

УДК 530.145

ГАМИЛЬТОНОВО ОПИСАНИЕ СИСТЕМ С ЛАГРАНЖИАНАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВНЕШНИХ КРИВИЗН, НА ИСКРИВЛЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Д.А. АГАМАЛЯН

Ереванский государственный университет, Армения

(Поступила в редакцию 11 июля 2008 г.)

Предложен способ гамильтонова описания систем на искривленных пространствах, с репараметризационно-инвариантными лагранжианами общего положения (т.е. являющихся функциями внешних кривизн траекторий частицы), основанный на использовании формул Френе для подвижного репера. Показано, что алгебры связей систем на пространствах постоянной кривизны и евклидовых пространствах изоморфны друг другу.

1. Введение

Как известно, лагранжево описание спиновых частиц требует введения дополнительных степеней свободы. Как правило, это достигается расширением исходного пространства грассмановыми переменными, что составляет основу “псевдоклассического” подхода [1]. Можно также расширить пространство коммутирующими переменными, что, по существу, является лагранжевой формулировкой подхода Сурье к гамильтонову описанию спиновых частиц и связано с т.н. методом орбит [2]. Альтернативой может быть введение дополнительных степеней свободы посредством высших производных пространственно-временных координат. В этом случае для соблюдения репараметризационной и Пуанкаре-инвариантности действие должно иметь вид

$$S = \int L(k_1, \dots, k_N) ds. \quad (1)$$

Здесь k_I (где I меняется от 1 до N) обозначают репараметризационные ин-варианты (внешние кривизны) мировой линии системы ($0 < I \leq D-1$, где D – размерность пространства), а ds – ее натуральный параметр:

$$ds = \begin{cases} |d\mathbf{x}| & \text{для неизотропных кривых,} \\ |d^2\mathbf{x}|^{1/2} & \text{для изотропных кривых,} \end{cases} \quad (2)$$

где $\mathbf{x}$ – радиус-вектор D -мерного пространства.

Отметим, что N -ая внешняя кривизна неизотропной кривой зависит от производных $(N+1)$ -го порядка, а изотропной – $(N+2)$ -го порядка.

Интерес к системам, описываемым действием (1), возник в контексте релятивистской физики, точнее, квантовой теории поля, благодаря работам Полякова [3]. В таком контексте

особый интерес представляли системы массивных частиц, в которых члены с высшими производными могут рассматриваться как квантовые поправки к исходному действию свободной частицы. Наиболее полно системы на неизотропных кривых, зависящие от первой и второй кривизн мировой линии, были исследованы в работах Плющая (см. [4] и ссылки в них). Прежде всего, следовало бы отметить его работы по массивным (2+1)-мерным частицам с лагранжианом, линейно зависящим от второй кривизны: эта система, полученная первоначально в работе Полякова, явилась первой и наиболее удачной лагранжевой моделью релятивистского аниона [5]. Несмотря на то, что модель Плющая не допускает формулировки в произвольном гравитационном фоне [6], ее можно непротиворечиво сформулировать на пространстве анти-де Ситтера [7].

Исследование систем с лагранжианами, зависящими от внешних кривизн, предполагает использование процедуры Дирака [8] для построения га-мильтоновых систем со связями. Он был адаптирован к системам типа (1) в цикле работ Нерсисяна [9,10]. Эта адаптация, основанная на использовании формул Френе для подвижного репера (определяющих внешние кривизны), очень геометрична: гамильтонова система формулируется в терминах координат исходного пространства, компонент подвижного репера и сопряженных им импульсов (также интерпретируемых в терминах элементов подвижного репера). Лагранжевы множители при первичных связях имеют смысл внешних кривизн мировой линии. В результате исследование систем (1) стало задачей не намного более сложной, чем исследование систем с лагранжианами, зависящими только от первых производных. Однако указанный регулярный метод был разработан лишь для систем на плоских пространствах. Что касается систем на искривленных пространствах, то они рассматривались, по-видимому, лишь в работах [6,7]. Хотя пути обобщения метода [9,10] на искривленные пространства затрагивались в работах [10], но не нашли должной разработки. Поэтому, в данной работе мы дадим гамильтонову формулировку систем, которые задаются действием (1), используя формулы Френе на искривленных пространствах, особо остановившись на системах с лагранжианами, линейно зависящими от внешних кривизн.

