] .Это обобщенное преобразование, которое уместно назвать преобразованием Болина–Леви–Чивиты–Арнольда, было распространено на поверхности непостоянной кривизны Болина в недавней работе автора [6].

С другой стороны, круговой осциллятор допускает естественные обобщения, точно решаемые как на классическом, так и на квантовом уровне. Наиболее простым обощением такого вида является круговой осциллятор в постоянном магнитном поле. Если прибавить к этой системе центробежный потенциал, то есть потенциал с обратной зависимостью от квадрата расстояния, то система опять же останется точнорешаемой. Подобная систе-ма (без магнитного поля) обычно называется сингулярным круговым осциллятором, иногда – осциллятором Винтерница–Смородинского. В связи с этим стоит отметить недавний цикл работ [7], в котором была предложена и исследована альтернативная модель сферического осциллятора: в отличие от стандартной модели сферического осциллятора Хиггса она остается точно-решаемой после включения постоянного магнитного поля. Ее точнорешаемый сингулярный аналог (то есть точнорешаемый альтернативный сфери-ческий сингулярный осциллятор) был предложен в работе [8]. Если в допол-нение к магнитному полю ввести в систему центробежный потенциал, то система остается точнорешаемой. Ясно, что преобразование Болина такого модифицированного осциллятора приведет к некоторой точнорешаемой модификации задачи Кеплера. Ее изучению посвящена представляемая работа. Она организована следующим образом. Сперва мы дадим гамильтоново опи-сание классического кругового осциллятора с двумерным центробежным по-тенциалом (именуемого также двумерным сингулярным осциллятором) в постоянном магнитном поле. Затем, совершив классическое преобразование Болина–Леви–Чивиты, мы получим двумерную задачу Кеплера с центро-бежным потенциалом, взаимодействующую с магнитным полем специфической конфигурации. Наконец, мы найдем энергетический спектр построенной системы.

2. Классическое преобразование Болина

Классический сингулярный осциллятор в постоянном магнитном поле удобно описывать в терминах фазового пространства $T*C$, на котором заданы следующие канонические скобки Пуассона и гамильтониан:

$$\{\pi, z\} = 1, \quad \{\bar{\pi}, \bar{z}\} = 1, \quad \{\pi, \bar{\pi}\} = iB, \tag{2}$$

$$H_{\text{osc}} = \pi\bar{\pi} + \frac{\alpha^2}{4z\bar{z}} + w^2 z\bar{z}. \tag{3}$$

Здесь и далее

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{\sqrt{2}}, \quad \pi = \frac{p_1 - ip_2}{\sqrt{2}}. \tag{4}$$

Вращательный момент осциллятора задается выражением

$$J = -i(z\pi - \bar{z}\bar{\pi}) + Bz\bar{z}. \tag{5}$$

Теперь совершим преобразование Болина $(z, \pi) \to (w, p)$, каноничес-кое на всем фазовом пространстве (за исключением начала координат, в ко-тором оно сингулярно):

$$w = z^2, \; p = \frac{\pi}{2z}: \; \{w, w\} = 0, \; \{w, p\} = 1, \; \{p, \bar{p}\} = i\frac{B}{4|w|}. \tag{6}$$

Это преобразование переводит изоэнергетические поверхности сингулярного осциллятора $H_{\text{osc}} = E_{\text{osc}}$ в изоэнергетические поверхности сингулярной задачи Кулона, где

$$H_c = \varepsilon, \quad H_c = p\bar{p} + \frac{\bar{\alpha}^2}{4|w|^2} - \frac{\gamma}{|w|}, \tag{7}$$

где мы ввели обозначения

$$\varepsilon = -\frac{\omega^2}{4}, \; \gamma = \frac{E_{\text{osc}}}{4}, \; \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{2}. \tag{8}$$

Как видно из (6), в полученной системе имеется магнитное поле с напря-женностью

$$\bar{B} = \frac{B}{4|w|}. \tag{9}$$

Итак, мы показали, что двумерный сингулярный осциллятор в постоянном магнитном поле переводится преобразованием Болина в двумерную задачу Кеплера с дополнительным центробежным потенциалом, характеризуемую наличием магнитного поля, напряженность которого обратно пропорциональна рассоянию до центра. Ясно, что, поскольку исходная система является классически интегрируемой, то полученная система также интегри-руема. Найти такое решение не составляет никакого труда.

