

УДК 621.372

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СЛОИСТЫХ СРЕД КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ В РЕГУЛЯРНОМ ВОЛНОВОДЕ

Э.А. БЕГЛОЯН

Ереванский физический институт им. А.И. Алиханяна

(Поступила в редакцию 12 апреля 2007 г.)

Исследованы электродинамические свойства слоистых сред конечной толщины, состоящих из последовательности диэлектрических пластин, разделенных друг от друга воздушными прослойками. Методом характеристических матриц рассчитаны коэффициенты прохождения и отражения волны через такую среду. Показано, что стопка пластин в волноводе обладает чередующимися полосами прозрачности и непрозрачности. Исследован эффект, при котором волна, возбужденная в стопке пластин в определенной частотной области, не может выйти за пределы стопки.

Рассмотрим регулярный цилиндрический волновод произвольного поперечного сечения, заполненный конечной последовательностью диэлектрических пластин толщиной d ($\epsilon \neq 1$) и расстоянием a ($\epsilon = 1$) между ними. Начало координат находится на первой границе стопки, а ось oz направлена параллельно оси волновода. На стопку пластин в направлении оси oz падает волна с частотой ω .

Найдем коэффициенты отражения и прохождения волны. Задачу будем решать методом характеристических матриц [1,2]. В дальнейшем будем рассматривать лишь ТМ-волны, для ТЕ-волн результаты будут иметь аналогичный вид. Соответственно, в качестве потенциалов используем E_z -составляющие полей.

Решение однородного волнового уравнения в любом m -ом отсеке стопки ищем в виде волн, расходящихся от границ раздела диэлектрических сред:

$$\begin{aligned} E_{z,\omega,I}^{(m)} &= \sum_n (A_n^{+(m)} e^{-i\Gamma_n z} + A_n^{-(m)} e^{i\Gamma_n z}) \Psi_n(x, y), \\ E_{z,\omega,II}^{(m)} &= \sum_n (B_n^{+(m)} e^{-i\Gamma_n z} + B_n^{-(m)} e^{i\Gamma_n z}) \Psi_n(x, y), \\ E_{z,\omega,III}^{(m)} &= \sum_n (C_n^{+(m)} e^{-i\Gamma_n z} + C_n^{-(m)} e^{i\Gamma_n z}) \Psi_n(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

где $E_{z,\omega,I}^{(m)}$ – поле волны в воздушной прослойке, расположенной до m -ой диэлектрической пластины, $E_{z,\omega,II}^{(m)}$ – поле волны в m -ой диэлектрической пластине, $E_{z,\omega,III}^{(m)}$ – поле волны в воздушной прослойке расположенной после

m -ой диэлектрической пластины, смысл коэффициентов $A_n^{\pm(m)}$, $B_n^{\pm(m)}$, $C_n^{\pm(m)}$ понятен из рис.1, $\Psi_n(x,y)$ – собственные функции поперечного сечения волновода, n – индекс моды волноводной волны, $\gamma_n = \sqrt{\omega^2 \epsilon / c^2 - \lambda_n^2}$, $\Gamma_n = \sqrt{\omega^2 / c^2 - \lambda_n^2}$ – постоянные распространения волны в диэлектрической пластине и в воздушной прослойке, соответственно, λ_n – собственные значения первой краевой задачи для поперечного сечения волновода, индекс 1 соответствует плоскости $z_1 = mL$, индекс 2 – $z_2 = mL + d$, индекс 3 – $z_3 = (m+1)L$.

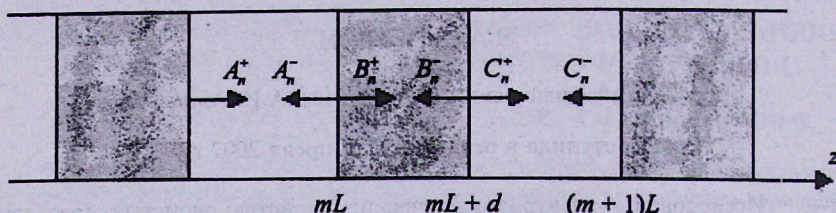


Рис.1. Геометрия сечения волновода, $L = d + a$.

