

УДК 531.19

## МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА $^3\text{He}$ НА РЕКУРСИВНЫХ РЕШЕТКАХ

Л.Н. АНАНИКЯН

Ереванский физический институт

(Поступила в редакцию 21 июля 2006 г.)

Рассмотрена модель Гейзенберга на рекурсивных решетках с мультиспиновым взаимодействием в сильном внешнем магнитном поле как приближение двумерной решетки кагоме, а также рекурсивная шестиугольная решетка как приближение треугольной решетки для твердого  $^3\text{He}$ . Модель Гейзенберга в сильном внешнем магнитном поле можно аппроксимировать моделью Изинга. Используя динамический метод, получены рекуррентные соотношения для статистической суммы. Построены графики зависимости намагниченности от внешнего поля при различных константах обменного взаимодействия и температурах. Получены магнитные плато, бифуркации и удвоения.

### 1. Введение

Исследование физических свойств твердого гелия  $^3\text{He}$  играет важную роль в изучении спиновых систем. Слой  $^3\text{He}$ , нанесенный на графитовую поверхность, является хорошим примером двумерной квантовой спиновой системы [1]. Первый атомный слой образует треугольную систему со спином  $1/2$ , в следующих слоях одна из связей исчезает и образуется решетка кагоме [2]. Во многих экспериментальных [3] и теоретических [4] работах было показано, что в таких системах преобладает связь между более чем двумя спинами и имеет место переход системы от ферромагнитного к антиферромагнитному состоянию.

В последнее время особое внимание уделяется изучению плато намагниченности в сильном магнитном поле, так как, по существу, это макроскопическое квантовое явление. Как известно, плато намагниченности не связано с насыщением. В квантовых спиновых системах при близких к нулю температурах может появиться плато в кривой намагниченности при сильных магнитных полях [5]. Значение намагниченности, при котором появляется плато, рационально по отношению к значению насыщения. Теоретическое объяснение данному факту было дано в 1997г. Ошикава, Яманака и Аффлеком [6]. Геометрически несогласованные (фрустрированные) квантовые магнетики – это класс магнетиков, обладающих необычными свойствами при низких температурах и высоких давлениях. Многие из изученных квантовых магнетиков представляют собой решетку кагоме антиферромагнитно связанных ближайших спинов. Как было указано выше, некоторые слои  $^3\text{He}$  образуют решетку кагоме. Обычно антиферромагнитные решетки кагоме исследуются численным моделированием [7].

В данной работе предложен динамический метод, основанный на точном рекуррентном соотношении для статистической суммы [8]. Рассмотрены дерево Хусими, которое является приближением решетки кагоме, а также рекурсивная шестиугольная решетка, которая является приближением треугольной. Этот метод позволяет изучить магнитные плато, бифуркации и удвоения в антиферромагнитном случае при низких температурах и высоких давлениях.

## 2. Гамильтониан с мультиспиновым обменным взаимодействием

Гамильтониан, описывающий  $^3\text{He}$  в магнитном поле, имеет следующий вид:

$$H = H_{ex} + H_Z, \quad (1)$$

где  $H_Z$  отвечает за магнетизм,  $H_{ex}$  – за обменное взаимодействие. Взаимодействие с внешним магнитным полем описывается зеемановским членом

$$H_Z = -\sum_i \frac{\gamma}{2} \hbar B \cdot \sigma_i, \quad (2)$$

где  $\gamma$  – гиромагнитное отношение атомов  $^3\text{He}$ .

Общий вид гамильтониана, описывающего мультичастичное обменное взаимодействие, приведен в [1]:

$$H_{ex} = -\sum_{n,\alpha} J_{n\alpha} (-1)^p P_n. \quad (3)$$

Здесь суммирование идет по всем перестановкам частиц,  $P_n$  – оператор перестановок  $n$  частиц,  $J_{n\alpha}$  – соответствующая энергия обмена (положительная),  $\alpha$  характеризует топологически отличающиеся циклы и  $p$  определен в теории групп перестановок. В частном случае

$$H_{ex} = J_2 \sum_{pairs} (P_2 + P_2^{-1}) - J_3 \sum_{triangles} (P_3 + P_3^{-1}), \quad (4)$$

где в первом члене суммирование идет по всем соседним парам, а во втором – по всем треугольникам. Этот случай будет использован для дерева Хусими.

