Известия НАН Армении, Физика, т.42, №6, с.401-406 (2007)

УДК 621.372

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В ВОЛНОВОДЕ С МОДУЛИРОВАННЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ ВБЛИЗИ ЧАСТОТЫ РЕЗОНАНСНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИГНАЛЬНОЙ ВОЛНЫ С ВОЛНОЙ МОДУЛЯЦИИ

Э.А. ГЕВОРКЯН

Московский государственный университет экономики,
статистики и информатики

(Поступила в редакцию 3 августа 2007 г.)

Рассмотрено взаимодействие поперечно-электрической (ТЕ) сигнальной волны с волной периодической модуляции заполнения волновода произвольного поперечного сечения. Волновое уравнение для потенциала ТЕ поля вблизи частоты резонансного взаимодействия между сигнальной волной и волной модуляции решено с помощью метода двухмасштабных разложений. Найдены поля в первом приближении по малым индексам модуляции заполнения волновода.

Изучение взаимодействия электромагнитных волн с периодически-модулированной в пространстве и во времени средой в волноводе представляет собой одну из фундаментальных проблем электродинамики. Интерес к указанной проблеме объясняется не только с точки зрения развития теории электродинамики периодически нестационарных и неоднородных ограниченных сред, но и с точки зрения возможности широкого практического применения подобных сред в различных областях микроэлектроники и электроники СВЧ. Так, например, ими пользуются при конструировании параметрических усилителей, брэгговских резонаторов и фильтров, преобразователей мод с использованием тонкопленочных волноводов, оптических усилителей и генераторов бегущей волны и т.д. [1,2].

Рассмотрим регулярный волновод произвольного поперечного сечения, ось которого совпадает с осью OZ некоторой декартовой системы координат. Пусть диэлектрическая и магнитная проницаемости заполнения волновода волной накачки модулированы в пространстве и во времени по гармоническому закону

$$\varepsilon=\varepsilon_0[1+m_\varepsilon\cos k_0(z-ut)],\qquad \mu=\mu_0[1+m_\mu\cos k_0(z-ut)],\tag{1}$$

где m_ε и m_μ – малые индексы модуляции, k_0 и k_0u – волновое число и частота волны модуляции, ε_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости заполнения волновода в отсутствие волны модуляции.

Рассмотрим распространение электромагнитной ТЕ волны с частотой ω_0 в подобном волноводе. Как было показано в [3–5], потенциал ТЕ поля в волноводе H_z можно представить в виде

$$H_z = \frac{\tilde{H}_z}{\mu} = \frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty} e^{i\gamma\eta}\tilde{H}_n(\xi)\,\hat{\Psi}_n(x,y)\,, \tag{2}$$

где

$$\xi = z - ut\,, \qquad \eta = \frac{z}{u} - \frac{1}{u}\int_0^{\xi}\frac{d\xi}{1-\beta^2\,\dfrac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}\,, \tag{3}$$

$\beta^2 = u^2\varepsilon_0\mu_0/c^2$ (c – скорость света в вакууме), $\hat{\psi}_n(x,y)$ – собственные функции второй краевой задачи для поперечного сечения волновода. При этом $\tilde{H}_n$ в (2) удовлетворяет волновому уравнению с периодическими коэффициентами типа Матье–Хилла, что с точностью до членов первого порядка по малым параметрам $m_\varepsilon \ll 1$, $m_\mu \ll 1$ и $\ell \ll 1$ $(\ell = (m_\varepsilon + m_\mu)/\beta^2 b)$ имеет вид

$$\frac{d^2\tilde{H}_n(s)}{ds^2} + \left(\hat{\theta}_0^n + 4\hat{\theta}_1^n\cos 2s\right)\tilde{H}_n(s) = 0\,, \tag{4}$$

