

УДК 537.86

ФОРМИРОВАНИЕ СПЕКТРА ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ПЛОСКОСТНОМ КАНАЛИРОВАНИИ СГУСТКА ПОЗИТРОНОВ С УЧЕТОМ НЕОДНОРОДНОСТИ СРЕДЫ

Л.А. ГЕВОРГЯН, Л.А. ОВСЕПЯН

Ереванский физический институт

(Поступила в редакцию 2 февраля 2007 г.)

Исследовано излучение позитрона в плоскостном канале кристалла с учетом зависимости поляризации среды от поперечной координаты. Получено выражение для спектрального распределения числа излученных фотонов единичным позитроном. В крайне мягкой и жесткой областях из-за поляризации среды не все позитроны участвуют в формировании излучения. С учетом этого получена аналитическая формула для суммарного спектрального распределения числа фотонов.

1. Введение

В работах [1,2] было показано, что поляризация среды может существенно изменить спектральные характеристики излучения одномерного осциллятора: в частности, появляется энергетический порог излучения, вблизи которого имеет место эффект сужения спектра. Гинзбургом было предложено использовать излучение одномерных осцилляторов для получения микрорадиоволн [3]. Излучение в жесткой области частот в ондуляторе без учета поляризации среды было исследовано Корхмазяном [4], а при каналировании в кристалле – Кумаховым [5]. В эксперименте [6] был получен спектр числа жестких фотонов, излученных при плоскостном каналировании позитронного пучка.

В настоящей работе развита теория излучения релятивистского позитрона при плоскостном каналировании с учетом поляризации среды, зависящей от поперечной координаты. Получена расчетная формула спектрального распределения числа фотонов излучения при плоскостном каналировании позитронного сгустка. При этом оказывается, что число мягких фотонов излучения сравнимо с числом жестких фотонов.

2. Траектории позитронов при плоскостном каналировании

Пусть релятивистский позитронный сгусток с малой угловой расходимостью и энергией $E = m_0 c^2 \gamma$ ($\gamma \gg 1$), где γ – Лоренц-фактор, $m_0 c^2$ – энергия покоя частицы, падает параллельно в плоскостной канал монокристалла. Задачу об излучении при каналировании заряженных частиц в кристалле можно рассматривать в рамках классической электродинамики, если энергии излучаемых фотонов $\hbar\omega \ll E$, где ω – частота фотона.

Для усредненного потенциала канала (перпендикулярного оси Y) выберем

параболический модельный потенциал, который хорошо описывает плоскостное каналирование позитронов [5]:

$$U(y) = U_0 \left(\frac{2}{d} y \right)^2, \quad (1)$$

где U_0 – глубина потенциальной ямы, y – поперечная координата, d – межплоскостное расстояние. Напишем уравнение движения релятивистской частицы:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (\Omega_{Ch}^2 t) y = 0, \quad (2)$$

где

$$\Omega_{Ch} = \frac{\Omega_0}{\sqrt{\gamma}}, \quad \Omega_0 = \frac{2c\sqrt{2v}}{d}, \quad v = \frac{U_0}{mc^2}. \quad (3)$$

Здесь Ω_0 – собственная частота плоскостного канала кристалла, зависящая от параметров канала U_0 и d , а Ω_{Ch} – частота колебаний позитрона в кристалле, зависящая также от энергии позитрона.

Уравнению (2) удовлетворяют синусоидальные траектории позитронов. Поскольку позитроны ступка имеют нулевую поперечную энергию, то в канале они попадают на вершину синусоидальных траекторий:

$$y(t) = \frac{d}{2} s \cos(\Omega_{Ch} t), \quad (4)$$

где s – начальные поперечные координаты позитронов в единицах $d/2$ (центру канала соответствует $s = 0$). Таким образом, позитроны осциллируют в канале с одинаковой частотой, но с разными амплитудами.