2. Формулы Френе и гамильтонов формализм

В этом разделе мы приведем формулы Френе для искривленных пространств и, воспользовавшись ими, дадим первичное (в смысле Дирака, т.е. без построения вторичных связей) гамильтоново описание систем (1) для искривленных пространств, аналогично [9].

При изложении мы будем полагать, что индексы i, j, k принимают значения $1, \dots, N$, и использовать следующую договоренность о скалярном произведении базисных векторов и импульсов: $\mathbf{p}_i \mathbf{p}_j \equiv p_{(i)A} g^{AB} p_{(j)B}$, $\mathbf{p}_i \mathbf{e}_j \equiv p_{(i)A} e_j^A$, $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \equiv e^{(i)A} g_{AB} e^{(j)B}$, где при суммировании индексы A и B пробегает значения от 1 до D . Будем использовать обозначение связей $\approx$, введенное Дираком, что является обозначением равенства нулю в слабом смысле (см. [9]).

Репараметризационные инварианты (внешние кривизны) $k_1, \dots, k_{D-1}$ кривых в евклидовом пространстве естественным образом определяются в терминах формул Френе для подвижного репера $\{\mathbf{e}_i\}$ (см., например, [11]). Их легко распространить на искривленные пространства:

$$\frac{d\mathbf{x}}{sd\tau} = \mathbf{e}_1, \quad \frac{D\mathbf{e}_I}{sd\tau} = k_I \mathbf{e}_{I+1} - k_{I-1} \mathbf{e}_{I-1}, \quad (3)$$

где

$$\frac{D}{d\tau} \equiv \frac{d}{d\tau} + \hat{\Gamma}(\dot{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{e}_I \mathbf{e}_J = \delta_{IJ}, \quad \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_{D+1} \equiv 0, \quad (\hat{\Gamma})_B^A \equiv \Gamma_{BC}^A \dot{x}^C,$$

причем Γ_{BC}^A есть символы Кристоффеля метрики D -мерного пространства $g_{AB}(x)$. Ясно, что I -ая внешняя кривизна зависит от производных по времени $(I+1)$ -ого порядка. В то время как $k_I, I \neq D-1$ положительны, высшая кривизна k_{D-1} (кручение) может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Если некоторая кривизна $k_I \neq 0$, то $k_\mu \neq 0$ при $\mu = 1, 2, \dots, I-1$. Обратно, если $k_I = 0$, то $k_\mu = 0$ при $\mu = I+1, \dots, D-1$.

Для того чтобы перевести формулы Френе для кривых в евклидовом пространстве в формулы Френе для неизотропных кривых в пространстве Минковского, нужно провести для некоторого индекса $\underline{I}$ преобразование

$$(\mathbf{e}_{\underline{I}}, \dot{s}k_{\underline{I}}, \dot{s}k_{\underline{I}-1}, \dot{s}) \rightarrow (i\mathbf{e}_{\underline{I}}, i\dot{s}k_{\underline{I}}, i\dot{s}k_{\underline{I}-1}, (-i)^{\delta_{\underline{I}}} \dot{s}), \quad (4)$$

в результате которого вектор $\mathbf{e}_{\underline{I}}$ становится времениподобным. При $\underline{I} = 1$ полученная кривая времениподобна, тогда как при $\underline{I} \neq 1$ – пространственно-подобна. По этой причине мы будем пользоваться евклидовой сигнатурой, специально оговаривая переход к сигнатуре Минковского.