Из граничных условий непрерывности тангенциальных составляющих полей на плоскостях 1,2,3 получим:

$$T_1 = M_1 T_2, \quad (2)$$

где

$$T_1 = \begin{pmatrix} e^{-i\Gamma_n z_1} & e^{i\Gamma_n z_1} \\ -\epsilon \Gamma_n e^{-i\Gamma_n z_1} & \epsilon \Gamma_n e^{i\Gamma_n z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n^{+(m)} \\ C_n^{-(m)} \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} e^{-i\Gamma_n z_1} & e^{i\Gamma_n z_1} \\ -\epsilon \Gamma_n e^{-i\Gamma_n z_1} & \epsilon \Gamma_n e^{i\Gamma_n z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^{+(m)} \\ A_n^{-(m)} \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cos(\gamma_n d) & i\gamma_n^{-1} \sin(\gamma_n d) \\ i\gamma_n \sin(\gamma_n d) & \cos(\gamma_n d) \end{pmatrix}.$$

Унимодулярная матрица M_1 является характеристической матрицей [1] диэлектрической пластины и позволяет получить однозначную связь между значениями полей на границах диэлектрической пластины.

Аналогично

$$T_2 = M_2 T_3, \quad (3)$$

где

$$M_2 = \begin{pmatrix} \cos(\Gamma_n a) & i(\epsilon \Gamma_n)^{-1} \sin(\Gamma_n a) \\ i\epsilon \Gamma_n \sin(\Gamma_n a) & \cos(\Gamma_n a) \end{pmatrix}.$$

Для полей на границах произвольного m -ого отсека из (1) и (2) получим:

$$T_3 = M T_1, \quad (4)$$

где $M = M_1 M_2$ – характеристическая матрица одного периода слоистой среды.

Значения полей на первой и последней границах слоистой среды, состоящей из N периодов, связаны соотношением

$$T_N = M^N T_1, \quad (5)$$

где

$$M^N = \begin{pmatrix} M_{11}U_{N-1}(\xi_n) - U_{N-2}(\xi_n) & M_{12}U_{N-1}(\xi_n) \\ M_{21}U_{N-1}(\xi_n) & M_{22}U_{N-1}(\xi_n) - U_{N-2}(\xi_n) \end{pmatrix},$$

$U_{N-1}(\xi_n) = \sin(N(\arccos(\xi_n)))\sqrt{1-\xi_n^2}$ — полиномы Чебышева второго рода, N — число периодов в стопке,

$$\xi_n = \cos(\gamma_n d) \cos(\Gamma_n a) - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_n}{\varepsilon \Gamma_n} - \frac{\varepsilon \Gamma_n}{\gamma_n} \right) \sin(\gamma_n d) \sin(\Gamma_n a). \quad (6)$$

Если $\xi_n = \cos(k_{z,n}L)$, то (6) совпадает с известным дисперсионным уравнением для бесконечной слоистой среды в волноводе [3].

Полученные выражения позволяют вычислить коэффициенты отражения и прохождения волны от стопки пластин. Предварительно отметим, что из унимодулярности характеристической матрицы стопки пластин M^N получается следующее рекуррентное соотношение для полиномов Чебышева второго рода:

$$U_N^2(\xi_n) + U_{N-1}^2(\xi_n) - 2\xi_n U_N(\xi_n) U_{N-1}(\xi_n) = 1.$$

С учетом этого соотношения, из (5) для коэффициентов прохождения t_n и отражения r_n n -ой моды волны через стопку пластин получим:

$$t_n = \frac{1}{1 + 4^{-1} Q_{n,N}}; \quad r_n = \frac{1}{1 + 4(Q_{n,N})^{-1}}, \quad (7)$$

$$\text{где } Q_{n,N} = \left(\frac{\gamma_n}{\varepsilon \Gamma_n} - \frac{\varepsilon \Gamma_n}{\gamma_n} \right) \sin^2(\gamma_n d) U_{N-1}^2(\xi_n).$$

При $N=1$ (7) совпадают с выражениями для коэффициентов отражения и прохождения волны через одиночную пластину в волноводе, если же в выражениях (7) подставить $a=0$, то они переходят в выражения для коэффициентов отражения и прохождения волны через одиночную пластину толщины Nd . Как следует из полученных выражений (7), стопка пластин является прозрачной для частот, удовлетворяющих условиям

$$\gamma_n d = \pi s, \quad s = \pm 1, \pm 2, \dots; \quad U_{N-1}^2(\xi_n) = 0; \quad \gamma_n = \varepsilon \Gamma_n. \quad (8)$$

Первые два условия хорошо известны из теории четырехполюсников. Что касается третьего условия, то оно для волновода [4] аналогично условию падения волны на границу раздела двух сред под углом Брюстера в безграничном пространстве.

