Известия НАН Армении, Физика, т.42, №2, с.67-74 (2007)

УДК 530.14

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Т.К. МЕЛИК-БАРХУДАРОВ

АОЗТ "Лазерная техника", Ереван

(Поступила в редакцию 18 сентября 2006 г.)

Обсуждаются принципы построения квантовой теории нелинейных процессов на основе лагранжевой формулировки квантовой теории. Показано, что в рамках этой формулировки удается сохранить преемственность с классической теорией и, в частности, использовать ее методы при исследовании квантовых систем. Вычислена квантовая дисперсия нелинейного осциллятора, возбуждаемого внешним источником, и нелинейного параметрического генератора. Установлена ее роль в решении вопроса о стабильности колебаний.

С точки зрения физики то разнообразие явлений, которое мы наблюдаем в природе, обязано своим существованием в первую очередь электромагнитным взаимодействиям и их нелинейности. Мир линейных процессов слишком уныл, а пространственно-временная область, где развиваются гравитационные и ядерные процессы, за известным исключением, далека от той, в которой мы существуем. Теория электромагнитных взаимодействий развивалась последние два века и привела к созданию квантовой электродинамики, науки, равной которой нет как по широте рассматриваемых ею проблем, так и по точности ее предсказаний, проверенных в контрольных экспериментах. Что касается общей теории нелинейных процессов и, в частности, нелинейных колебаний, то она стала разрабатываться сравнительно недавно, уже после появления квантовой теории. На начальном этапе развития интересы ее ограничивались задачами классической механики, но с появлением лазеров, возродивших интерес к оптике, возникла необходимость учета как квантовой природы света, так и нелинейных эффектов, обусловленных интенсивностью лазерного излучения.

К моменту появления лазеров оптика представляла собой хорошо разработанную область знаний на основе классической электродинамики. Как писал Глаубер [1], «хотя давно было ясно, что классическая электродинамика является предельным случаем квантовой электродинамики при $\hbar \to 0$, однако не было каких-либо достаточно надежных методов, пригодных для обсуждения электродинамических проблем вблизи классического предела». По этой причине исследователи для описания оптических задач стали использовать методы, заимствованные из теории случайных процессов, среди которых упомянем метод уравнений Ланжевена и метод функций распределения [2]. И хотя эти методы оказались исключительно эффективными и сомневаться в правомерности их использования для описания задач квантовой оптики нет оснований, проблема описания оптических явлений в рамках квантовой электродинамики остается пока нерешенной. В настоящей работе мы попытаемся показать, что эта проблема может быть просто решена на основе лагранжевой формулировки квантовой электродинамики. Рассмотрение будет вестись на примере двух базовых моделей нелинейной теории колебаний.

Многие оптические эксперименты с использованием источников интенсивного монохроматического излучения допускают описание, при котором основное внимание уделяется поведению одной или нескольких мод, а остальные моды, как и в отдельных случаях среда моделируются слабыми полями. Тем самым мы имеем дело по существу с задачами нелинейной теории колебаний. Переход к квантово-теоретическому описанию позволит корректно описать как потери или усиление, если есть такой механизм, так и квантовые шумы исследуемых мод излучения. Эти шумы оказываются существенными при пороговых явлениях, а также, как будет видно ниже, определяют степень устойчивости возбуждаемых мод. С учетом сказанного мы на настоящем этапе ограничимся рассмотрением одномодового нелинейного процесса, возбуждаемого внешним источником. Обобщение на конечное число мод очевидно.

Конкретизируем рассматриваемую систему, записав действие в виде

$$S[Q,\phi,f]=S_0[Q,\phi]+S_{\text{int}}[Q,\phi,f], \tag{1}$$

$$S_0[Q,\phi]=\frac{1}{2}\int(Q(t)G_0^{-1}(t-t')Q(t')+\sum_q\phi_q(t)\Delta_q^{-1}(t-t')\phi_q(t'))dtdt', \tag{2}$$

$$S_{\text{int}}(Q,\phi,f)=\int\left(Q(t)\sum_q 2\omega_q c_q\phi_q(t)-Q(t)f(t)-V(Q(t),t)\right)dt. \tag{3}$$