Выражение для оператора  $P_{ij}$  было получено Дираком [9]:

$$P_{ij} = \frac{1}{2} (1 + \sigma_i \cdot \sigma_j), \quad (5)$$

где  $\sigma_i$  – матрицы Паули, действующие на  $i$ -ый спин. Легко заметить, что  $P_2^{-1} = P_2$ , для  $n > 2$  это уже не верно. Однако остальные операторы  $P_n$  можно выразить через  $P_2$ . Для оператора перестановки трех спинов получим:

$$P_{ijk} = P_{ij} \cdot P_{ik} = \frac{1}{4} (1 + \sigma_i \cdot \sigma_j)(1 + \sigma_i \cdot \sigma_k). \quad (6)$$

Используя свойства матриц Паули, имеем:

$$P_{ijk} + (P_{ijk})^{-1} = \frac{1}{2}(1 + \sigma_i \cdot \sigma_j + \sigma_j \cdot \sigma_k + \sigma_k \cdot \sigma_i). \quad (7)$$

### 3. Приближение решетки кагоме деревом Хусими. Плато намагниченности, бифуркации и удвоения

Для получения рекуррентного соотношения необходимо заменить решетку кагоме иерархической (рекурсивной) решеткой Хусими (дерево Хусими). Дерево Хусими представляет собой решетку, изображенную на рис.1. Модель характеризуется числом  $\gamma$  – количеством треугольников, исходящих из каждой вершины. Преимущество этой модели заключается в том, что решетку можно разбить на  $\gamma$  одинаковых ветвей, содержащих  $\gamma-1$  ветвей. Таким образом можно получить точное рекуррентное уравнение для статистической суммы. В сильном магнитном поле, направленном вдоль оси  $z$ , спины в основном выстраиваются параллельно или антипараллельно магнитному полю. Значит, в этом случае квантовую модель Гейзенберга можно заменить моделью Изинга со спином  $S_i = \pm 1$  [6]. Статистическая сумма может быть записана в виде

$$Z = \sum_{S_0} e^{hS_0} g_n(s_0)^\gamma. \quad (8)$$

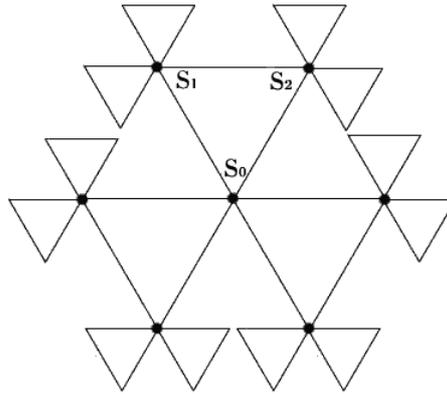


Рис.1. Дерево Хусими при  $\gamma = 3$ .

Здесь  $S_0$  – центральный спин,  $h = \beta(\gamma/2)\hbar B$ ,  $\beta = 1/kT$ ,  $g_n(s_0)$  – статистический вес одной из ветвей решетки, выходящей из центрального узла,  $n$  – число поколений. В термодинамическом пределе  $n \rightarrow \infty$  можно пренебречь поверхностными эффектами, т.е. мы изучаем термодинамику глубоко внутри решетки Хусими. Рекуррентное соотношение для одной ветви будет:

$$g_n(s_0) = \sum_{\{s_1, s_2\}} \exp[J(s_0 s_1 + s_0 s_2 + s_1 s_2) + h(s_1 + s_2)] \cdot g_{n-1}(s_1)^{\gamma-1} \cdot g_{n-1}(s_2)^{\gamma-1}, \quad (9)$$

где введено обозначение  $J = \beta \frac{(J_3 - J_2)}{2}$ .