Воспользовавшись формулами Френе (3), дадим гамильтонову формулировку для систем типа (1), сформулированных на искривленных пространствах:

$$S = \int L(k_1, \dots, k_N) sd\tau, \quad \text{где} \quad \dot{s}^2 = g_{AB} \frac{dx^A}{d\tau} \frac{dx^B}{d\tau}. \quad (5)$$

Лагранжиан системы зависит от производных $(N+1)$ -го порядка, потому мы должны заменить его эквивалентным лагранжианом, не зависящим от высших производных. Эту процедуру, так же как и последующее преобразование Лежандра можно совершить аналогично тому, как это делалось на плоских пространствах [9]. Принимая во внимание формулы Френе (3) и учитывая, что

$$\dot{s}^2 k_N^2 = (D\mathbf{e}_N / d\tau)^2 - \dot{s}^2 k_{N-1}^2,$$

мы можем заменить исходный лагранжиан следующим эквивалентным лагранжианом:

$$L = L(k_1, \dots, k_N) \dot{s} + \mathbf{p}(\dot{\mathbf{x}} - \dot{s}\mathbf{e}_1) + \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_{i-1} \left(\frac{D\mathbf{e}_{i-1}}{sd\tau} - \dot{s}k_{i-1}\mathbf{e}_i + \dot{s}k_{i-2}\mathbf{e}_{i-2} \right) - \\ - \sum_{i,j} d^{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \delta_{ij}) - L_N \left[\dot{s}k_N - \left(\left(\frac{D\mathbf{e}_N}{d\tau} \right)^2 - \dot{s}^2 k_{N-1}^2 \right)^{1/2} \right], \quad (6)$$

где $\lambda, \dot{s}, k_i, d^{ij}, \mathbf{p}_a, \mathbf{e}_i$ играют роль независимых переменных. Коэффициент L_N в последнем слагаемом получается в результате вариации по k_N .

Теперь совершим преобразование Лежандра для лагранжиана (6). Переменные $\mathbf{p}_a$ играют роль импульсов, сопряженных $\mathbf{e}_a$, а импульсы, сопряженные $(\dot{s}, k_a, d_{ij})$, приводят к тривиальным связям

$$p^s \approx 0, \quad p^a \approx 0, \quad p^{ij} \approx 0. \quad (7)$$

Поскольку мы полагаем $k_N \neq 0$, $L_{,N} \neq 0$ (где $L_{,N}$ – производная L по k_N), то получаем, что импульс, сопряженный $\mathbf{e}_N$, имеет вид

$$\mathbf{p}_N = \dot{s} L_{,N} \frac{D\mathbf{e}_N / d\tau}{\left((D\mathbf{e}_N / d\tau)^2 - \dot{s}^2 k_{N-1}^2 \right)^{1/2}}. \quad (8)$$

Отсюда, с учетом формул Френе, получаем следующие связи:

$$\chi_{N,N} \equiv \mathbf{p}_N \mathbf{e}_N \approx 0, \quad \chi_{N,\alpha} = \mathbf{p}_N \mathbf{e}_\alpha \approx 0, \quad \text{где } \alpha = 1, 2, \dots, N-2, \quad (9)$$

$$\Phi_{N,N} = \mathbf{p}_N^2 - (\mathbf{p}_N \mathbf{e}_{N-1})^2 - L_{,N}^2 \approx \tilde{\Phi}_{NN} - L_{,N}^2 \approx 0. \quad (10)$$

Совершив преобразование Лежандра, получим, с учетом этих связей, следующий полный гамильтониан:

$$H_T = H + \lambda^{(s)} p_s + \lambda^{(k)a} p^a + \lambda_{(d)ij} p^{ij}, \quad (11)$$

