Известия НАН Армении, Физика, т.43, №6, с.461-467 (2008)

УДК 537.62

МНОГОМЕРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В АНТИФЕРРОМАГНИТНЫХ МОДЕЛЯХ И ЛЯПУНОВСКИЙ ПОКАЗАТЕЛЬ, СВЯЗАННЫЙ С ПЛАТО НАМАГНИЧЕННОСТИ

В.В. ОГАННИСЯН

Ереванский физический институт им А.И. Алиханяна, Армения

(Поступила в редакцию 14 мая 2008 г.)

Рассмотрена модель Гейзенберга с двух- и трехчастичными взаимодействиями на рекурсивной лестнице в сильном магнитном поле. Выведены рекуррентные соотношения для ветвей статистической суммы модели Изинга с двух- и трехчастичными взаимодействиями. В качестве рекурсивной решетки выбрана зигзагообразная лестница. В антиферромагнитном случае наблюдаются плато намагниченности при низких температурах. Вычислен ляпуновский показатель для трехмерного отображения при низких температурах. Показано, что для некоторых значений параметров двойного и тройного взаимодействия в антиферромагнитном случае максимальный ляпуновский показатель приближается к нулю.

1. Введение

Как известно, используя динамический подход, можно получить рекурсивные соотношения для статистической суммы на рекуррентных (иерархических) решетках [1,2]. Термодинамические свойства физической системы, а именно, свободная энергия, намагниченность, магнитная восприимчивость, теплоемкость и энтропия могут быть получены из статистической суммы.

Статистические физические модели на решетках можно рассматривать как промежуточные системы между одномерным (1D) и двумерным (2D) решеточными моделями. Они были предметом все более и более интенсивного изучения в последние десятилетия [3-6]. Исследование спиновых систем на зигзагообразных лестницах представляет интерес по двум причинам: во-первых, они более легки для теоретического рассмотрения, чем двумерные, и во-вторых, эти системы демонстрируют множество интересных явлений, потому что здесь квантовые колебания крайне важны. В природе такие материалы, как $\mathrm{Sr}_{n-1}\mathrm{Cu}_{n+1}\mathrm{O}_{2n}$, $\mathrm{Sr}_{1-n}\mathrm{Cu}_{n}\mathrm{O}_{2}$, $\mathrm{La}_{4+4n}\mathrm{Cu}_{8+2n}\mathrm{O}_{14+8n}$, имеют зигзагообразную структуру [7-12].

Необычные свойства ^{3}He сделали из него хорошего кандидата для модели на лестницах. Экспериментально установлено, что первый и второй слои твердого ^{3}He имеют треугольную решеточную структуру, а третий слой в некоторых случаях можно рассматривать как жидкость на решетке когаме [13-15].

Рекурсивные решетки позволяют изучать статистические свойства системы методами теории динамических систем для случая одномерных отображений [16]. Для многомерных отображений эти методы были использованы в работах [17,18]. Плато намагниченности хорошо демонстрируется в антиферромагнитных моделях на квадратных, зигзагообразных и когаме лестницах. С помощью динамических (рекурсивных) методов были исследованы зигзагообразные лестницы. Для статистической суммы эти отображения многомерны. Было показано, что в антиферромагнитных моделях с многочастичными взаимодействиями появляются плато намагниченности [19,20].

В настоящей работе, используя динамический метод для модели Изинга с двух- и трехчастичными взаимодействиями на зигзагообразной лестнице во внешнем магнитном поле, исследована намагниченность системы. Рассмотрен также ляпуновский показатель на зигзагообразной решетке. Показано, что в антиферромагнитных моделях на плато намагниченности существует некоторое значение магнитного поля, для которого максимальный ляпуновский показатель приблизительно равен нулю.