Угол Линдхарда, при котором еще имеет место явление каналирования, равен максимальному углу отклонения позитрона ($s = 1$) от продольного направления Z :

$$\vartheta_L = \sqrt{2v/\gamma}. \quad (5)$$

При плоскостном каналировании с возрастанием энергии частота колебаний, а также угол Линдхарда обратно пропорциональны $\sqrt{\gamma}$. Следовательно, при увеличении энергии позитрона его пространственный период колебаний в канале увеличивается:

$$l_{Ch} = l_0 \sqrt{\gamma}, \quad l_0 = \pi d / \sqrt{2v}. \quad (6)$$

Однако амплитуда колебаний (интенсивность излучения) зависит от начальной поперечной координаты позитрона. Поэтому позитроны ступка вносят различный вклад в суммарное излучение.

3. Зависимость поляризации среды от поперечной координаты канала

Поляризация среды определяется плотностью электронов (плазменной частотой), которые в атомной оболочке распределены неравномерно. При рассмотрении эффекта каналирования истинный потенциал заменяется усредненным, поэтому истинное распределение электронов естественно заменить усредненной плотностью, зависящей только от поперечной координаты.

Для нахождения распределения средней электронной плотности атомов кристалла воспользуемся уравнением статической модели Томаса–Ферми для потенциала поля объемных зарядов в атоме φ и уравнением Пуассона, определяющим этот потенциал посредством непрерывной электронной плотности $\rho(r)$:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} = \frac{\varphi^{3/2}}{\sqrt{r}} = -4\pi\rho(r), \quad (7)$$

где $\rho(r)$ зависит от расстояния r в поперечном направлении. Здесь r – расстояние от ядра в единицах радиуса атома $r_A = 0.885a_0/z^{1/3}$, где z – заряд ядра, а $a_0 = 0.529 \times 10^{-8} \text{ \AA}$ – первый борковский радиус атома водорода. С другой стороны, функция $\varphi(r)$ связана с потенциалом $V(r)$ следующим соотношением:

$$\varphi(r) = \frac{\mu}{Ze} rV(r). \quad (8)$$

Учитывая (7), получаем следующую связь между электронной плотностью и потенциалом атома:

$$\rho(r) \sim rV^{3/2}(r). \quad (9)$$

Усредним выражение (9) по продольным координатам канала. Используя параболический потенциал (1) и связь $r = (1-s)/a$, где $a = 2r_A/d$, получаем следующую зависимость электронной плотности от поперечной координаты s :

$$\rho(s) = \rho_A(s) + \rho_0, \quad \rho_A(s) = 20\rho_A(1-s)(s-b)^3 h(1-s)h(s-b)/a^4, \quad (10)$$

где ρ_A – средняя плотность электронов в атоме, а ρ_0 – вне атома, $b=1-a$, функция Хевисайда $h(s)$ равна единице при $s > 0$ и равна нулю при $s \leq 0$. Распределение $\rho_A(s)$ принимает свое максимальное значение $\rho_m = (135/64)\rho_A$ при $s_m = 1-a/4$. Средняя электронная плотность в атоме ρ_A в $1/a$ раза больше средней плотности по кристаллу ρ_{cryst} .

Определим поляризацию среды в канале через электронную плотность. Используя зависимость плазменной частоты $\omega_0(s) = 2c\sqrt{\pi r_0 \rho(s)}$ от $\rho(s)$, где $r_0 = 2,82(10^{-13} \text{ см})$ – классический радиус электрона, для поляризации $\eta(s)$ имеем:

$$\eta(s) = \frac{I}{\gamma} \left(\frac{\omega_0(s)}{\Omega_0} \right)^2 = \frac{\pi r_0 \rho(s)}{2\mu} d^2, \quad \mu = v\gamma. \quad (11)$$

Отметим, что поляризация среды уменьшается с увеличением энергии пучка. С учетом (10) для максимального значения поляризации имеем $\eta_m = \eta_A(s_m) = (135/64)\eta_A$, $s_m = 1-a/4$, $\eta_A = \eta_{\text{cryst}}/a$, где η_A – среднее значение поляризации среды в атоме, а η_{cryst} – ее среднее значение по кристаллу.

На рис.1 приведено распределение электронной плотности и поляризации среды в канале (110) кристалла алмаза с $U_0 = 25 \text{ эВ}$, $d = 1.26 \text{ \AA}$ [7], $a \approx 0.4$, $\rho_{\text{cryst}} \approx 10^{24} \text{ см}^{-3}$ и $\eta_{\text{cryst}} = 1.85 \times 10^{-4}$ при энергии позитрона $A = 4 \text{ ГэВ}$.