Здесь $G_0^{-1}(t-t')$ и $\Delta_q^{-1}(t-t')$ – операторы, определяемые из уравнений

$$(\partial^2/\partial t^2-\omega_0^2)G_0(t-t')=\delta(t-t'), \tag{4}$$

$$(\partial^2/\partial t^2-\omega_q^2)\Delta_q(t-t')=\delta(t-t'). \tag{5}$$

$V(Q(t),t)$ – потенциальная энергия, $F(Q(t))$ – некоторая, вообще говоря, нелинейная функция, определяющая взаимодействие рассматриваемой моды $Q(t)$ с полем $\phi_q(t)$, т.е. системой, которая в зависимости от ее определения может играть роль механизма потерь или усиления. Величина c_q определяет связь поля $\phi_q(t)$ с выделенной модой, а $f(t)$ – внешнее воздействие или, как говорят, источник. В том, что $S[Q,\phi,f]$ представляет собой классическое действие системы, состоящей из взаимодействующих нелинейной моды $Q(t)$ и многомодового поля $\phi_q(t)$, можно убедиться, подставив $G_0^{-1}(t-t')$ и $\Delta_q^{-1}(t-t')$ – операторы, определяемые из уравнений (4) и (5), в (2) и (3).

В современной формулировке квантовой электродинамики основной величиной теории является производящий функционал $W[f]$, который для нашей системы записывается в виде

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}W[f]\right)=\int\exp\left(\frac{i}{\hbar}S\right)DQD\phi\left(\int\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_0\right)DQD\phi\right)^{-1}, \tag{6}$$

где функциональное интегрирование ведется по всем конфигурациям переменных системы $Q(t)$ и $\phi(x)$. Как показано в [3,4], с помощью этого функционала можно исследовать амплитуды переходов, если интегрирование по времени проводить от $-\infty$ до ∞. Нас же интересуют корреляционные функции переменных системы. Для нахождения их, как будет видно ниже, необходимо интегрирование по времени в входящих в (7) S_0 и S вести от начального момента времени t_i рассматриваемого процесса до конечного t_f и в обратном направлении от t_f до t_i [5]. Контур интегрирования C можно представить в виде двух линий, примыкающих к временной оси снизу $C^{(-)}$ и сверху $C^{(+)}$, полагая значения источника $f^{(-)}(t)=f(t^-)$ и $f^{(+)}(t)=f(t^+)$ различными на нижнем и верхнем контурах источников.

Смысл производящего функционала легко увидеть, записав производящий функционал в операторном формализме. Соответствующая формула имеет вид

$$\exp\left(-\frac{iW[f]}{\hbar}\right)=\left\langle T\exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{S}_{\text{int}}\right)\right\rangle, \tag{7}$$

где $\hat{S}_{\text{int}}$ – оператор действия взаимодействия, т.е. величина, определяемая формулой (3), с тем отличием, что в качестве переменных системы взяты операторы системы в представлении взаимодействия. Интегрирование по времени в (7) ведется по тому же контуру, что и в (6), а символ T означает операцию хронологического упорядочения вдоль этого контура. Дифференцируя W по антисимметрической комбинации источников $f_a(t)=f^{(-)}(t)-f^{(+)}(t)$ и полагая ее равной нулю, можно получить симметризованные корреляционные функции системы произвольного порядка. В частности, для усредненной по состоянию траектории и функции корреляции второго порядка имеем

$$\left(\frac{\delta W}{\delta f_a(t)}\right)_{f_a\to 0}=\left\langle\hat{Q}(t)\right\rangle, \tag{8}$$

$$\left(i\hbar\frac{\delta^2 W}{\delta f_a(t)\,\delta f_a(t')}\right)_{f_a\to 0}=\left\langle\hat{Q}(t)\hat{Q}(t')+\hat{Q}(t')\hat{Q}(t)\right\rangle-2\left\langle\hat{Q}(t')\right\rangle\left\langle\hat{Q}(t)\right\rangle, \tag{9}$$

где операторы взяты в гейзенберговском представлении, а усреднение ведется по начальному состоянию системы.