Конечно, такое магнитное поле трудно породить какой-либо элементарной конфигурацией (движущихся) зарядов или магнитов: его поток через окружность радиуса r равен $Br/2$. Но следует отметить, что постоянное магнитное поле также является не более, чем идеализацией реальных магнитных полей, неоднородностью которых можно пренебречь в условиях данной задачи. С этой точки зрения можно сказать, что (9) аппроксимирует магнитное поле, напряженность которого медленно спадает с расстоянием. Что касается сингулярности магнитного поля в силовом центре системы, то она “прикрыта” центробежным потенциалом, так что эффективное движение пробной частицы происходит в области с конечным значением напряжен-ности магнитного поля. Одним словом, построенная модель вполне может иметь отношение к реальности.

Отметим, что при преобразовании (6) вращательный момент исходной системы (5) переходит в удвоенный вращательный момент полученной системы:

$$J = 2\tilde{J}, \quad \tilde{J} = -i(wp - \overline{wp}) + 2\tilde{B}\left(|w|\right) w\overline{w}. \tag{10}$$

Это удвоение вращательного момента обеспечивает возможность введения в систему спина $1/2$, о котором говорилось во введении.

3. Квантовое преобразование Болина

Теперь рассмотрим вкратце квантовомеханический аналог приведенного преобразования. Для облегчения восприятия мы ограничимся построением энергетического спектра, опустив рассмотрение явного вида волновых функций. При необходимости их можно без труда выписать.

Квантовомеханическая система, сооответствующая гамильтоновой системе (2), (3), задается гамильтонианом (3), где классические импульсы $\pi, \overline{\pi}$ заменены операторами

$$\widehat{\pi} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} + \frac{B\overline{z}}{2}, \quad \widehat{\overline{\pi}} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \overline{z}} - \frac{Bz}{2}. \tag{11}$$

Перейдя к полярным координатам, $z = \sqrt{2} r e^{i\phi}$, мы приведем этот гамильтониан к виду

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r\partial r} + i\frac{B}{\hbar}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial^2}{r^2\partial\phi^2}\right) + \frac{\left(\omega^2 + \frac{B^2}{4}\right)r^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2r^2}. \tag{12}$$

Квантовый оператор вращательного момента (5) в полярных координатах выглядит так:

$$\widehat{J} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}. \tag{13}$$

Чтобы найти спектр системы, рассмотрим спектральную задачу

$$\widehat{H}\psi = E\psi, \quad \widehat{J}\psi = \hbar m \psi. \tag{14}$$

Она легко разделяется при выборе волновой функции вида

$$\psi = e^{im\phi}\psi_{mE}(r), \quad |m| = 0,1,\ldots \tag{15}$$

Подставив в спектральную задачу, мы придем к следующему радиальному уравнению Шредингера (см., например, [9]):

$$\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{\partial\psi}{r\partial r}\right)=\left(E-\frac{\hbar Bm}{2}+\frac{\left(\omega^2+\frac{B^2}{4}\right)r^2}{2}+\frac{\alpha^2+\hbar^2m^2}{r^2}\right)\psi. \qquad (16)$$