где

$$s = \frac{k_0 b}{2\mu_0}\int_0^{\xi}\frac{\mu\,d\xi}{1-\beta^2\,\dfrac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}\,, \qquad b = 1-\beta^2. \tag{5}$$

$$\hat{\theta}_0^n = \frac{4}{k_0^2 b^2}\left(\hat{\chi}_0^n\right)^2, \qquad \left(\hat{\chi}_0^n\right)^2 = \frac{\left(\hat{p}_0^n u - \omega_0\right)^2}{c^2}\varepsilon_0\mu_0 - \hat{\lambda}_n^2\, b\,, \tag{6}$$

$$\hat{\theta}_{\pm 1}^n = \frac{2}{k_0^2 b^2}\left(\frac{\left(\hat{p}_0^n u - \omega_0\right)^2}{u^2} - \left(\hat{\chi}_0^n\right)^2\right)\ell - \frac{4}{k_0^2 b^2}\left(\hat{\chi}_0^n\right)^2 m_\mu\,, \tag{7}$$

$\hat{\lambda}_n$ – собственные значения второй краевой задачи для поперечного сечения волновода.

Отметим, что поперечные составляющие поля в волноводе выражаются через H_z формулами (6) и (7) работы [3].

В работе [4] для нахождения решения уравнения (4) в частотной области резонансного взаимодействия сигнальной волны с волной модуляции заполнения, определяющейся условием [3–7]

$$\left|1-\hat{\theta}_0^n\right| < \delta_n \approx m_\varepsilon \approx m_\mu \approx \ell \approx 10^{-4} - 10^{-2}\,, \tag{8}$$

был использован метод двухмасштабных разложений [8]. Суть метода состоит в том, что в области резонансного взаимодействия (8) наряду с переменной s вводится и переменная $\tilde{s}$, пропорциональная переменной s с коэффициентом пропорциональности порядка индексов модуляции. При этом масштаб s характеризует гармонические колебания в отсутствие модуляции, а масштаб $\tilde{s} = 4\widehat{\theta}_1^n s$ связан с малыми флуктуациями $4\widehat{\theta}_1^n \cos 2s$. Это дает возможность при выполнении определенных условий получить аналитические выражения для полей в области резонансного взаимодействия.

Итак, в [4] вокруг критической точки $\widehat{\theta}_0^n \approx 1$ величину $\widehat{\theta}_0^n$ разложили в ряд по степеням малой величины $\widehat{\theta}_1^n$:

$$\widehat{\theta}_0^n\left(\widehat{\theta}_1^n\right) \cong 1 + 4\widehat{\theta}_1^n \widehat{\theta}_1^{(1)n} + 16\left(\widehat{\theta}_1^n\right)^2 \widehat{\theta}_1^{(2)n} + \cdots, \tag{9}$$

а решение уравнения (4) искали в виде разложения

$$\tilde{H}_n(s,\tilde{s}) \cong \tilde{H}_n^{(0)}(s,\tilde{s}) + 4\widehat{\theta}_1^n \tilde{H}_n^{(1)}(s,\tilde{s}) + 16(\widehat{\theta}_1^n)^2 \tilde{H}_n^{(2)}(s,\tilde{s}) + \cdots . \tag{10}$$

В [4] было найдено решение уравнения (4) в нулевом приближении в виде

$$\tilde{H}_n^{(0)}(s,\tilde{s}) = A_{0n}(\tilde{s})\cos s + B_{0n}(\tilde{s})\sin s, \tag{11}$$

где величины $A_{0n}(\tilde{s})$ и $B_{0n}(\tilde{s})$ выражаются следующими формулами:

1) область осциллирующих решений $(|\widehat{\theta}_1^{(1)n}| > 1/2)$:

$$A_{0n}(\tilde{s}) = c_1 e^{i\tilde{\alpha}\tilde{s}} + c_2 e^{-i\tilde{\alpha}\tilde{s}}, \tag{12}$$

$$B_{0n}(\tilde{s}) = i\tilde{\beta}\left(c_1 e^{i\tilde{\alpha}\tilde{s}} - c_2 e^{i\tilde{\alpha}\tilde{s}}\right), \tag{13}$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\widehat{\theta}_1^{(1)n}\right)^2 - \frac{1}{4}}, \qquad \tilde{\beta} = \sqrt{\frac{\widehat{\theta}_1^{(1)n} + \frac{1}{2}}{\widehat{\theta}_1^{(1)n} - \frac{1}{2}}}; \tag{14}$$