Из уравнения (9) имеем:

$$g_n(+)=e^{3J+2h}g_{n-1}^{2(\gamma-1)}(+)+2e^{-J}g_{n-1}^{\gamma-1}(-)g_{n-1}^{\gamma-1}(+)+e^{-J-2h}g_{n-1}^{2(\gamma-1)}(-), \quad (10)$$

$$g_n(-)=e^{-J+2h}g_{n-1}^{2(\gamma-1)}(+)+2e^{-J}g_{n-1}^{\gamma-1}(-)g_{n-1}^{\gamma-1}(+)+e^{3J-2h}g_{n-1}^{2(\gamma-1)}(-). \quad (11)$$

Введем новую переменную  $x_n = g_n(+)/g_n(-)$ . После простых преобразований получим рекуррентное уравнение:

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad f(x) = \frac{z\mu^2x^{2(\gamma-1)} + 2\mu x^{(\gamma-1)} + 1}{\mu^2x^{2(\gamma-1)} + 2\mu x^{(\gamma-1)} + z}, \quad (12)$$

где  $z = e^{4J}$ ,  $\mu = e^{2h}$ . Величина  $x_n$  не имеет конкретного физического смысла, но термодинамические функции могут быть выражены в терминах  $x_n$ . Например, намагниченность может быть представлена в виде

$$M = \frac{\mu x^\gamma - 1}{\mu x^\gamma + 1}. \quad (13)$$

Т.е. зафиксировав температуру и константы парного и тройного взаимодействия, можно, проделав достаточное количество итераций (12), получить зависимость намагниченности от внешнего поля. Мы приближаем решетку кагоме рекурсивной решеткой Хусими с  $y = 2$  (рис.2). При фиксированной температуре  $T = 1$  мК получаются графики, показанные на рис.3. При  $J = 0.5$  мК и  $J = 4$  мК намагниченность ведет себя стандартно, кривая намагниченности монотонно растет с повышением магнитного поля. При  $J = 8$  мК появляется плато намагниченности в  $m = \pm 1/3$  (рис.3с), а при  $J = 18$  мК появляются четыре бифуркационные точки и удвоение (рис.3д).