2. Гамильтониан модели с двух- и трехчастичными взаимодействиями на зигзагообразной лестнице

Рассмотрим антиферромагнитную модель Гейзенберга с двух- и трехчастичными взаимодействиями на рекурсивной решетке. В общем случае гамильтониан такой системы имеет следующий вид:

$$H = H_{ex} + H_z, \tag{1}$$

где H_{ex} – гамильтониан, обусловленный обменными спиновыми взаимодействиями, а H_z – гамильтониан Зеемана. Для зигзагообразной лестницы с двух и трехчастичными взаимодействиями H_{ex} можно записать в виде

$$H_{ex} = J_2 \sum_{pairs} \left(P_2 + P_2^{-1}\right) - J_3 \sum_{pairs} \left(P_3 + P_3^{-1}\right), \tag{2}$$

где J_2 и J_3 – константы взаимодействия, а P_2 и P_3 – операторы двойного и тройного взаимодействия, выведенные Дираком [21]:

$$P_{ij} = \frac{1+\sigma_i\sigma_j}{2}, \quad P_{ijk} = P_{ij}P_{jk} = \frac{\left(1+\sigma_i\sigma_j\right)\left(1+\sigma_j\sigma_k\right)}{4}, \tag{3}$$

где σ_i – матрицы Паули. Гамильтониан Зеемана имеет вид

$$H_z = -\sum_i \frac{\gamma}{2} \hbar B \sigma_i, \tag{4}$$

где γ – гиромагнитное отношение молекул, B – магнитное поле, $\hbar$ – постоянная Планка. Подставляя (2) и (4) в (1), для гамильтониана системы получим

$$H = \left(J_2/2\right) \sum_{<i,j>} \left(1+\sigma_i\sigma_j\right) - \left(J_3/2\right) \sum_{<i,j,k>} \left(1+\sigma_i\sigma_j+\sigma_j\sigma_k+\sigma_k\sigma_i\right) - \sum_i \hbar B\sigma_i. \tag{5}$$

Из опытов известно, что в сильном магнитном поле спин частицы направлен по направлению поля и принемает значения ±1, т.е. в сильном магнитном поле антиферромагнетную модель Гейзенберга можно аппроксимировать моделью Изинга. В этом случае гамильтониан (5) не меняет свой вид, а σ_i принимают значения ±1.

3. Рекуррентные соотношения для ветвей статистической суммы

Для гамильтониана (5) статистическая сумма имеет следующий вид:

$$Z = \sum_{<\sigma_i>} \exp\{-\beta H\}. \tag{6}$$

Для получения статистической суммы в виде рекуррентных соотношений, разрежем решетку с центрального треугольника (со спинами $\Delta^0 = \{\sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1\}$) на две части, обозначив их через $g_n(\sigma_0, \sigma_{-1})$ и $g_n(\sigma_0, \sigma_1)$ (см. рис.1). После этого продолжим эту процедуру. Таким образом, для статистической суммы получим

$$Z = \sum_{<\sigma_{-1}\sigma_0\sigma_1>} \exp\{\Delta^0\} g_n(\sigma_0, \sigma_{-1}) g_n(\sigma_0, \sigma_1), \tag{7}$$

где $\exp\{\Delta^0\}$ – вклад центрального треугольника, $g_n(\sigma_0, \sigma_{-1})$ и $g_n(\sigma_0, \sigma_1)$ – левой и правой ветвей лестницы. Очевидно, что $g_n(\sigma_0, \sigma_{-1})$ можно выразить через $g_{n-1}(\sigma_{-1}, \sigma_{-2})$. В итоге получим следующие рекуррентные соотношения для ветвей статистической суммы [19]:

$$x_n = \frac{ab^2c^2x_{n-1} + y_{n-1}}{az_{n-1} + b^2c^2}, \quad y_n = \frac{abz_{n-1} + b}{az_{n-1} + b^2c^2}, \quad z_n = \frac{abx_{n-1} + by_{n-1}}{az_{n-1} + b^2c^2}, \tag{8}$$

где $x_n = g_n(++)/g_n(--)$, $y_n = g_n(+-)/g_n(--)$, $z_n = g_n(-+)/g_n(--)$, $a = \exp\{2h/T\}$, $b = \exp\{-J_2/T\}$, $c = \exp\{J_3/T\}$ и $h = \gamma\hbar B/2$.