В зависимости от параметров d, a, ε аргумент полинома Чебышева ξ_n в некоторых частотных областях может стать по модулю больше единицы, тогда $\arccos \xi_n$ является мнимой величиной (рис.2), и для этих областей пропус-

кающая способность стопки пластин для достаточно больших N стремится к нулю (рис.3).

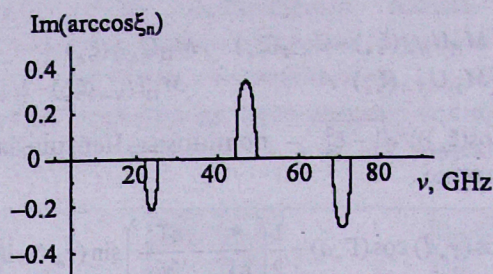


Рис.2. Зависимость мнимой части $\arccos \xi_n$ от частоты в случае круглого волновода радиуса $R = 3$ см, при следующих параметрах задачи: $d = 0.1$ см, $a = 0.5$ см, $m = 50$, $\nu = \omega/2\pi$, $n = 1$.

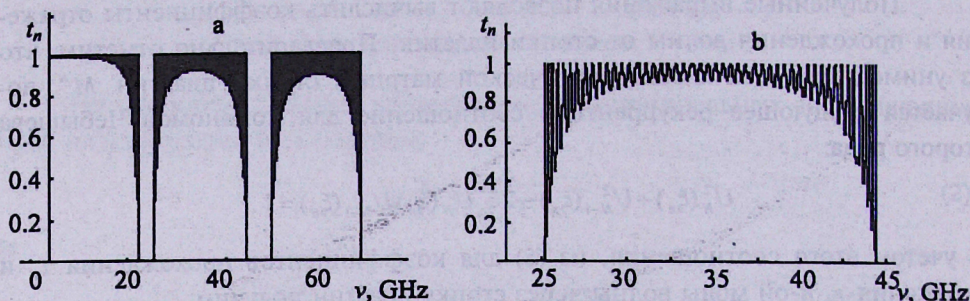


Рис.3. Зависимость коэффициента пропускания стопки из $N = 50$ диэлектрических пластин от частоты, $n = 1$.

Таким образом, аргумент полинома Чебышева (рис.2) в достаточно широких частотных полосах становится чисто мнимой величиной и для этих областей стопка пластин становится непрозрачной.

На рис.3а приведена частотная зависимость коэффициента прохождения волны через стопку из 50 диэлектрических пластин для следующих параметров задачи: $R = 3$ см, $d = 0.1$ см, $a = 0.5$ см, $\epsilon = 2$. Как следует из приведенного графика, зависимость коэффициента прохождения волны от частоты имеет вид чередующихся полос прозрачности и непрозрачности. Ширина и местоположение этих полос в частотном спектре зависит от значений d, a, ϵ .

На рис.3в приведен коэффициент прохождения волны в полосе прозрачности $\Delta\nu = 25 - 48$ ГГц. Высокочастотные осцилляции, представленные на графике, связаны с поведением функции Чебышева в этой частотной области, которая приводит к модуляции коэффициента прохождения, причем число модуляций определяется числом N периодов в стопке.

Отметим, что одна и та же частота для одних значений параметров задачи может попадать в полосу прозрачности стопки пластин, при других значениях — в полосу непрозрачности. Это утверждение проиллюстрировано на рис.4, где приведена зависимость коэффициента прохождения волны с частотой $\nu = 10$ ГГц от толщины воздушной прослойки a .

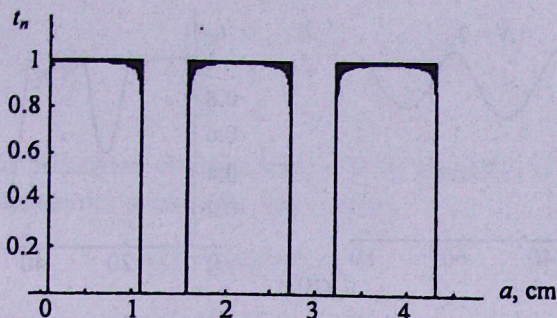


Рис.4. Зависимость коэффициента прохождения волны от толщины воздушных прослоек. $d = 0.1$ см, $\nu = 10$ ГГц, $m = 50$, $\epsilon = 2$, $R = 3$ см.