Все операции с функциональными интегралами проводятся на основе формулы для гауссовых интегралов

$$\int \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\left(\phi\Delta^{-1}\phi + J\phi + \phi J\right)\right) D\phi \left(\int \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\phi\Delta^{-1}\phi\right) D\phi\right)^{-1} = \exp\left(-\frac{i}{2\hbar} J\Delta J\right). \quad (10)$$

Здесь и далее для упрощения обозначений под $\phi\Delta^{-1}\phi$ подразумевается $\int \sum_q \phi_q(t)\Delta_q^{-1}(t-t')\phi_q(t')\,dt\,dt'$ и т.д. Поскольку интеграл, определяющий производящий функционал, гауссов по полю ϕ, то интегрирование по нему проводится немедленно. Имеем

$$\exp\left(-\frac{iW[f]}{\hbar}\right) = \int \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left[Q\frac{(G_0^{-1}-\Delta)}{2}Q - V(Q) + fQ\right]\right) DQ \left(\int \exp\left(\frac{i}{\hbar}Q\frac{G_0^{-1}}{2}Q\right) DQ\right)^{-1}, \quad (11)$$

где

$$\Delta(t-t') = 4\sum_q \left|c_q\right|^2 \omega_q^2 \Delta_q(t-t'). \quad (12)$$

Вычисления производящего функционала будем проводить в квазиклассическом приближении, а именно, полагаем, что в производящий функционал основной вклад дают траектории, близкие к классической. В этом случае "эффективное" действие

$$S_{eff} = Q\frac{(G_0^{-1}-\Delta)}{2}Q - V(Q) + fQ \quad (13)$$

можно разложить по отклонениям от классической траектории с точностью до членов второго порядка, после чего исследуемый интеграл вновь становится гауссовым и может быть проинтегрирован до конца. Приведем суммарно результаты вычислений.

Выражение для производящего функционала имеет вид

$$W\left[f_a(t)\right] = \frac{1}{2}\int f_a(t) G^K(t,t') f_a(t')\,dt dt' - \int Q_{cl}(t) f_a(t)\,dt. \quad (14)$$

Уравнение для классической траектории имеет вид

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2\right) Q_{cl}(t) + \int \Delta^R(t,t') Q_{cl}(t')\,dt' + \frac{\partial V(Q_{cl}(t),t)}{\partial Q_{cl}(t)} = f_s(t), \quad (15)$$

а кинетическая функция $G^K(t,t')$, определяющая, как это следует из формул (7) и (14), функцию корреляции второго порядка, находится из уравнения

$$G^K = G^R \cdot \left[\left(G_0^R\right)^{-1} G_0^K \left(G_0^A\right)^{-1} + \Delta^K\right] \cdot G^A. \quad (16)$$

Запаздывающая функция $G^R(t,t')$ удовлетворяет уравнению

$$\left(-\frac{d^2}{dt^2} - \omega_0^2 - \frac{\partial^2 V(Q_{cl}(t),t)}{\partial Q_{cl}(t)^2}\right) G^R(t,t') - \int \Delta^R(t,t'') G^R(t'',t')\,dt'' = \delta(t-t'), \quad (17)$$

а опережающая функция G^A связана с запаздывающей функцией G^R соотношением

$$G^A(t,t') = G^R(t,t').\tag{18}$$

Фурье-компоненты Δ^K, Δ^R и Δ^A имеют вид

$$\Delta^{R(A)}_{q,\omega} = \frac{1}{(\omega \pm i\delta)^2 - \omega_q^2},\tag{19}$$

$$\Delta^K_{q,\omega} = -i4\pi\left(2N_q + 1\right)\omega_q\left(\delta\left(\omega - \omega_q\right) + \delta\left(\omega + \omega_q\right)\right),\tag{20}$$

а N_q есть планковское число заполнения.

Аналогичный вид имеют функции исследуемой моды $(G_0)_\omega$, необходимо только сделать замену $q \to 0$.

