Известия НАН Армении, Физика, т.42, №2, с.75-82 (2007)

УДК 530.145

ДВУМЕРНЫЙ СФЕРИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

М.А. АЛЕКСАНЯН, К.С. АРАМЯН

Арцахский государственный университет, Степанакерт

(Поступила в редакцию 16 августа 2006 г.)

Исследованы уравнения движения предложенной Беллуччи и Нерсесяном модели сферического осциллятора в присутствии постоянного магнитного поля. Показано, что эта модель точнорешаема классически, в отличие от осциллятора Хиггса, который не решается точно при включении постоянного магнитного поля.

1. Введение

Осциллятор является системой, выделенной во многих смыслах. Прежде всего он выделен наличием широкой алгебры симметрий, $su(d)$, где d есть размерность пространства [1]. Кроме того, наряду с задачей Кулона, он отличается тем, что все его траектории замкнуты [2]. Наличие широкой алгебры симметрий позволяет во многих случаях вводить взаимодействие осциллятора со внешними полями, оставляя систему интегрируемой. Простейшим и важнейшим примером такого рода является двумерный осциллятор в постоянном магнитном поле. Наконец, имеются обобщения осциллятора на искривленные пространства. Наиболее известное обобщение такого рода было предложено Хиггсом [3] Наряду с обобщением задачи Кулона на сфере [4], он выделен тем, что все его траектории замкнуты.

Однако осциллятор Хиггса плох тем, что в присутствии постоянного магнитного поля перестает быть точнорешаемой системой, что сильно уменьшает его практическую важность. Потому важно найти другие обобщения осциллятора на сфере, остающиеся интегрируемыми в присутствии магнитного поля. Где же их искать? Для этого нужно всего лишь вспомнить модель осциллятора на комплексных проективных пространствах CP(N), предложенную Беллуччи и Нерсесяном (БН-модель) [5]. Эта модель точнорешаема квантовомеханически как в отсутствие, так и в присутствии постоянного магнитного поля [6]. Поэтому можно ожидать, что она будет точнорешаемой и классически. С другой стороны, CP(1) (комплексная проективная плоскость) эквивалентна стереографической проекции двумерной сферы. Следовательно, для двумерия подходящий кандидат у нас имеется.

Целью настоящей работы является исследование обобщений задачи осциллятора на двумерной сфере в присутствии постоянного магнитного поля.

В высших же размерностях пока полная неясность. С одной стороны, имеется обобщение задачи осциллятора на кэлеровы пространства, которое, судя по всему, должно уважать включение постоянного магнитного поля [7]. Из него можно получить, гамильтоновой редукцией, осциллятор на трехмерной сфере, взаимодействующий с магнитным полем монополя Дирака: эта система точнорешаема как классически [8], так и квантовомеханически [9]. Имеются обобщения осциллятора на проективные кватернионные пространства положительной [10] и отрицательной [11] постоянной кривизны. Эти системы включают в качестве частного случая осциллятор на четырехмерной сфере S^2 (изоморфной проективной кватернионной плоскости), который точнорешаем квантовомеханически в присутствии поля инстантона.

Работа организована так. Во втором разделе описан плоский двумерный осциллятор в постоянном магнитном поле. В третьем разделе описан двумерный сферический осциллятор, взаимодействующий с внешним магнитным полем.

2. Плоский осциллятор

Осциллятор на плоскости является базовым примером для наших дальнейших построений. Поэтому рассмотрим его максимально детально. Если имеется внешнее магнитное поле с напряженностью $B,$ то на частицу действует сила Лоренца

$$F_L = \frac{e}{c}\dot{r}\times B. .$$

Мы рассматриваем движение на плоскости, полагая магнитное поле постоянным и направленным вдоль оси x_3: $B_1 = B_2 = 0,$ $B_3 = B.$ Поэтому уравнения движения в компонентах имеют вид

$$\dot{x}_1 = -\omega^2 x_1 - Bx_2\,, \qquad \dot{x}_2 = -\omega^2 x_2 + Bx_1\,. \tag{1}$$