2) область монотонных решений $(|\widehat{\theta}_1^{(1)n}| < 1/2)$:

$$A_{0n}(\tilde{s}) = c_1 e^{\tilde{\alpha}\tilde{s}} + c_2 e^{-\tilde{\alpha}\tilde{s}}, \tag{15}$$

$$B_{0n}(\tilde{s}) = \tilde{\beta}(-c_1 e^{i\tilde{\alpha}\tilde{s}} + c_2 e^{i\tilde{\alpha}\tilde{s}}), \tag{16}$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} - \left(\widehat{\theta}_1^{(1)n}\right)^2}, \qquad \tilde{\beta} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} + \widehat{\theta}_1^{(1)n}}{\frac{1}{2} - \widehat{\theta}_1^{(1)n}}}. \tag{17}$$

Отметим, что в (12), (13), (15), (16) c_1 и c_2 могут быть определены начальными условиями задачи.

Теперь перейдем к нахождению решения уравнения (4) с учетом второго члена разложения (10). Функции $\tilde{H}_n^{(1)}(s,\tilde{s})$ удовлетворяют следующему неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{\partial^2 \tilde{H}_n^{(1)}(s,\bar{s})}{\partial s^2} + \tilde{H}_n^{(1)}(s,\bar{s}) = -\frac{1}{2} A_{0n}(\bar{s})\cos 3s - \frac{1}{2} B_{0n}(\bar{s})\sin 3s \,. \tag{18}$$

Если общее решение соответствующего однородного уравнения искать методом Эйлера, а частное решение неоднородного уравнения – методом подбора, то для общего решения неоднородного уравнения (18) получим выражение

$$\tilde{H}_n^{(1)}(s,\bar{s}) = A_{1n}(\bar{s})\cos s + B_{1n}(\bar{s})\sin s + \frac{1}{16} A_{0n}(\bar{s})\cos 3s + \frac{1}{16} B_{0n}(\bar{s})\sin 3s \,, \tag{19}$$

где $A_{1n}(\bar{s})$ и $B_{1n}(\bar{s})$ – пока неизвестные коэффициенты. Для их определения воспользуемся дифференциальным уравнением, которому удовлетворяет величина $\tilde{H}_n^{(2)}(s,\bar{s})$ (см. третий член разложения (10)). Оно имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \tilde{H}_n^{(2)}(s,\bar{s})}{\partial s^2} + \tilde{H}_n^{(2)}(s,\bar{s}) &= \left[-2\frac{dB_{1n}(\bar{s})}{d\bar{s}} + \left(\frac{31}{32} - \widehat{\theta}_1^{(2)n}\right) A_{0n}(\bar{s}) - \left(\frac{1}{2} + \widehat{\theta}_1^{(1)n}\right) A_{1n}(\bar{s})\right]\cos s + \\
&+ \left[2\frac{dA_{1n}(\bar{s})}{d\bar{s}} + \left(\frac{31}{32} - \widehat{\theta}_1^{(2)n}\right) B_{0n}(\bar{s}) - \left(\frac{1}{2} - \widehat{\theta}_1^{(1)n}\right) B_{1n}(\bar{s})\right]\sin s + \\
&+ \left[-\frac{3}{8}\frac{dB_{0n}(\bar{s})}{d\bar{s}} - \frac{1}{16} A_{0n}(\bar{s})\widehat{\theta}_1^{(1)n} - \frac{1}{2} A_{1n}(\bar{s})\right]\cos 3\bar{s} + \\
&+ \left[\frac{3}{8}\frac{dA_{0n}(\bar{s})}{d\bar{s}} - \frac{1}{16} B_{0n}(\bar{s})\widehat{\theta}_1^{(1)n} - \frac{1}{2} B_{1n}(\bar{s})\right]\sin 3\bar{s} - \\
&- \frac{1}{32} A_{0n}(\bar{s})\cos 5s - \frac{1}{32} B_{0n}(\bar{s})\sin 5s \,.
\end{aligned} \tag{20}$$