В общем случае намагниченность в точке σ_i может быть представлена в следуюшем виде:

$$m_i = \sum_{\sigma_1\sigma_0\sigma_{-1}} \sigma_i \exp\{\Delta^0\} g_n(\sigma_0\sigma_{-1}) g_n(\sigma_0\sigma_1) \Big/ Z. \tag{9}$$

Используя рекуррентные соотношения (8), для намагниченности в точках σ_0 и σ_1 получим:

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{a^3b^2c^2x_n^2 + 2a^2x_ny_n + ay_n^2 - a^2z_n^2 - 2az_n - b^2c^2}{a^3b^2c^2x_n^2 + 2a^2x_ny_n + ay_n^2 + a^2z_n^2 + b^2c^2}, \\ m_1 &= \frac{a^3b^2c^2x_n^2 - ay_n^2 + a^2z_n^2 - b^2c^2}{a^3b^2c^2x_n^2 + 2a^2x_ny_n + ay_n^2 + a^2z_n^2 + 2az + b^2c^2}. \end{aligned} \tag{10}$$

В соотношенях (10) x_n, y_n и z_n получаются следующим образом: выбираются

произвольные начальные условия x_0, y_0 и z_0, затем подставляя эти значения в (8), определяем x_1, y_1 и z_1 и повторяя эту процедуру *n* раз, находим x_n, y_n и z_n.

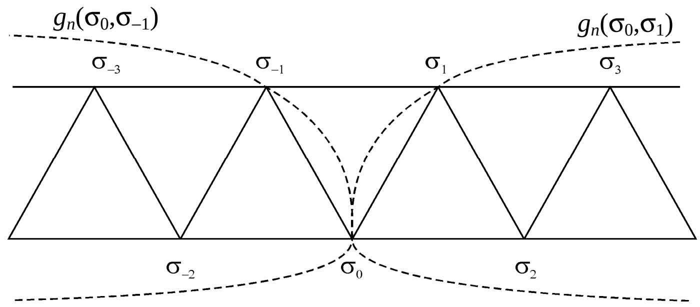

Рис.1. Зигзагообразная решетка.

На рис.2 показано поведение намагниченности во внешнем магнитном поле при T = 0.05 мК. Как известно, при сравнительно высоких температурах ($T \approx 1$ мК), в антиферромагнитном случае кривая намагниченности имеет монотонную структуру ланжевеновского типа [19]. В нашем случае при низких температурах на кривой намагниченности в точках $m = 0$ и $m = 1/3$ наблюдаются плато намагниченности.

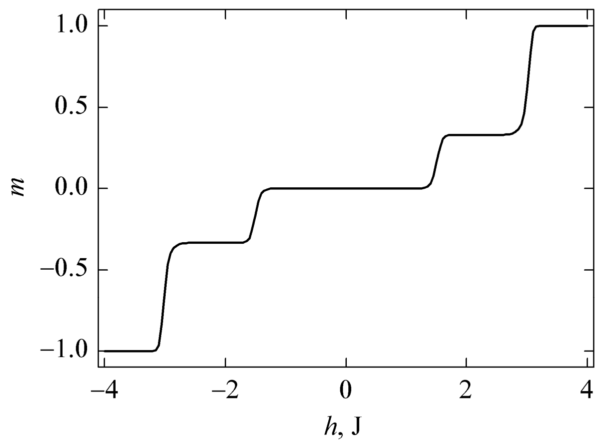

Рис.2. График намагниченности при $J_2 = 3$, $J_3 = 1$, $T = 0.05$ мК.

4. Ляпуновский показатель на плато намагниченности

Вначале дадим определение ляпуновского показателя для одномерного случая. Для отображения $x_{n+1} = f(x_n)$ ляпуновский показатель характеризует экспоненциальное разбегание двух соседних точек после n итераций [22]. По определению

$$\varepsilon e^{\lambda(x)} = \left| f^n(x+\varepsilon) - f^n(x) \right|, \tag{11}$$

что в пределе при $\varepsilon \to 0$ и $n \to \infty$ дает точную формулу для ляпуновского по казателя:

$$\lambda(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{n}\ln\left|\left(f^{n}(x+\varepsilon)-f^{n}(x)\right)/\varepsilon\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|df^{n}(x)/dx\right|. \qquad (12)$$