Введя комплексную координату

$$z = (x_1 + ix_2)/\sqrt{2}\ , \tag{2}$$

эти уравнения можно привести к следующему изящному виду:

$$\ddot{z} - iB\dot{z} + \omega^2 z = 0\,. \tag{3}$$

Следуя общей теории дифференциальных уравнений, ищем решение этого уравнения в виде $z = Ae^{\alpha t}.$ Подставив его в (3), можно найти частоты нормальных колебаний

$$\alpha_{\pm} = B/2 \pm \sqrt{\omega^2 + B^2/4}\,. \tag{4}$$

Таким образом, в постоянном магнитном поле двумерный осциллятор становится анизотропным.

В присутствии магнитного поля вращательный момент системы меняет свой вид. Именно, легко увидеть, что функция

$$J = J_3 = m\dot{x}_1 x_2 - m\dot{x}_2 x_1 = im(\dot{\overline{zz}} - z\dot{z}) \tag{5}$$

не сохраняется во времени:

$$\dot{J} = -mB\frac{d(z\overline{z})}{dt}\,. \tag{6}$$

Поэтому сохраняющейся величиной является

$$J = J + mBz\bar{z} , \tag{7}$$

играющая роль вращательного момента системы в присутствии постоянного магнитного поля.

Итак, в присутствии постоянного магнитного поля двумерный осциллятор остается интегрируемой системой: он имеет два интеграла движения – энергию и вращательный момент. С их помощью можно проинтегрировать уравнения движения аналогично тому, как это сделано в учебнике Ландау и Лифшица для движения частицы в потенциальном центрально-симметричном поле [12].

Принимая во внимание, что $\pi = \dot{\bar{z}}$, $\bar{\pi} = \dot{z}$, представим энергию E и вращательный момент J системы в виде

$$E = m\dot{z}\dot{\bar{z}} + m\omega^2 z\bar{z} , \qquad J = im(z\dot{\bar{z}} - z\dot{z}) + mBz\bar{z} . \tag{8}$$

Перейдем теперь к полярным координатам

$$z = \frac{re^{i\varphi}}{\sqrt{2}} . \tag{9}$$

В этих координатах энергия и вращательный момент системы принимают вид

$$E = \frac{m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi})}{2} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} , \qquad J = mr^2\dot{\varphi} + \frac{mBr^2}{2} . \tag{10}$$

Отсюда находим

$$\frac{2E}{m} = \dot{r}^2 + \frac{(J - mBr^2/2)^2}{m^2 r^2} + \omega^2 r^2 , \tag{11}$$

откуда немедленно следует

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{(J - mBr^2/2)^2}{m^2 r^2} - \omega^2 r^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2Ex}{m} - \frac{(J - mBx/2)^2}{m^2} - \omega^2 x^2}} , \tag{12}$$

где $x = r^2$. Этот интеграл легко берется, в результате чего получаем

$$t = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} arccos \sqrt{\frac{\gamma}{\beta^2/2\gamma - \lambda}}\left(x + \frac{\beta}{2\gamma}\right) , \tag{13}$$

или, эквивалентно,

$$x + \frac{\beta}{2\gamma} = \sqrt{\frac{\beta^2 - 2\gamma\lambda}{2\gamma^2}} cos\, 2\sqrt{\gamma}t . \tag{14}$$

Здесь мы ввели обозначения

$$\gamma \equiv \omega^2 + \frac{B^2}{4} , \qquad \beta \equiv \frac{2E}{m} + JBm , \qquad \lambda \equiv \frac{J}{m^2} . \tag{15}$$

В исходных обозначениях это выражение выглядит так:

$$r^2 + \frac{2E + jB}{2m(B^2/4 + \omega^2)} = \frac{\sqrt{E^2 + jEB - j^2\omega^2}}{m(B^2/4 + \omega^2)} \cos 2\sqrt{B^2/4 + \omega^2}\, t\,. \qquad (16)$$

Принимая во внимание, что вращательный момент имеет вид $J = mx\dot{\varphi} + mBx/2$, мы можем найти также зависимость $\varphi = \varphi(t)$. Конечно, в сферических координатах все выглядит намного более громоздко, чем в евклидовых. Но для наших дальнейших построений такой путь единственно возможный.