Выделяя в запаздывающей функции поля потерь мнимую часть (приближение Вайскопфа–Вигнера) $\operatorname{Im}\Delta^R_\omega = -\omega\gamma(\omega)$, где

$$\gamma(\omega) = 2\pi\sum_q \left|c_q\right|^2 \omega_q^2\left(\delta\left(\omega - \omega_q\right) + \delta\left(\omega - \omega_q\right)\right),\tag{21}$$

и пренебрегая действительной ее частью, как приводящей к незначительному штарковскому сдвигу частоты от взаимодействия с полем потерь, получим для $\Delta^R\left(t - t'\right)$ выражение

$$\Delta^R\left(t - t'\right) = -\gamma\frac{d}{dt}\delta\left(t - t'\right).\tag{22}$$

Конкретизируем потенциал V:

$$V(Q(t),t) = \alpha\cos\left(2\omega t\right)Q(t)^2 + \frac{\beta Q(t)^4}{3},\tag{23}$$

выбрав в качестве $f_s = f\cos(\omega t)$. Используя стандартные методы нелинейной теории колебаний, получим для стационарной траектории

$$Q_{st}(t) = \frac{1}{2}\left(Ue^{i\omega t} + U^* e^{-i\omega t}\right),\tag{24}$$

$$[i\omega\gamma - \omega^2 + \omega_0^2 + \beta\,|U|^2]U + \alpha U^* + f = 0.\tag{25}$$

В свою очередь, решение уравнения (17) имеет вид

$$G^R(t,t') = \frac{e^{-\lambda_-(t-t')}\cos(\omega t + \varphi_-)\cos(\omega t' + \varphi_+) - e^{-\lambda_+(t-t')}\cos(\omega t + \varphi_+)\cos(\omega t' + \varphi_-)}{\omega\sin(\varphi_+ - \varphi_-)},\tag{26}$$

где $\lambda_\mp$ и $\varphi_\mp$ определяются из соотношений

$$\lambda_\mp = \frac{\gamma}{2}\left(1 \mp \sqrt{\frac{\left|\alpha + \beta U^2\right|^2 - (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\beta\left|U\right|^2)^2}{(\gamma\omega)^2}}\right),\tag{27}$$

$$\exp(-2i\varphi_\mp) = \frac{\omega^2 - \omega_0^2 - 2\beta\left|U\right|^2 \mp \sqrt{\left|\alpha + \beta U^2\right|^2 - (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\beta\left|U\right|^2)^2}}{\alpha + \beta U^2}.\tag{28}$$

С помощью (12) и (26) находится кинетическая функция

$$i\hbar G^K(t,t') = \frac{\hbar\omega\,\mathrm{cth}\dfrac{\hbar\omega}{2kT}}{\omega^2\sin^2(\varphi_+-\varphi_-)}\left\{\frac{e^{-\lambda_+|t-t'|}\cos(\omega t+\varphi_+)\cos(\omega t'+\varphi_+)}{2\lambda_+}+\right.$$

$$+\frac{e^{-\lambda_-|t-t'|}\cos(\omega t+\varphi_-)\cos(\omega t'+\varphi_-)}{2\lambda_-}-\left[\frac{e^{-\lambda_-(t-t_0)-\lambda_+(t'-t_0)}\cos(\omega t+\varphi_-)\cos(\omega t'+\varphi_+)}{\lambda_++\lambda_-}+\right. \qquad (29)$$

$$\left.\left.+\frac{e^{-\lambda_+(t-t_0)-\lambda_-(t'-t_0)}\cos(\omega t+\varphi_-)\cos(\omega t'+\varphi_+)}{\lambda_++\lambda_-}\right]\cos(\varphi_+-\varphi_-)\right\},$$

где $t_0 = \min\{t,t'\}$.

Поскольку как $Q(t)$, так и ее дисперсия являются периодическими функциями времени, при исследовании дисперсионных характеристик системы рассматривают дисперсию квадратур, т.е. величин X_1 и X_2, вводимых соотношением

$$Q(t) = \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}}\left(X_1\cos\omega t + X_2\sin\omega t\right). \qquad (30)$$

Знание кинетической функции позволяет легко найти дисперсии квадратур. Мы ограничимся рассмотрением величины

$$D = \left\langle X_1 - \langle X_1\rangle\right\rangle^2 + \left\langle X_2 - \langle X_2\rangle\right\rangle^2 \qquad (31)$$

в качестве меры дисперсии установившегося режима колебаний. Она равна

$$D = \frac{(2N_0+1)[(\omega\gamma)^2+(\omega^2-\omega_0^2-2\beta|U|^2)^2]}{(\omega\gamma)^2+(\omega^2-\omega_0^2-2\beta|U|^2)^2-\left|\alpha+\beta U^2\right|^2}. \qquad (32)$$