В многомерном случае с размерностью d существуют d показателей для различных направлений в пространстве:

$$e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_d}=\lim_{n\to\infty}\left(\text{собственные значения произведения}\prod_{i=0}^{n-1}J(\mathbf{x}_i)\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad (13)$$

где $J(\mathbf{x})=\partial G_i/\partial x_j$ – якобиан отображения $\mathbf{x}_{n+1}=G(\mathbf{x}_n)$. Для отображения (8) якобиан имеет следующий вид:

$$J(x_i,y_i,z_i)=\begin{vmatrix}\dfrac{ab^2c^2}{az_i+b^2c^2} & \dfrac{1}{az_i+b^2c^2} & \dfrac{-a^2b^2c^2x_i-ay_i}{(az_i+b^2c^2)^2}\\ 0 & 0 & \dfrac{ab^3c^2-ab}{(az_i+b^2c^2)^2}\\ \dfrac{ab}{az_i+b^2c^2} & \dfrac{b}{az_i+b^2c^2} & \dfrac{-a^2bx_i-aby_i}{(az_i+b^2c^2)^2}\end{vmatrix}. \qquad (14)$$

Для ляпуновского показателя получим:

$$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\prod_{i=0}^{n-1}J(x_i,y_i,z_i)\,. \qquad (15)$$

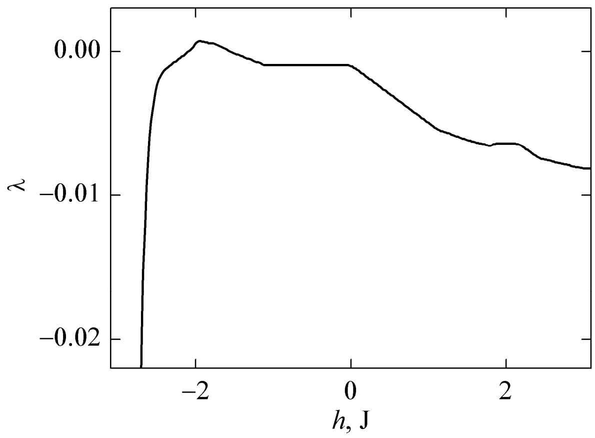

Рис.3. Зависимость ляпуновского показателя от внешнего магнитного поля при $J_2 = 3$, $J_3 = 1$, $T = 0.05$ мК.

Имея выражения (15) для ляпуновского показателя, можно рассчитать его значения, зависящие от магнитного поля (h) при фиксированных константах взаимодействия (J_2, J_3) и температуре (T). В частности, если взять те значения магнитного поля, при которых появляется магнитное плато, то существуют значения h, при которых максимальное значение ляпуновского показателя приближается к нулю (15), что свидетельствует об отсутствии бифуркационной точки (см. рис.3). Если максимальный ляпуновский показатель для физических систем равен нулю, то это соответствует фазовому переходу второго рода. Отсутствие бифуркационной точки свидетельствует о том, что не существует фазового перехода.

5. Заключение

Используя динамический подход, выведены рекуррентные соотношения для ветвей статистической суммы модели Изинга с двух- и трехчастичными взаимодействиями на зигзагообразной лестнице. Показано, что во внешнем магнитном поле на кривой намагниченности появляются магнитные плато в точках $m = 0$ и $m = 1/3$ при определенных значениях параметров J_2, J_3, T. На этом магнитном плато существуют значения магнитного поля, при которых максимальное значение ляпуновского показателя приближается к нулю.

Отметим, что в сильном магнитном поле антиферромагнитную модель Гейзенберга можно аппроксимировать O(3) дискретной моделью. Ляпуновский показатель для зигзагообразной лестницы можно рассчитать, применяя метод трансфер-матриц.