Если в правой части уравнения (20) не будут отсутствовать первые два члена, то в результате получим возрастающие решения вида $s\sin s$ или $s\cos s$. Такое требование приводит к следующей неоднородной системе дифференциальных уравнений для определения $A_{1n}(\bar{s})$ и $B_{1n}(\bar{s})$:

$$\begin{aligned}
&\frac{dB_{1n}(\bar{s})}{d\bar{s}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \widehat{\theta}_1^{(1)n}\right) A_{1n}(\bar{s}) = \sigma A_{0n}(\bar{s}) \,, \\
&\frac{dA_{1n}(\bar{s})}{d\bar{s}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \widehat{\theta}_1^{(1)n}\right) B_{1n}(\bar{s}) = -\sigma B_{0n}(\bar{s}) \,,
\end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\sigma = \frac{31}{64} - \frac{1}{2}\widehat{\theta}_1^{(2)n} \,. \tag{22}$$

Решая систему (21) и подставляя найденные решения для $A_{1n}(\bar{s})$ и $B_{1n}(\bar{s})$ в (19), с учетом (12)-(17) получим следующие выражения:

1) область осциллирующих решений $(|\widehat{\theta}_1^{(1)n}| > 1/2)$:

$$\tilde{H}_n^{(1)}(s,\tilde{s})=\left[\left(\bar{c}_1+\frac{\bar{d}_{1A}}{2i\tilde{\alpha}}\tilde{s}\right)e^{i\tilde{\alpha}\tilde{s}}+\left(\bar{c}_2-\frac{\bar{d}_{2A}}{2i\tilde{\alpha}}\tilde{s}\right)e^{-i\tilde{\alpha}\tilde{s}}\right]\cos s+$$
$$+\left[\left(-\bar{c}_1 i\tilde{\beta}+\frac{\bar{d}_{1B}}{2i\tilde{\alpha}}\tilde{s}\right)e^{i\tilde{\alpha}\tilde{s}}+\left(\bar{c}_2 i\tilde{\beta}-\frac{\bar{d}_{2B}}{2i\tilde{\alpha}}\tilde{s}\right)e^{-i\tilde{\alpha}\tilde{s}}\right]\sin s+$$
$$+\frac{1}{16}\left(c_1e^{i\tilde{\alpha}\tilde{s}}+c_2e^{-i\tilde{\alpha}\tilde{s}}\right)\cos 3s+i\frac{\tilde{\beta}}{16}\left(-c_1e^{i\tilde{\alpha}\tilde{s}}+c_2e^{-i\tilde{\alpha}\tilde{s}}\right)\sin 3s\,, \tag{23}$$

где

$$\bar{d}_{1A}=-\sigma c_1\left(\tilde{\beta}\tilde{\alpha}+\bar{\gamma}^-\right),\qquad \bar{d}_{2A}=-\sigma c_2\left(\tilde{\beta}\tilde{\alpha}+\bar{\gamma}^-\right), \tag{24}$$
$$\bar{d}_{1B}=i\sigma c_1\left(\tilde{\alpha}-\bar{\gamma}^+\tilde{\beta}\right),\qquad \bar{d}_{2B}=i\sigma c_2\left(\bar{\gamma}^+\tilde{\beta}-\tilde{\alpha}\right), \tag{25}$$

$\bar{\gamma}^{\pm}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\pm\tilde{\theta}_1^{(1)n}\right)$, $\bar{c}_1$ и $\bar{c}_2$ – произвольные постоянные.

2) область монотонных решений ($|\,\tilde{\theta}_1^{(1)n}\,|<1/2$):

$$\tilde{H}_n^{(1)}(s,\tilde{s})=\left[\left(\bar{c}_1+\frac{d_{1A}}{2\bar{\alpha}}\tilde{s}\right)e^{\bar{\alpha}\tilde{s}}+\left(\bar{c}_2-\frac{d_{2A}}{2\bar{\alpha}}\tilde{s}\right)e^{-\bar{\alpha}\tilde{s}}\right]\cos s+$$
$$+\left[\left(-\bar{c}_1\bar{\beta}+\frac{d_{1B}}{2\bar{\alpha}}\tilde{s}\right)e^{\bar{\alpha}\tilde{s}}+\left(\bar{c}_2\bar{\beta}-\frac{d_{2B}}{2\bar{\alpha}}\tilde{s}\right)e^{-\bar{\alpha}\tilde{s}}\right]\sin s+ \tag{26}$$
$$+\frac{1}{16}\left(c_1e^{\bar{\alpha}\tilde{s}}+c_2e^{-\bar{\alpha}\tilde{s}}\right)\cos 3s+\frac{\bar{\beta}}{16}\left(-c_1e^{\bar{\alpha}\tilde{s}}+c_2e^{-\bar{\alpha}\tilde{s}}\right)\sin 3s\,,$$