Как видим, оно совпадает с радиальным уравнением Шредингера кругового осциллятора с энергией

$$\tilde{E}=E+\frac{\hbar Bm}{2},$$

частотой

$$\tilde{\omega}=\sqrt{\omega^2+\frac{B^2}{4}}$$

и собственным значением вращательного момента (“магнитным числом”)

$$\tilde{m}=\sqrt{m^2+\frac{\alpha^2}{\hbar^2}}$$

Для последней системы спектр задается выражением $\tilde{E}=\hbar\tilde{\omega}(2n_r+\tilde{m}+1)$, где $n_r=1, 2, \ldots$ есть радиальное квантовое число. Отсюда мы немедленно нахо-дим выражение для квантового гамильтониана (3):

$$\left|E_{n_r,m}-\frac{\hbar Bm}{2}\right|=\hbar\sqrt{\omega^2+\frac{B^2}{4}}\left(2n_r+\sqrt{m^2+\frac{\alpha^2}{\hbar^2}}+1\right),\ n_r=0,1,\ldots;\ |m|=n_r=0,1,\ldots \qquad (17)$$

Теперь мы можем совершить квантовое преобразование Болина для спектральной задачи (14). Его удобно совершить в полярных координатах, в которых оно имеет вид:

$$2R=r^2,\quad 2\phi=\varphi, \qquad (18)$$

где R играет роль радиальной координаты преобразований системы, а ϕ – уг-ловой. Прямыми преобразованиями убеждаемся, что уравнение Шредингера гамильтониана (12) переходит в уравнение Шредингера двумерной задачи Кулона с центробежным потенциалом, взаимодействующим с магнитным полем (9). При этом параметры полученной системы связаны с параметрами исходной соотношениями (8), то есть так же, как и в классическом случае. Как видно из (10), при преобразовании Болина вдвое уменьшается вращательный момент (см. также (13), (18)), так что магнитное число (собственное значение вращательного момента) M связано с магнитным числом исходной задачи выражением

$$M=\frac{m}{2}. \qquad (19)$$

Подставив его в (17) и воспользовавшись соотношениями (8), мы получим, после несложных математических преобразований, спектр двумерной задачи Кулона с центробежным потенциалом, взаимодействующим с магнитным полем (9):

$$\varepsilon_{n_r,M} = -\frac{\left(\gamma - \frac{\hbar BM}{2}\right)^2}{\hbar^2\left(n_r + \sqrt{M^2 + \frac{\tilde{\alpha}}{\hbar^2}} + \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{B^2}{16}. \tag{20}$$

Здесь следует сделать небольшой комментарий. Как мы отмечали в начале статьи, на классическом уровне исходная система связана с полученной каноническим преобразованием, то есть между ними имеется взаимно-однозначное соответствие. Однако легко видеть, что при преобразовании Болина (6) мы совершаем редукцию по дискретной группе Z_2, задающей в исходной системе пространственные отражения: $z \to -z$. На классическом уровне это не приводит к каким-либо следствиям. Но на квантовом картина иная: результирующая система оказывается заданной не на плоскости, а на двулистной римановой поверхности (2). Поэтому для получения корректного результата мы должны выбрать лишь четные состояния осциллятора, то есть состояния с $m = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$. Они перейдут в состояния модифицированной задачи Кулона с $M = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$. А нечетные состояния с $m = 1, 3\ldots$ будут описывать ситуацию, когда в результирующей системе имеется спин $1/2$. Спектр будет задаваться тем же выражением, с той разницей, что магнитное квантовое число будет принимать полуцелые значения $M = \pm 1/2, \pm 3/2, \ldots$.

Рассмотрим подробнее выражение для спектра. Как видим, он, вооб-ще говоря, невырожден при наличии магнитного поля и центробежного чле-на. Но при определенных значениях параметров в системе может получиться случайное вырождение. Более того, даже при отсутствии центробежного чле-на вырождение в системе отсутствует. При этом наличие магнитного поля разрушает пространственную четность системы: это приводит к тому, что спектр зависит от магнитного числа M, а не его абсолютного значения. При этом, в отличие от обычной двумерной задачи Кулона, система с магнитным полем может иметь нулевые значения энергии.