ЛИТЕРАТУРА

1. **C.S.O.Yokoi, M.J. de Oliveira, S.R.Salinas.** Phys. Rev. Lett., **54**, 163 (1985).
2. **M.H.R.Tragtenberg, C.S.O.Yokoi.** Phys. Rev. E, **52**, 2187 (1995).
3. **E.Dagotto, T.M.Rice.** Science, **271**, 618 (1996).
4. **K.Hijii, A.Kitazawa, K.Nomura.** Phys. Rev. B, **72**, 014449 (2005).
5. **F.Mila.** Eur. Phys. J. B, **6**, 201 (1998).
6. **D.C.Cabra, A.Honekcer, P.Pujol.** Eur. Phys. J. B, **13**, 55 (2000).
7. **T.M.Rice, S.Gopalan, M.Sigrist.** Europhys. Lett., **23**, 445 (1994).
8. **H.J.Schulz.** Phys. Rev. B, **34**, 6372 (1986).
9. **I.Affleck.** Phys. Rev. B, **37**, 5186 (1988).
10. **D.S.Rokhsar, S.A.Kivelson.** Phys. Rev. Lett., **61**, 2376 (1988).
11. **T.M.Rice.** Z. Phyz. B, **103**, 165 (1997).
12. **B.G.Levi.** Physics Today, October 1996, p.17.
13. **M.Roger, J.H.Hetherington, J.M.Delrieu.** Rev. Mod. Phys., **55**, 1 (1983).
14. **H.Godfrin, D.D.Osheroff.** Phys. Rev. B, **38**, 4492 (1988).
15. **T.A.Arakelyan, V.R.Ohanyan, L.N.Ananikyan, N.S.Ananikian, M.Roger.** Phys. Rev. B, **67**, 024424 (2003).
16. **N.S.Ananikian, S.K.Dallakian, N.Sh.Izmailian, K.A.Ogannesian.** Fractals, **5**, 175 (1997).
17. **N.S.Ananikian, A.R.Avakian, N.Sh.Izmailian.** Physica A, **172**, 391 (1991).
18. **A.Z.Akheyan, N.S.Ananikian.** J. Phys. A, **29**, 721 (1996).
19. **V.V.Hovhannisyan, L.N.Ananikyan, N.S.Ananikian.** Int. J. Mod. Phys. B, **21**, 3567 (2007).
20. **V.V.Hovhannisyan, N.S.Ananikian.** Phys. Lett. A, **372**, 3363 (2008).
21. **P.A.M.Dirac.** The Principles of Quantum Mechanics. Oxford, Clarendon, 1947.
22. **Г.Шустер.** Детерминированный хаос. М., Мир, 1988.

Բազմաչափ արտապատկերումները հակաֆեռոմագնիսական մո-
դելներում և Լյապունովի ցուցիչները մագնիսական հարթակներով

Վ.Վ.Հովնաննիսյան

Դիտարկված է Հայզենբերգի մոդելը՝ երկակի և եռակի փոխազդեցություններով, ռեկուրսիվ ցանցի վրա ուժեղ մագնիսական դաշտում: Երկակի և եռակի փոխազդեցություններով Իզինգի մոդելի վիճակագրական գումարի ճյուղերի համար դուրս են բերված անդրադարձ առնչություններ: Որպես անդրադարձ ցանց ընտրված է սղոցաձև աստիճանը: Հակաֆեռոմագնիսական դեպքում դիտվում են մագնիսական հարթակներ՝ ցածր ջերմաստիճաններում: Հաշվարկված են Լյապու-նովի ցուցիչները եռաչափ արտապատկերումների համար՝ ցածր ջերմաստիճանների դեպքում: Ցույց է տրված, որ հակաֆեռոմագնիսական դեպքում երկակի և եռակի փոխազդեցությունների որոշակի արժեքների դեպքում Լյապունովի մաքսիմալ ցուցիչը մոտենում է զրոյի:

MULTIDIMENSIONAL MAPPINGS IN ANTIFERROMAGNETIC MODELS AND LYAPUNOV EXPONENTS WITH THE MAGNETIZATION PLATEAU

V.V. HOVHANNISYAN

We consider the Heisenberg model with two- and three-spin exchange interactions on a recursive ladder in a strong magnetic field. Recurrent relations for branches of the partition function of the Ising model with two- and three-spin exchange interactions are deduced. As a recursive lattice the zigzag ladder is chosen. In the antiferromagnetic case magnetization plateau are observed at low temperatures. Lyapunov exponents for the three-dimensional mapping at low temperatures are calculated. It is shown that for some values of two- and three-spin exchange parameters in the antiferromagnetic case the maximum of the Lyapunov exponent approaches zero.