Указанные свойства слоистых сред можно использовать для создания частотных фильтров с заданной шириной полосы пропускания.

Остановимся на одном эффекте, связанном с наличием полос непрозрачности у стопки диэлектрических пластин. Предположим, что при помощи зонда в m -ой диэлектрической пластине стопки сгенерирована волна с частотой ω . Если эта частота лежит в области

$$c\lambda_n < \omega < c\lambda_n/\sqrt{\epsilon}, \quad (9)$$

где $c\lambda_n$ – критическая частота пустого волновода, $c\lambda_n/\sqrt{\epsilon}$ – критическая частота волновода, заполненного диэлектриком с проницаемостью ϵ , то волна с такой частотой не может выйти за пределы диэлектрических пластин [5]. Все остальные волны с частотами, лежащими вне области, определяемой условием (9), выйдут за пределы диэлектрической пластины.

Если же частота ω попадает в полосу непрозрачности стопки, то эта волна будет полностью отражена, пройдя несколько соседних отсеков, отстоящих от m -ого отсека как вправо, так и влево. Таким образом, сгенерированная волна будет “заперта” в окрестности m -ого отсека. Оценим ширину полосы частот, в которой “заперта” эта волна. На рис.5 приведены зависимости коэффициентов прохождения волны для стопок, состоящих из 2, 4, 6 и 8 диэлектрических пластин. Как следует из приведенных графиков, стопка, состоящая из 6-8 пластин, уже обладает сформировавшимися полосами прозрачности и непрозрачности. Это и будет являться областью, в которой “запирается” волна. Время существования “запертого” излучения определяется временем его поглощения стенками волновода и затуханием в диэлектрических пластинах.

В заключение рассмотрим случай мелкослоистой среды $\gamma_n d \ll 1$, $\Gamma_n a \ll 1$. Если разложить ξ_n в ряд по малому параметру, то с точностью до квадратичного члена получим:

$$\xi_n = 1 + \delta_n, \quad (10)$$

$$\text{где } \delta_n = 2^{-1} \left((\gamma_n d)^2 + (\Gamma_n a)^2 - (\gamma_n d)(\Gamma_n a) \left(\frac{\gamma_n}{\epsilon \Gamma_n} + \frac{\epsilon \Gamma_n}{\gamma_n} \right) \right).$$

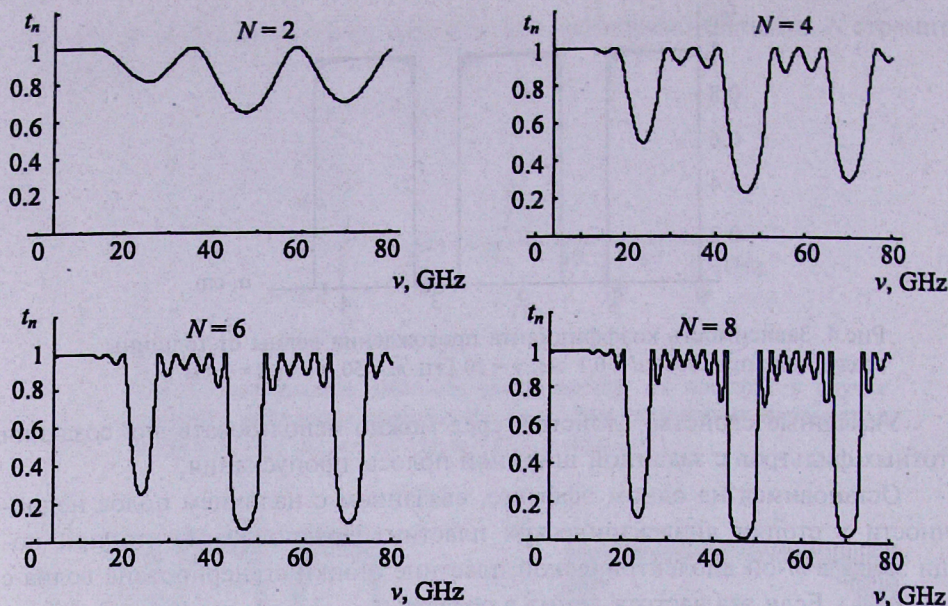


Рис.5. Зависимость коэффициента прохождения волны от частоты падающей при разном числе N пластин в стопке. Первый график соответствует случаю $N=2$, второй – $N=4$, третий – $N=6$, четвертый – $N=8$.