где

$$d_{1A}=\sigma c_1\left(\bar{\beta}\bar{\alpha}-\bar{\gamma}^-\right),\qquad d_{2A}=\sigma c_2\left(\bar{\beta}\bar{\alpha}-\bar{\gamma}^-\right), \tag{27}$$
$$d_{1B}=\sigma c_1\left(\bar{\alpha}-\bar{\gamma}^+\bar{\beta}\right),\qquad d_{2B}=\sigma c_2\left(\bar{\gamma}^+\bar{\beta}-\bar{\alpha}\right). \tag{28}$$

Аналогичными рассуждениями можно найти и выражение для величины $\tilde{H}_n^{(2)}(s,\tilde{s})$ в разложении (10), а также решить задачу для поперечно-магнитной (ТМ) волны в волноводе, основываясь на результатах работы [3].

В заключение отметим, что, как показывает настоящее исследование, применение метода двумасштабных разложений для решения волнового уравнения в области резонансного взаимодействия сигнальной волны с волной модуляции заполнения волновода позволяет найти аналитические выражения для полей в любом приближении по малым индексам модуляций заполнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш.Элаши. ТИИЭР, 64, № 12, 22 (1976).
2. А.Ярив, П.Юх. Оптические волны в кристаллах. М., Мир, 1987.
3. Э.А.Геворкян. Успехи современной радиоэлектроники, № 1, 3 (2006).

4. E.A.Gevorkyan. Proc. of XI[th] International Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory. Tbilisi, October 11-13, 2006, p.21.
5. К.А.Барсуков, Э.А.Геворкян. Радиотехника и электроника. 28, № 2, 237 (1983).
6. E.A.Gevorkyan. Proc. of the International Symposium on Electromagnetic Theory. Thessaloniki, Greece, May 25-28, 1998, vol.1, p.69.
7. E.A.Gevorkyan. Proc. of the 10-th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Dniepropetrovsk, Ukraine, September 14-17, 2004, p.370.
8. Дж. Коул. Методы возмущений в прикладной математике. М., Мир, 1972.

ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԵՐԸ ՄՈԴՈՒԼԱՑՎԱԾ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՎ ԼՑՎԱԾ ԱԼԻՔԱՏԱՐՈՒՄ ԱԶԴԱՆՇԱՆԱՅԻՆ ԱԼԻՔԻ ԵՎ ՄՈԴՈՒԼԱՑՆՈՂ ԱԼԻՔԻ ՄԻՋԵՎ ՌԵԶՈՆԱՆՍԱՅԻՆ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԻՐՈՒՅԹՈՒՄ

Է.Ա. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

Դիտարկված է ազդանշանային TE ալիքի փոխազդեցությունը կամայական լայնական կտրվածքով ալիքատարի ներսում պարունակվող միջավայրը մոդուլացնող ալիքի հետ: Ալիքային հավասարումը, որին բավարարում է TE դաշտի պոտենցիալը, լուծված է երկմասշտաբային վերլուծության մեթոդով նշված ալիքների ռեզոնանսային փոխազդեցության տիրույթում: Գտնված են էլեկտրամագնիսական դաշտերը մոդուլյացիայի փոքր խորությունների առաջին մոտավորությամբ:

ELECTROMAGNETIC FIELDS IN A WAVEGUIDE WITH A MODULATED FILLING NEAR THE FREQUENCY OF RESONANT INTERACTION BETWEEN THE SIGNAL WAVE AND MODULATION WAVE

E.A. GEVORKYAN

The interaction between the transverse-electric (TE) signal wave and the periodically modulated wave in a waveguide of arbitrary cross-section is considered. The wave equation for the potential of TE field near the frequency of resonant interaction between the signal wave and modulation wave is solved, using the double-scale expansion method. The fields in the first approximation with respect to the modulation indices are obtained.