3. Сферический осциллятор

Теперь рассмотрим сферический аналог приведенной в предыдущем разделе модели. Прежде чем приступить к его обсуждению, напомним основные элементы сферической геометрии. Заметим, что метрика двумерной сферы задается выражением

$$ds^2 = r_0^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \qquad (17)$$

где θ и φ связаны с евклидовыми координатами сферы так:

$$x_1 = r_0 \sin\theta \sin\varphi\,, \quad x_2 = r_0 \sin\theta \cos\varphi\,, \quad x_3 = r_0 \cos\theta\,. \qquad (18)$$

В пределе $r_0 \to \infty$ сфера переходит в плоскость. Для аналогии с рассмотренным ранее осциллятором на плоскости удобно воспользоваться стереографической проекцией сферы на плоскость, касательную южному полюсу сферы. Тогда каждой точке сферы (θ, φ) ставится в соответствие точка $u = y_1 + iy_2$ комплексной плоскости:

$$u = 2r_0 \cot\frac{\theta}{2} e^{i\varphi}\,. \qquad (19)$$

В этих терминах метрика сферы становится конформно-плоской:

$$ds^2 = \frac{du d\bar{u}}{(1 + \frac{u\bar{u}}{4r_0^2})^2} = \frac{4r_0^2 dz d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2}\,, \qquad z = \frac{u}{2r_0}\,, \qquad (20)$$

а потенциал осциллятора Хиггса принимает вид [3]

$$V_{Higgs} = \frac{\omega^2 r_0^2}{2}\tan^2\theta = \omega^2 r_0^2 \frac{2z\bar{z}}{\left(1 - z\bar{z}\right)^2}\,. \qquad (21)$$

Потенциал БН-модели сферического осциллятора [5] выглядит так:

$$V_{BN} = \omega^2 r_0^2 \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} = 2\omega^2 r_0^2 z\bar{z}\,. \qquad (22)$$

Как отмечалось во введении, потенциал Хиггса замечателен тем, что соответствующий ему осциллятор обладает скрытыми симметриями, а все его траектории замкнуты. Однако в присутствии постоянного магнитного поля он перестает быть точнорешаемой системой как на квантовом, так и на классическом уровне. Соответственно, он не подходит к роли сферического аналога модели плоского осциллятора, взаимодействующего с постоянным магнитным полем. В то же время, БН-модель сферического осциллятора, хотя и не обладает скрытыми симметриями, точнорешаема на квантовом уровне как в отсутствие, так и при наличии постоянного магнитного поля [6]. Поэтому она подходит для нашей цели.

Попытаемся проинтегрировать его уравнения движения (в отсутствие и при наличии постоянного магнитного поля). Они задаются гамильтонианом

$$H = \frac{(1+z\bar{z})^2\bar{\pi}\pi}{2r_0^2} + V_{BN}(z\bar{z}) \tag{23}$$

и скобками Пуассона

$$\{\pi, z\} = 1, \qquad \{\bar{\pi}, \bar{z}\} = 1, \qquad \{\pi, \bar{\pi}\} = \frac{4iBr_0^2}{(1+z\bar{z})^2}. \tag{24}$$

Вращательный момент системы задается выражением

$$J = i(z\pi - \overline{\pi z}) + 4Br_0^2\frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}}. \tag{25}$$

Однако, если мы выпишем ньютоновские уравнения движения, то увидим, что они являются нелинейными дифференциальными уравнениями, которые не так просто решить:

$$\ddot{z} = 2(1+z\bar{z})\bar{z}\dot{z}^2 - \omega^2(1+z\bar{z})^2 z + iBz. \tag{26}$$

Поэтому, чтобы решить уравнения движения и найти траектории частицы, мы будем действовать в духе учебника Ландау и Лифшица [12] и предыдущего раздела. Именно, зафиксируем значения интегралов движения

$$H_{CP^1}\left(\pi, \bar{\pi}, z, \bar{z}\right) = E, \qquad J\left(\pi, \bar{\pi}, z, \bar{z}\right) = j \tag{27}$$