На рис.1 и 2 дано графическое представление результатов вычислений. При этом использованы следующие обозначения:

$$\Theta = \frac{\omega_0^2}{\omega^2-\omega_0^2},\quad N = \frac{\beta|U|^2}{\omega_0^2},\quad P = \frac{f^2}{\omega_0^4},\quad M = \frac{\alpha^2}{\omega_0^4}. \qquad (33)$$

На рис.1а приведена зависимость P и D от $\nu = 1/N$. Легко видеть, что картина возникновения бистабильности аналогична картине фазового перехода первого рода, например, перехода газ–жидкость. Ранее [6] мы показали, что метастабильным состояниям при фазовом переходе первого рода соответствует бо́льшая дисперсия, чем стабильным, и сосуществование двух устойчивых фаз возможно, когда их дисперсии одинаковы. Очевидно, что и в неравновесном случае поведение дисперсии можно связать с проблемой устойчивости стационарного режима колебаний. Там, где дисперсия расходится в пределе больших времен, устойчивые колебания невозможны. Речь идет об участке кривой с отрицательным наклоном. При подходе к пороговым точкам дисперсия начинает возрастать, устойчивость режима колебаний уменьшается и система под действием внешних возмущений, в рассматриваемой модели не учтенных, может перейти на другую ветвь кривой, где колебания более устойчивы или, если говорить на языке дисперсии, имеют меньшую дисперсию. При некотором значении интенсивности внешнего воздействия дисперсия на обеих ветвях одинакова и система может находиться с одинаковой вероятностью на любой из ветвей.

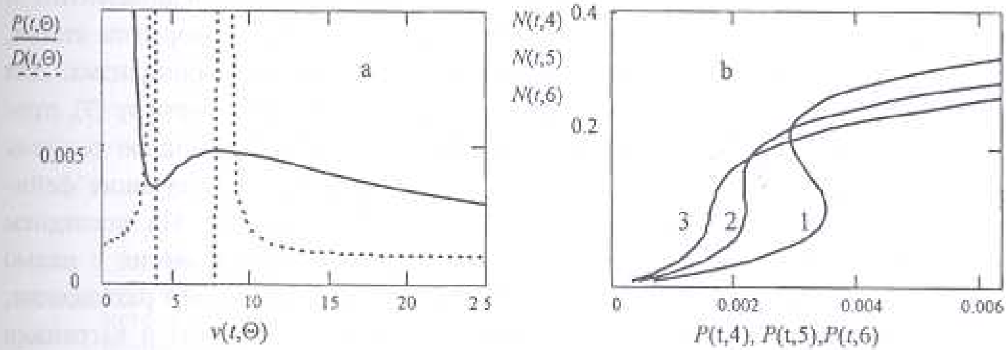

Рис.1. a) Зависимость P и D от $\nu = 1/N$. b) Зависимость интенсивности колебаний ангармонического осциллятора от интенсивности внешнего воздействия при разных значениях расстройки: 1 – $N(t,4)$, 2 – $N(t,5)$, 3 – $N(t,6)$.

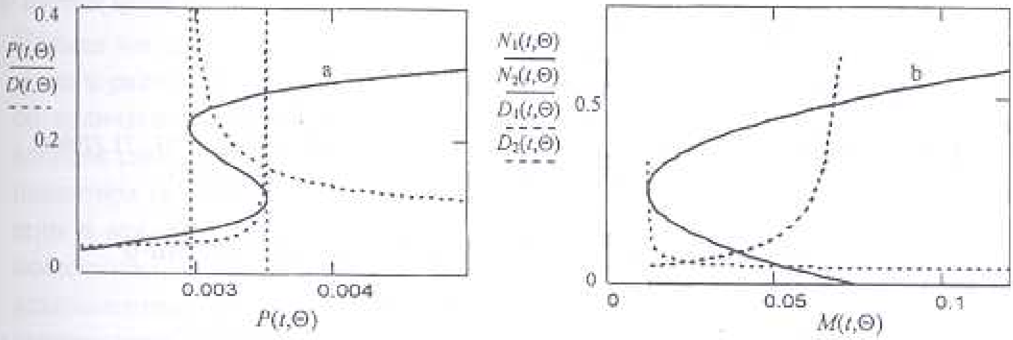

Рис.2. a) Зависимость интенсивности и дисперсии колебаний для ангармонического осциллятора от интенсивности внешнего воздействия. b) Зависимость интенсивности и дисперсии колебаний параметрического генератора от интенсивности параметрического взаимодействия.