где

$$H = \dot{s} \left[\phi_{0,1} + \sum_a k_a \phi_{a,a+1} \right] + \lambda \Phi_{N,N} + \sum_{i,j} d^{ij} u_{ij} + \sum_\alpha \lambda_\alpha \chi_{N,\alpha} + \lambda_N \chi_{N,N}, \quad (12)$$

$$u_{ij} \equiv \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \delta_{ij}, \quad \phi_{a,a+1} \equiv \tilde{\phi}_{a,a+1} - L_{,a}, \quad \phi_{0,1} \equiv \tilde{\phi}_{0,1} + \sum_i k_i L_{,i} - L, \quad (13)$$

а $\lambda_\dots$ – лагранжевы множители.

Стабилизация (7), проведенная при помощи процедуры Дирака, порождает вторичные связи

$$u_{ij} \approx 0, \quad \phi_{0,1} + \sum_a k_a \phi_{a,a+1} \approx 0 \Rightarrow H \approx 0, \quad (14)$$

$$\phi_{a,a+1} = -F_{,Na} (k_N - 2\lambda F_N), \quad (k_N - 2\lambda F_N) F_{,NN} \approx 0. \quad (15)$$

Поскольку $F_{,NN} \neq 0$, то поэтапно заключаем, что

$$\phi_{0,1} \approx 0, \quad \phi_{a,a+1} \approx 0, \quad \lambda = k_N / 2F_N. \quad (16)$$

Теперь, исключив связи (7), получим гамильтонову систему, описываемую гамильтонианом (12) и симплектической структурой

$$\omega_N = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^N d\mathbf{p}_i \wedge d\mathbf{e}_i. \quad (17)$$

Выражения (9), (10) задают в редуцированной системе первичные связи. Выражения (15), (16) либо определяют переменные k_a, k_N как функции от $\tilde{\phi}_{0,1}, \tilde{\phi}_{a,a+1}$, либо задают связи,

при которых переменные k_a, k_N играют роль лагранжевых множителей.

3. Лагранжианы, линейные по кривизмам

Специфицируем построенную систему для лагранжианов, линейно зависящих от внешних кривизн:

$$L = c_0 + \sum_{i=1}^N c_i k_i. \quad (18)$$

Она будет описываться симплектической структурой (17) и гамильтонианом

$$H = \dot{s} \left[(\boldsymbol{\pi} \mathbf{e}_1 - c_0) + \sum_{i=1}^N k_{i-1} (\phi_{i-1,i} - c_{i-1}) + \frac{k_N}{2c_N} (\Phi_{N,N} - c_N^2) + \sum_{i,j=1}^N d_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \delta_{ij}) \right], \quad (19)$$

в котором первичные связи заданы выражениями

$$\boldsymbol{\pi} \mathbf{e}_1 \approx c_0, \quad \boldsymbol{\pi} \equiv \mathbf{p} - \boldsymbol{\Gamma}, \quad \boldsymbol{\Gamma}_A \equiv \sum_{i=1}^N \Gamma_{AB}^C p_{(i)C} e_i^B, \quad (20)$$

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j - \delta_{ij} \approx 0, \quad (21)$$

$$\mathbf{p}_N \mathbf{e}_N \approx 0, \quad \mathbf{p}_N \mathbf{e}_{i-2} \approx 0, \quad (22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{i-1,i} \equiv \mathbf{p}_{i-1} \mathbf{e}_i - \mathbf{p}_i \mathbf{e}_{i-1} \approx c_{i-1}, \\ \Phi_{N,N} \equiv \mathbf{p}_N^2 - \sum_{i=1}^N (\mathbf{p}_N \mathbf{e}_i)^2 \approx c_N^2. \end{array} \right. \quad (23)$$

Теперь введем следующие функции:

$$\tilde{\phi}_{0,i} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{e}_i, \quad \tilde{\phi}_{i,j} = \mathbf{p}_i \mathbf{e}_j - \mathbf{p}_j \mathbf{e}_i, \quad \tilde{\Phi}_{00} = \mathbf{p} \hat{L} \mathbf{p}, \quad \tilde{\Phi}_{0i} = \mathbf{p} \hat{L} \mathbf{p}_i, \quad \tilde{\Phi}_{ij} = \mathbf{p}_i \hat{L} \mathbf{p}_j, \quad (24)$$

где $\hat{L} = \hat{I} - \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$.