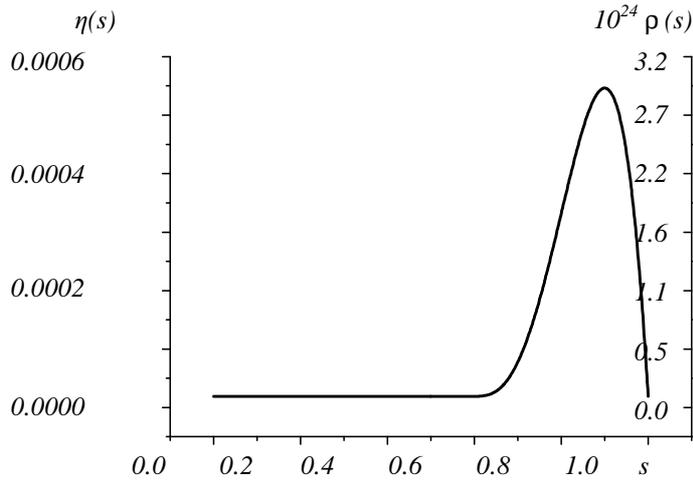


Рис.1. Зависимость электронной плотности ($\rho(s)$ в канале (110) кристалла алмаза и поляризации среды $\eta(s)$ от расстояния от центра канала при энергии позитронов $E = 4$ ГэВ.

4. Спектр числа фотонов, излученных каналированным позитроном с учетом поляризации среды

Используем формулу (32) работы [2] для частотно-углового распределения излучения основной гармоники одномерного осциллятора в среде. В этой формуле закон сохранения энергии-импульса при многократных осцилляциях выражается наличием δ -функции:

$$\delta(\theta^2 - 1/x + Q + \eta(s)/4x^2), \quad Q = 1 + q^2/2, \quad q = s\sqrt{2v\gamma}, \quad (12)$$

где θ – полярный угол излучения в единицах $1/\gamma$, $x = \omega/2\Omega_0\gamma^{3/2}$ – отношение частоты ω к максимальной частоте излучения под нулевым углом, q – параметр осцилляций позитрона с начальной поперечной координатой s , функция $\eta(s)$ характеризует поляризацию среды на расстоянии $sd/2$ от середины канала.

Для спектрального распределения числа фотонов излучения имеем:

$$\frac{dN_{ph}}{dx} = \frac{\pi\alpha n}{2} q^2 (1 + G^2(x, \eta(s))), \quad G(x, \eta(s)) = 2Qx - 1 + \frac{\eta(s)}{2x}, \quad (13)$$

где $n = L/l_{Ch} = L/l_0\sqrt{\gamma}$ – число периодов колебаний позитрона в канале на длине L , $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$ – постоянная тонкой структуры.

Частотный интервал излучения определяется из условия (12), где $\theta^2 \geq 0$:

$$\frac{1 - \sqrt{1 - \eta(1 + \mu s^2)}}{2(1 + \mu s^2)} \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{1 - \eta(1 + \mu s^2)}}{2(1 + \mu s^2)}. \quad (14)$$

Отметим, что с увеличением амплитуды колебаний $sd/2$ частотный интервал излучения сужается. В реальных случаях η – малая величина порядка $1/\gamma$. Следовательно, частотный

интервал можно представить в виде

$$\eta(s)/4 \leq x \leq I/(I + \mu s^2). \quad (15)$$

Спектральное распределение (13) получено для диспергирующей среды в области частот $\omega \in \omega_0(s)$, где диэлектрическая проницаемость представляется выражением $\varepsilon(\omega) = I - \omega_0^2(s)/\omega^2$. Следовательно, частотная область (15) ограничена снизу условием $\sqrt{x_I}/\gamma \leq x_0 \leq x$, где $x_I = (\eta_0 + \eta_m)/4$. С другой стороны, $x_0 = \eta_0/4$, поэтому фоновое значение поляризации η_0 должно удовлетворять условию $\sqrt{\eta_m}/2\gamma \ll \eta_0 \ll \eta_m$.