На рис.1b изображена зависимость интенсивности колебаний ангармонического осциллятора от интенсивности внешнего воздействия при разных значениях расстройки. На рис.2a показан ход дисперсии колебаний ангармонического осциллятора в зависимости от интенсивности внешнего воздействия, а на рис.2b приведен ход дисперсии колебаний параметрического генератора при изменении параметрического взаимодействия.

Строго говоря, полностью вопрос о степени стабильности того или иного стационарного состояния может быть решен лишь в рамках кинетической задачи, когда можно проследить эволюцию системы при воздействии на нее сторонних сил. Пока же приходится прибегать к эвристическим принципам, типа использованного нами: чем меньше дисперсия состояния, тем оно более стабильно.

Сформулируем основной итог работы. Показано, что на основе лагранжевой формулировки квантовой электродинамики возможно достаточно прозрачное описание оптический явлений. Разумеется, как лагранжева формулировка, в основе которой лежат фейнмановские интегралы по конфигурациям, так и гамильтонова (операторная) формулировка эквивалентны и должны давать одни и те же результаты. Действительно, все формулы статьи, начиная с (14), можно получить на основе операторного формализма. Для этого необходимо в качестве исходной точки теории взять формулу (7), провести разложение по константе взаимодействия, далее с помощью теоремы Вика сопоставить членам ряда теории возмущений соответствующие фейнмановские диаграммы, позволяющие оценить их значения. На последнем этапе вычислений необходимо провести частичные суммирования с целью получения для производящего функционала квазиклассического разложения, т.е. разложения по $\hbar$. Все эти операции не очень тривиальны и лагранжев формализм позволяет их избежать.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Р.Глаубер.** Оптическая когерентность и статистика. В кн.: Квантовая оптика и квантовая радиофизика. М., Мир, 1966.
2. **H.Haken.** Reviews of Modern Physics, 47, 1 (1975).
3. **П.Рамон.** Теория поля. М., Мир, 1984.
4. **К.Хуанг.** Кварки, лептоны и калибровочные поля. М., Мир, 1985.
5. **Т.К.Мелик-Бархударов.** Изв. НАН Армении, Физика, 37, 3 (2002); 37, 71 (2002).
6. **Т.К.Мелик-Бархударов.** Изв. НАН Армении, Физика, 41, 243 (2006).

ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ՊՐՈՑԵՍՆԵՐԻ ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Թ.Կ. ՄԵԼԻՔ-ԲԱՐԽՈՒԴԱՐՈՎ

Քննարկված են ոչ-գծային պրոցեսների տեսության զարգացման սկզբունքները, հիմնված քվանտային տեսության Լագրանժի ձևակերպման վրա: Ցույց է տրված, որ այս ձևակերպման շրջանակներում կարելի է պահպանել հաջորդականությունը դասական տեսության հետ և մասնավորապես օգտագործել նրա մեթոդները քվանտային համակարգերի ուսումնասիրության համար: Հաշվարկված է արտաքին ազդեցության տակ շարժվող ոչ-գծային օսցիլյատորի, ինչպես նաև պարամետրական գեներատորի դիսպերսիան: Քննարկված է դիսպերսիայի դերը օսցիլյատորի կայունությունը որոշելու հարցում:

QUANTUM THEORY OF NONLINEAR PROCESSES

T.K. MELIK-BARKHUDAROV

We discuss the principles for development of the theory of nonlinear processes based on Lagrange's formulation of quantum theory. It is shown that in the framework of this formulation one can preserve the continuity with classical theory, and, in particular, use its methods to study the quantum systems. Quantum dispersion of a nonlinear oscillator driven by an external source as well as of a parametric generator is calculated. The role of dispersion in determining the stability of oscillations is considered.