Алгебра скобок Пуассона функций $\tilde{\phi}_{i,j}$, $\tilde{\Phi}_{ij}$, так же, как и их скобки Пуассона с $\boldsymbol{\pi} \mathbf{e}_i$, $\mathbf{p} \mathbf{r}_i$, $\boldsymbol{\pi}^2$ не зависят от метрики подстилающего пространства. В то же время скобки Пуассона функций $\boldsymbol{\pi} \mathbf{e}_i$, $\mathbf{p} \mathbf{r}_i$, $\boldsymbol{\pi}^2$ имеют вид

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\pi} \mathbf{e}_i, \boldsymbol{\pi} \mathbf{e}_j\} &= R(\mathbf{e}_{[i}, \mathbf{e}_{j]}), \quad \{\mathbf{p} \mathbf{r}_i, \mathbf{p} \mathbf{r}_j\} = R(\mathbf{p}_{[i}, \mathbf{p}_{j]}), \\ \{\boldsymbol{\pi} \mathbf{e}_i, \mathbf{p} \mathbf{r}_j\} &= R(\mathbf{e}_i, \mathbf{p}_j) - \boldsymbol{\pi}^2 \delta_{ij}, \quad \{\boldsymbol{\pi} \mathbf{e}_i, \boldsymbol{\pi}^2\} = 2R(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{e}_i), \quad \{\mathbf{p} \mathbf{r}_i, \boldsymbol{\pi}^2\} = 2R(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{p}_i), \end{aligned}$$

где

$$R(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \sum_{i=1}^N R(\mathbf{p}_i | \mathbf{e}_i, \mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Не нарушая общности, мы можем наложить на систему калибровочные условия

$$\chi_{N,N-1} \equiv \mathbf{p}_N \mathbf{e}_{N-1} \approx 0, \quad \chi_{a,a-\kappa} \equiv \mathbf{p}_a \mathbf{e}_{a-\kappa} \approx 0, \quad \kappa = 0, \dots, a-1. \quad (25)$$

Заменив связи (25), запишем более широким набором

$$\chi_{ij} = \mathbf{p}_i \mathbf{e}_j \approx 0, \quad i \geq j. \quad (26)$$

Стабилизировав эти связи, $\dot{\chi}_{ij} = \{\chi_{ij}, H\} \approx 0$, зафиксируем значения лагранжевых множителей d_{ij}

$$d_{ij} = \frac{\delta_{ij}(k_i c_i - k_{i-1} c_{i-1} - \delta_{1,i} c_0)}{2}. \quad (27)$$

Отсюда можем немедленно сделать вывод, что при переносе системы с евклидова пространства на пространство постоянной кривизны мы не получим качественных различий в ее свойствах. Действительно, тензор Римана пространства постоянной кривизны задается выражением

$$R(\mathbf{a} | \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \frac{R_0}{D(D-1)} ((\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) - (\mathbf{ad})(\mathbf{bc})). \quad (28)$$

Отсюда заключаем, что $R(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, так что функции (24) образуют замкнутую алгебру. Следовательно, все вторичные связи системы, а также ее фиксированные лагранжевы множители являются функциями от (24). А это означает, что полная алгебра связей системы (18) на пространстве постоянной кривизны изоморфна алгебре связей системы на плоском пространстве.

Это все, что можно сказать о системе с линейным лагранжианом общего положения. Для более детальной информации необходимо знать значения входящих в лагранжиан констант, а также размерность и симметрии объемлющего пространства.