Спектральное распределение излучения в мягкой области частот ($x_0 \leq x \leq I$) ранее не исследовалось. Как следует из (15), в интервале (x_0, x) излучение формируется не всеми позитронами. На данной частоте x излучают только позитроны с начальными поперечными координатами s , удовлетворяющими условию

$$\eta(s) \leq 4x. \quad (16)$$

Исследуем уравнение

$$\eta(\lambda) = k\lambda^3(a - \lambda) = 4x, \quad (17)$$

где $\lambda = s - b$, $k = 4(4/a)^4(x_I - x_0)/27$. Оно имеет два действительных положительных решения:

$$\lambda_{\mp}(x) = \frac{a}{4}(I + \sqrt{I + y}) \left[I \mp \sqrt{I - \frac{2y}{\sqrt{I + y}(I + \sqrt{I + y})}} \right], \quad (18)$$

где

$$y = \frac{3}{2} \left(\frac{x - x_0}{x_I - x_0} \right)^{1/3} \left[\left(I + \sqrt{I - \frac{x - x_0}{x_I - x_0}} \right)^{1/3} + \left(I - \sqrt{I - \frac{x - x_0}{x_I - x_0}} \right)^{1/3} \right].$$

При этом решение $\lambda_-(x)$ в интервале $x_0 \leq x \leq x_I$ возрастает: $0 \leq \lambda_-(x) \leq 3a/4$, а $\lambda_+(x)$ убывает: $a \geq \lambda_+(x) \geq 3a/4$. Из (19) и (20) следует, что на частоте x излучают позитроны с амплитудами колебаний $s < s_-(x)$ и $s_+(x) \leq s$.

Как видно из рис.2, спектр числа мягких фотонов на частоте x обогащается излучением всех позитронов сгустка.

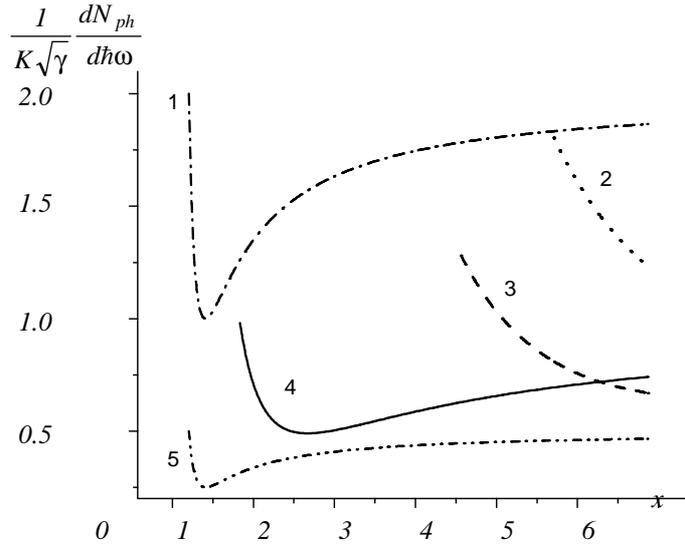


Рис 2. Частотное распределение числа мягких фотонов в области частот (ω, x_1) , излученных позитронами с энергией 4 ГэВ в плоскостном канале (110) кристалла алмаза. Через s обозначены начальные координаты позитронов в единицах $d/2$: 1 – $s = 1$, 2 – $s = 0.95$, 3 – $s = 0.8$, 4 – $s = 0.7$, 5 – $s = 0.5$.