и, учитывая уравнения движения, положим вместо π, $\bar{\pi}$

$$\pi = \frac{2r_0^2\dot{\bar{z}}}{(1+z\bar{z})^2}, \qquad \bar{\pi} = \frac{2r_0^2\dot{z}}{(1+z\bar{z})^2}. \tag{28}$$

Затем переходим к вещественным координатам $z = re^{i\varphi}$ и получаем

$$E = \frac{g(r)}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \omega^2 r_0^2\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}, \qquad j = g(r)r^2\dot{\varphi} + 2Br_0^2\frac{1-r^2}{1+r^2} \tag{29}$$

где

$$g = \frac{4r_0^2}{(1+r^2)^2}. \tag{30}$$

В исходных сферических координатах вращательный момент имеет вид

$$J = r_0^2\sin^2\theta\dot{\varphi} - B\cos\theta. \tag{31}$$

В отсутствие магнитного поля, $B = 0$, уравнения (29) принимают вид

$$j = r_0^2 \sin^2\theta\dot{\varphi}\ , \qquad 2E = r_0^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) + 2\omega^2 r_0^2 \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\ . \tag{32}$$

Отсюда получаем

$$2E = r_0^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{j^2}{r_0^2\left(1-\cos^2\theta\right)} + 4r_0^4\omega^2\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\ . \tag{33}$$

Это выражение позволяет немедленно проинтегрировать уравнения движения

$$t = \int\frac{d\theta}{\sqrt{E - \omega^2 r_0^2\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} - \dfrac{j^2}{2r_0^2\left(1-\cos^2\theta\right)}}} = \int\frac{d\cos\theta}{E\left(1-\cos^2\theta\right) - r^2\omega^2\left(1+\cos\theta\right)^2 - \dfrac{j^2}{2r_0^2}}\ . \tag{34}$$

Этот интеграл представим в виде

$$t = \int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}} = \int\frac{d\left(x + \beta/2\alpha\right)}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\gamma/\alpha - \left(x + \beta/2\alpha\right)^2}}, \tag{35}$$

где

$$x = \cos\theta, \quad \alpha = -\left(E + \omega^2 r_0^2\right), \quad \beta = -2\omega^2 r_0^2\ , \quad \gamma = E - \omega^2 r_0^2 - \frac{j^2}{2r_0^2}\ . \tag{36}$$

Он легко берется, и мы получаем

$$t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\arccos\left(\cos\theta + \frac{\omega^2 r_0^2}{E + \omega^2 r_0^2}\right) \Rightarrow \cos\theta + \frac{\omega^2 r_0^2}{E + \omega^2 r_0^2} = \cos\sqrt{\alpha}t\ . \tag{37}$$

Отметим, что в отличие от плоского осциллятора, частота колебаний рассмотренного сферического осциллятора зависит от энергии системы.

Теперь рассмотрим случай осциллятора в постоянном магнитном поле. Из уравнений (29) вместо (33) имеем

$$2E = r_0^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{\left(j + B\cos\theta\right)^2}{r_0^2\left(1-\cos^2\theta\right)} + 4r^4\omega^2\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\ . \tag{38}$$

Отсюда получаем

$$t = \int\frac{d\cos\theta}{\sqrt{E - r_0^2\omega^2 - \left(E + r_0^2\omega^2\right)\cos^2\theta - 2\omega^2 r_0^2\cos\theta - \dfrac{\left(j + B\cos\theta\right)^2}{2r_0^2}}}\ . \tag{39}$$

Введем обозначения

$$-\alpha = E+\omega^2 r_0^2 + \frac{B^2}{2r_0^2}\ , \qquad -\beta = 2\omega^2 r_0^2 + \frac{Bj}{r_0}\ , \qquad \gamma = E-\omega^2 r_0^2 - \frac{j^2}{2r_0^2} \tag{40}$$

и представим последний интеграл в виде

$$t = \int \frac{d\cos\theta}{\sqrt{E+\frac{\beta^2}{4\gamma}-\gamma(\cos\theta+\frac{\beta}{2\gamma})^2}}\ . \tag{41}$$