Таким образом, в работе разработана гамильтонова формулировка для систем на искривленных пространствах, с репараметризационно-инвариантными лагранжианами, зависящими от внешних кривизн траектории (т.е. с репараметризационно-инвариантными лагранжианами наиболее общего вида). В последующем мы попытаемся построить, опираясь на разработанный формализм, модели для описания распространения в среде "спинового света", т.е. учета спиральности фотона при прохождении света в среде. С этой точки зрения модель геометрической спиноптики с лагранжианом, зависящим от внешней кривизны, выглядит очень привлекательно из-за ее наглядности.

Я благодарен А.Нерсисяну за постановку задачи и полезные обсуждения, а также за помощь при оформлении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **F.A. Berezin, M.S. Marinov.** JETP Lett., **21**, 320 (1975); Ann. Phys. (N.Y), **104**, 336 (1977).
2. **A.A. Kirillov.** Elements of the theory of representation. Berlin, Springer-Verlag, 1976.
B. Kostant. Lecture Notes in Mathematics, **170**, 87 (1970).
J.M. Souriau. Structures des Systemes Dynamiques. Paris, Dunod, 1970.
3. **A.M. Polyakov.** Nucl. Phys. B, **268**, 406 (1986); Mod. Phys. Lett. A, **3**, 325 (1988).
4. **M.S. Plyushchay.** Nucl. Phys. B, **362**, 54 (1991); **Y.A. Kuznetsov, M.S. Plyushchay.** Nucl. Phys. B, **389**, 181 (1993).
5. **M. S. Plyushchay.** Mod. Phys. Lett. A, **4**, 837 (1989); Mod. Phys. Lett. A, **4**, 2747 (1989); Phys. Lett. B, **243**, 383 (1990).
6. **D. Zoller.** Phys. Rev. Lett., **65**, 2236 (1990).
7. **V.V. Nesterenko, A. Feoli, G. Scarpetta.** Class. Quant. Grav., **13**, 1201 (1996).

8. **P.A.M. Dirac.** The principles of quantum mechanics. Oxford, Clarendon, 1958.
9. **A. Nersessian.** Theor. Math. Phys., **117**, 1214 (1998); Phys. Lett. B, **473**, 94 (2000).
10. **A. Nersessian.** Theor. Math. Phys., **126**, 147 (2001); Czech. J. Phys., **50**, 1309 (2000).
11. **М.М. Постников.** Лекции по геометрии. Семестр III: Гладкие многообразия. М., Наука, 1987.

Կորացած տարածությունների վրա արտաքին կորությունից կախված լազրանժիաններով համակարգի համիլտոնյան նկարագրությունը

Դ.Ա.Աղամալյան

Առաջարկված է կորացած տարածությունների մեջ համակարգերի համիլտոնյան նկարագրության մեթոդ ընդհանուր տեսքի լազրանժիաններով, որոնք ռեպարամետրիզացիոն-ինվարիանտ են (այսինքն ֆունկցիա են մասնիկի հետագծի արտաքին կորություններից), որը հիմնված է Ֆրենեի՝ շարժական ռեպերի համար բանաձևերի վրա: Ցույց է տրված, որ կապերի համակարգի հանրահաշիվը կորացած տարածությունների և էվլիդյան տարածությունների մեջ իզոմորֆ են միմյանց:

HAMILTONIAN DESCRIPTION OF SYSTEMS WITH THE LAGRANGIANS DEPENDING ON EXTRINSIC CURVATURES ON CURVED SPACES

D.A. AGHAMALYAN

We suggest a method of the Hamiltonian description of the systems on curved spaces, with the generic reparametrization-invariant Lagrangians (i.e., the Lagrangians which are the functions of the extrinsic curvature of the particle path). The suggested method is based on the use of Frenet formulas for a moving frame. It is shown that the algebras of constraints for the systems on Euclidean and constant-curvature spaces are isomorphic to each other.