Если введем обозначения

$$\varepsilon_z = \frac{\varepsilon L}{\varepsilon a + d}, \quad \varepsilon_r = \frac{a + \varepsilon d}{L}, \quad \hat{\gamma}_n = \sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_z} \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r - \lambda_n^2 \right)}, \quad D = N d,$$

то характеристическую матрицу стопки можно записать следующим образом:

$$\hat{a}(\gamma_n) = \begin{pmatrix} \cos(\hat{\gamma}_n D) & i\hat{\gamma}_n^{-1} \sin(\hat{\gamma}_n D) \\ i\hat{\gamma}_n \sin(\hat{\gamma}_n D) & \cos(\hat{\gamma}_n D) \end{pmatrix} - \frac{\sin(\hat{\gamma}_n D)}{\hat{\gamma}_n L} \begin{pmatrix} M_{11} - 1 & 0 \\ 0 & M_{22} - 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Первый член в (11) совпадает с характеристической матрицей одной пластины, если под $\hat{\gamma}_n$ понимать постоянную распространения волны в этой пластине, а под D – толщину пластины. Выясним условия, при которых можно пренебречь вторым членом в (11). Для этого сравним коэффициенты отражения и прохождения для стопки из N периодов с соответствующими выражениями одиночной пластины [5]. При условии

$$\left(\sqrt{\frac{\gamma_n}{\varepsilon \Gamma_n}} + \sqrt{\frac{\varepsilon \Gamma_n}{\gamma_n}} \right) \gamma_n d \ll 1 \quad (12)$$

эти выражения совпадают с точностью до квадратичного члена и вторым членом в (11) можно пренебречь. С такой же точностью мелкослоистую среду конечной длины можно рассматривать как одну анизотропную пластину толщины D , имеющую диэлектрическую проницаемость

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}.$$

В заключение выражаю благодарность Э.Д. Газазяну и Э.М. Лазиеву за плодотворные обсуждения и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. М.Борн, Э.Вольф. Основы оптики. М., Наука, 1973.
2. Э.А.Беглоян, Э.Д.Газазян, Э.М.Лазиев. Радиотехника и электроника, 21, 164 (1976).
3. Я.Б.Файнберг, Н.А.Хижняк. ЖЭТФ, 32, 883 (1957).
4. Х.С.Арутюнян, Э.А.Беглоян, Э.М.Лазиев, Г.Г.Оксузян. Условие Брюстера в волноводе. Научное сообщение ЕФИ-286(11)-78.
5. К.А.Барсуков. ЖЭТФ, 36, 1106 (1957).

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՀԱՍՏՈՒԹՅԱՄԲ ԸԵՐՏԱՎՈՐ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ԷԼԵԿՏՐԱԴԻՆԱՄԻԿ ՀԱՏՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ԱԼԻԶՍԱՐՈՒՄ

Է.Ա. ԲԵԳԼՈՅԱՆ

Հետազոտված են կանոնավոր ալիքատարում տեղադրված և միմյանցից օդային շերտով բաժանված դիէլեկտրական քիթեղներից բաղկացած վերջավոր հաստություն ունեցող շերտավոր միջավայրի էլեկտրադինամիկ հատկությունները: Բնութագրական մատրիցների մեթոդով հաշվված են ալիքախի միջավայրում ալիքի անցման և անդրադարձման գործակիցները: Ցույց է տրված, որ ալիքատարում դիտարկվող շերտավոր միջավայրը առաջացնում է իրար հաջորդող թափանցելի և անթափանց շերտեր: Ցույց է տրված, որ որոշակի հաճախային տիրություն տարածվող էլեկտրամագնիսական ալիքը "փակվում" է շերտավոր միջավայրում և չի դուրս գալիս նրա սահմաններից:

ELECTRODYNAMIC PROPERTIES OF FINITE-LENGTH LAYERED MEDIA IN A REGULAR WAVEGUIDE

E.A. BEGHLOYAN

The electrodynamic properties of a waveguide filled with a finite-length layered medium in the form of plates, which are separated one from another by the air layer, are studied. The transmission and reflection coefficients are calculated by the response matrix method. The dependence of these coefficients on the initial wave frequency is investigated.