Отсюда следует

$$t = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} arccos \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha+\beta^2/4\gamma}}\left(\cos\theta+\frac{\beta}{2\gamma}\right)\ . \tag{42}$$

Окончательно,

$$\cos\theta + \frac{2\omega^2 r_0^2 + jb/r_0}{2(E+\omega^2 r_0^2 + B^2/2r_0} = R\cos\sqrt{E+\omega^2 r_0^2 + B^2/2r_0}\ t\ , \tag{43}$$

где

$$R = \frac{\sqrt{(E-\omega^2 r_0^2 - j^2/2r_0)(E+\omega^2 r_0^2 + B^2/2r_0) + (jB/r_0 + 2\omega^2 r_0^2)^2}}{E+\omega^2 r_0^2 + B^2/2r_0}\ . \tag{44}$$

Как видим, включение постоянного магнитного поля не вносит качественных изменений в движение предложенного в [5] двумерного сферического осциллятора.

В представленной работе мы рассмотрели обобщение двумерного осциллятора на сферу, предложенное Беллуччи и Нерсесяном [5], и рассмотрели его поведение в постоянном магнитном поле. Мы показали, что эта модель в присутствии постоянного магнитного поля сохраняет точную решаемость, в то время как осциллятор Хиггса перестает быть точнорешаемой системой. Это является основным результатом работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **А.М.Переломов**. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М., Наука, 1989.
2. **В.И.Арнольд**. Математические методы классической механики. М., Наука, 1973.
3. **P.W.Higgs**. J. Phys. A, **12** 309 (1979).
4. **E.Schrцdinger**. Proc. Roy. Irish Soc., **46,** 9 (1941); **46,** 183 (1941); **47**, 53 (1941).
5. **S.Bellucci, A.Nersessian**. Phys. Rev. D, **67**, 065013 (2003).
6. **S.Bellucci, A.Nersessian, A.Yeranyan**. Phys. Rev. D, **70**, 085013 (2004).
7. **S.Bellucci, A.Nersessian**. ``Supersymmetric Kaehler oscillator in a constant magnetic field'', [arXiv:hep-th/0401232], in Proceedings of International Workshop on Supersymmetries and Quantum Symmetries. Dubna, Russia, 24-29 July, 2003, p.370, JINR Publ.
8. **A.Nersessian, A.Yeranyan**. J. Phys. A, **37**, 2791 (2004).
9. **S.Bellucci, A.Nersessian, A.Yeranyan**. Phys. Rev., **D70**, 045006 (2004).
10. **L.Mardoyan, A.Nersessian**. Phys. Rev., **B72,** 233303 (2005).
11. **S.Bellucci, L.Mardoyan, A.Nersessian**. Phys. Lett., **B636,** 137 (2006).
12. **Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц**. Механика. М., Наука, 1988.

ԵՐԿՉԱՓ ՍՖԵՐԻԿ ՕՍՑԻԼՅԱՏՈՐԸ ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ

Մ.Ա. ԱԼԵՔՍԱՆՅԱՆ, Կ.Ս. ԱՐԱՄՅԱՆ

Հետազոտված են Բելլուչչիի և Ներսեսյանի կողմից առաջարկված սֆերիկ օսցիլյատորի շարժման հավասարումները մագնիսական դաշտի առկայության դեպքում: Ցույց է տրված, որ ի տարբերություն Հիգսի օսցիլյատորի, մոդելը ունի ճշգրիտ դասական լուծում հաստատուն մագնիսական դաշտի առկայության դեպքում:

TWO-DIMENSIONAL SPHERICAL OSCILLATOR IN A CONSTANT MAGNETIC FIELD

M.A. ALEXANYAN, K.S. ARAMYAN

We study the equations of motion of the model of spherical oscillator suggested by Bellucci and Nersessian, in a constant magnetic field. It is shown that this model is exactly solvable classically, in contrast to the Higgs oscillator which could not be solved exactly in the presence of a constant magnetic field.