5. Спектр числа фотонов излучения при каналировании позитронного сгустка

Пусть электроны в канале распределены следующим образом: в интервале $(b \leq s \leq c)$ p имеет зависимость (10), а в интервалах $(0 \leq s \leq b)$ и $(c \leq s \leq 1)$ $p = p_0$, где $c = a + b$. Для получения суммарного спектра числа излученных фотонов при плоскостном каналировании сгустка, состоящего из N_+ позитронов, необходимо формулу (13) усреднить по равномерному распределению начальных поперечных координат s :

$$\frac{dN_{ph}^{bunch}}{dx} = N_+ K \sqrt{\gamma} F, \quad K = \pi \alpha \frac{L}{l_0} v, \quad F(x, s, \eta(s)) = \langle s^2 (1 + G^2(x, \eta(s))) \rangle. \quad (19)$$

В интервале (ω, x_1) на частоте x вносят вклад только те позитроны сгустка, амплитуды колебаний которых находятся в интервалах $0 < s < s_-(x)$ и $s_+(x) < s < 1$. В диапазоне частот (x_1, x_2) , где $x_2 = 1/(1 + \mu)$, спектр формируется всеми каналированными позитронами. В интервале $(x_2, 1)$ на частоте x вносят вклад только позитроны с начальными поперечными координатами $s \leq s(x) = \sqrt{(1-x)/\mu x}$. После усреднения формулы получаем сумму полиномов $F_0(s) + F_A(s)$ по степеням s , где $F_0(s) = F(x, s, 0)$, а $F_A(s) = F(x, s, A(s))$. При этом $F_A(s)$ отлично от нуля в интервале $1/(1 + \mu c^2) = x_c \leq x \leq x_b = 1/(1 + \mu b^2)$. С учетом вышесказанного суммарный спектр числа фотонов имеет следующий вид:

$$\frac{dN_{ph}^{bunch}}{dx} = N_+ K \sqrt{\gamma} F(x), \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
F = & h(x-x_0)h(x_1-x)\left[F_0(l)-F_0(s_+)+F_0(s_-)+F_A(c)-F_A(s_+)+F_A(s_-)-F_A(b)\right]+ \\
& +h(x-x_1)h(x_2-x)\left[F_0(l)+F_A(c)-F_A(b)\right]+h(x-x_2)h(x_c-x)F_0(s)+ \\
& +h(x-x_c)h(x_b-x)\left[F_0(s(x))+F_A(s(x))\right]+h(x-x_b)h(l-x)F_0(s(x)).
\end{aligned}$$

Однако удобнее суммарный спектр рассчитать численным методом, с учетом зависящего от s ограничения на частоту излучения (15).

6. Заключение

Дана теория излучения при плоскостном каналировании позитронного сгустка с учетом неоднородной поляризации среды канала. При этом максимумы спектральных распределений смещаются к центру спектра. Показано, что суммарный спектр слабо зависит от частоты излучения. Однако спектр имеет три максимума: в крайне мягкой, мягкой и жесткой областях частот. Для практического применения пригоден весь широкий диапазон спектра.

ЛИТЕРАТУРА

1. **L.A.Gevorgian, N.A.Korkhmazian.** Hard undulator radiation in a dispersive medium. Preprint YFI-273(66)-77, 1977; Phys. Lett. A, **74**, 453 (1979).
2. **Л.А.Геворгян, Н.А.Корхмазян.** ЖЭТФ, **76**, 1226 (1979).
3. **В.Л.Гинзбург.** Изв. АН СССР, сер. Физ., **11**, 165 (1947).
4. **Н.А.Корхмазян.** Изв. АН АрмССР, Физика, **5**, 287 (1970).
5. **М.А.Кутакхов.** Phys. Lett. A, **57**, 17 (1976).
6. **Р.Авакян, И.Мирошниченко, Д.Мюррэй, Т.Фигут.** ЖЭТФ, **82**, 1825 (1982).
7. **В.А.Базылев, Н.К.Жеваго.** Излучение быстрых частиц в среде и во внешних полях. М., Наука, 1987.

RADIATION SPECTRUM FORMATION AT THE PLANAR CHANNELING OF A POSITRON BUNCH WITH ALLOWANCE FOR THE MEDIUM INHOMOGENEITY

L.A. GEVORGIAN, L.A. HOVSEPYAN

The radiation of a positron in a planar channel of a crystal is studied, considering the dependence of the medium polarization on the transverse coordinate. The expression for the spectral distribution of the number to radiated photons is obtained for a single positron. It is shown that because of the medium polarization in the soft and hard regions not all positrons make a contribution to the radiation formation. The analytic formula for the total spectral distribution of the number of photons is obtained.