4. Заключение

Таким образом, мы построили точнорешаемое обобщение задачи Ку-лона, характеризуемое, во-первых, наличием центробежного члена, во-вторых, наличием магнитного поля, обратно пропорционального расстоянию до центра притяжения системы. Более того, снабдив систему спином $1/2$, мы оставили ее точнорешаемой. Отметим, что построенная система может быть полезной в моделировании реальных ситуаций, когда внешнее магнитное поле нельзя считать постоянным. То, что его напряженность стремится к бесконечности в центре координатной системы, несущественно, поскольку центробежный потенциал делает эту область недоступной для проникнове-ния пробной частицы.

В начале статьи мы отмечали модель сферического осциллятора [7] (и его сингулярную версию [8]), остающуюся интегрируемой в присутствии постоянного магнитного поля. По нашему мнению, стоило бы, совершив над ним манипуляции, аналогичные проделанным выше, получить сферический аналог модели, представленной в этой работе.

В заключение хочу поблагодарить А. Нерсесяна за предложенную за-дачу и полезные обсуждения и Е. Саркисян за проверку некоторых формул. Работа выполнена в рамках проекта “Квантовомеханические исследования для физики конденсированных сред”, финансируемого Министерством об-разования и науки Нагорно-Карабахской республики.

ЛИТЕРАТУРА

1. **K.Bolin.** Bull. Astr., **28**, 144 (1911); **T.Levi-Civita.** Opere Mathematiche, **2,** 411 (1906).
2. **A.Nersessian, V.M.Antonjan, M.Tsulaia.** Mod. Phys. Lett. A, **11**, 1605 (1966).
3. **A.Nersessian, G.Pogosyan**. Phys. Rev. A, **63** 020103 (R) (2001); **A.Nersessian.** Phys. Atom. Nucl., **65,** 1070 (2002), [arXiv:math-ph\00110049].
4. **В.И.Арнольд.** Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. М., Наука, 1989.
5 **J.F.Schonfield.** Nucl.Phys. B, **185,** 117 (1981); **F.Wilczek.** Phys. Rev. Lett., **48,** 1144 (1982); ibid., **49**, 957 (1982); **A.Goldhaber.** Phys. Rev. Lett., **49,** 905 (1982).
6. **К.С.Арамян.** Изв. НАН Армении, Физика, **41**, 412 (2006).
7. **S.Belucci, A.Nersessian.** Phys. Rev. D, **67**, 065013 (2003); **S.Belucci, A.Nersessian, A. Yeranyan.** Phys. Rev. D, **70**, 085013 (2004); ibid., **70,** 045006 (2004); **A.Nersessian, A.Yeranyan.** J. Phys. A, **37**, 2791 (2004); **L.Mardoyan, A.Nersessian.** Phys. Rev. B, **72** 233303 (2005); **S.Belucci, L.Mardoyan, A.Nersessian.** Phys. Lett. B, **636**, 137 (2006); **L.Mardoyan.** The alternative model of spherical oscillator. [ArXiv:0708.1868]. **М.А.Алексанян, К.С.Арамян.** Изв. НАН Армении, Физика, **42**, 75 (2007).
8. **К.С.Арамян.** Интегрируемая модель двумерного сингулярного сферического осциллятора в постоянном магнитном поле. ТМФ (2008).
9. **Л.Г.Мардоян, Г.С.Погосян, А.Н.Сисакян, В.М.Тер-Антонян.** Квантовые системы со скрытой симметрией. М., Физматлит, 2006.

BOHLIN TRANSFORMATION FOR A TWO-DIMENSIONAL SINGULAR OSCILLATOR IN A CONSTANT MAGNETIC FIELD

K. S. ARAMYAN

The Bohlin transformation of a two-dimensional singular oscillator in a constant magnetic field is considered. We show that the resulting system is a two-dimensional Kepler system with a centrifugal potential specified by the presence of a magnetic field whose strength is inversely proportional to the distance from the forced center. The energy spectrum of this system is derived.