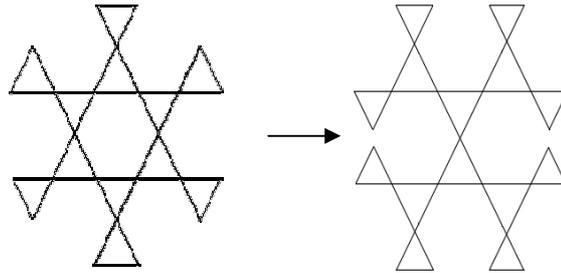


Рис.2. Приближение решетки кагоме рекурсивной решеткой Хусими

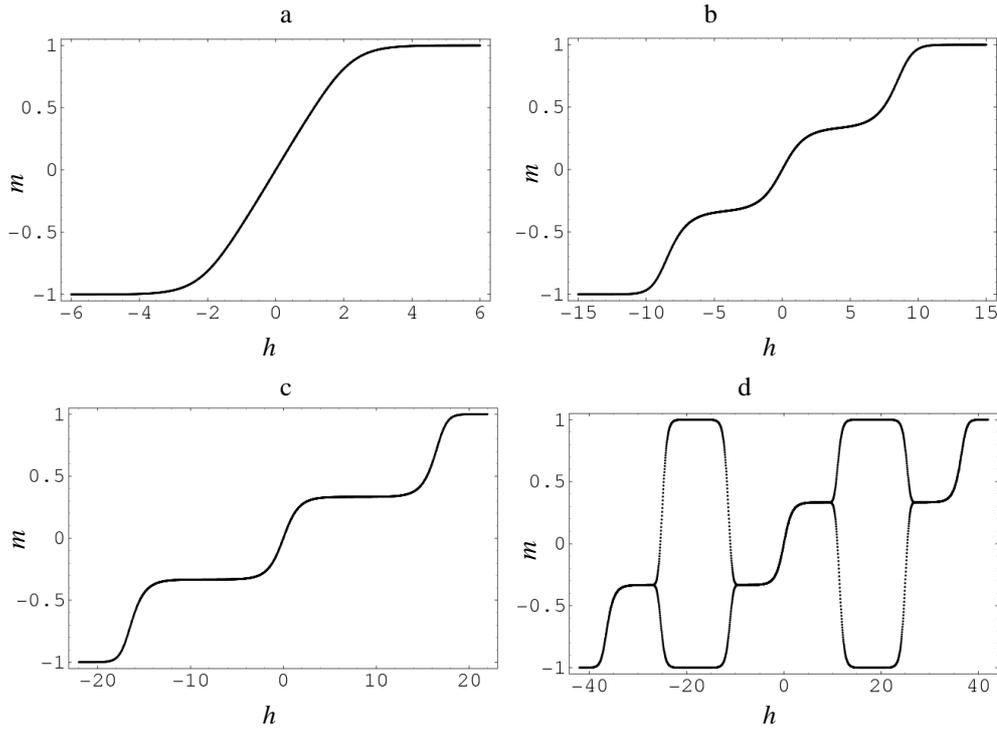


Рис.3. Зависимость намагниченности от внешнего поля при разных значениях  $J$ , при температуре  $T = 1$  мК. (a)  $J = 0.5$  мК, (b)  $J = 4$  мК, (c)  $J = 8$  мК, (d)  $J = 18$  мК.

#### 4. Приближение треугольной решетки рекурсивной шестиугольной решеткой

Как было сказано выше, первый слой  $^3\text{He}$  образует треугольную решетку. Такую решетку тоже можно заменить рекурсивной решеткой. В данном случае используется шестиугольная рекурсивная решетка (рис.4). Для нее, аналогично предыдущему параграфу, можно получить рекуррентное соотношение для статистической суммы. Однако в этом случае в гамильтониане обменного взаимодействия, помимо парных и тройных взаимодействий, учитываются также четверные, пятерные и шестерные взаимодействия [10]. И аналогичным образом получается функция зависимости намагниченности от внешнего поля. Из-за громоздкости формул приведем только графики намагниченности (рис.5). Надо отметить, что намагниченность центрального узла шестиугольника отличается от намагниченности вершин. На графике изображены средние намагниченности. Как видно из графиков, при высоких температурах кривая намагниченности плавно возрастает (рис.5a), с понижением температуры образуются плато в  $m = \pm 2/3$ , бифуркационная точка и удвоение (рис.5b). На рис.5c учтены только парные и тройные взаимодействия, опять образуются плато в  $m = \pm 2/3$ , бифуркационная точка и удвоение. Экспериментально измерить отдельно каждую константу взаимодействия невозможно. Известно лишь, что для треугольной решетки  $J_3 > J_2 > J_4 \geq J_6 > J_5$ . График, удовлетворяющий этим условиям, изображен на рис.5d.

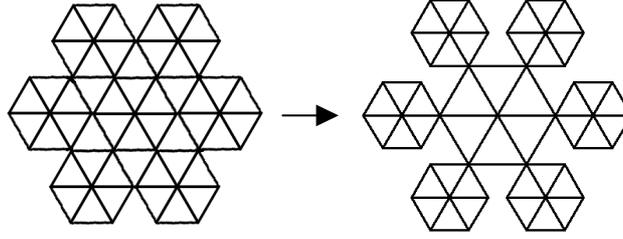


Рис.4. Приближение треугольной решетки рекурсивной шестиугольной решеткой.

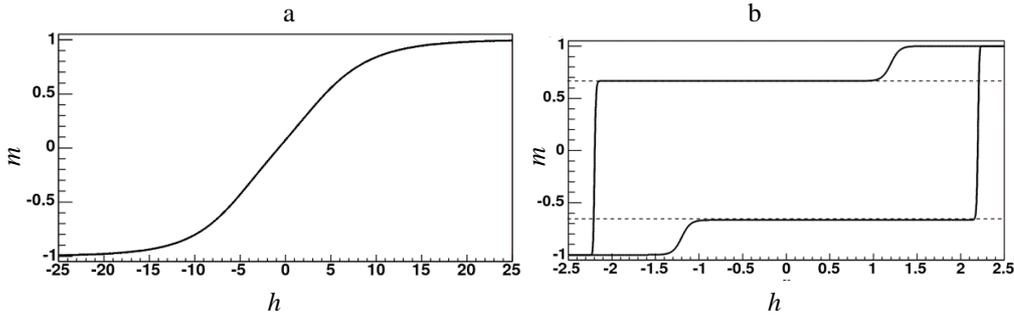
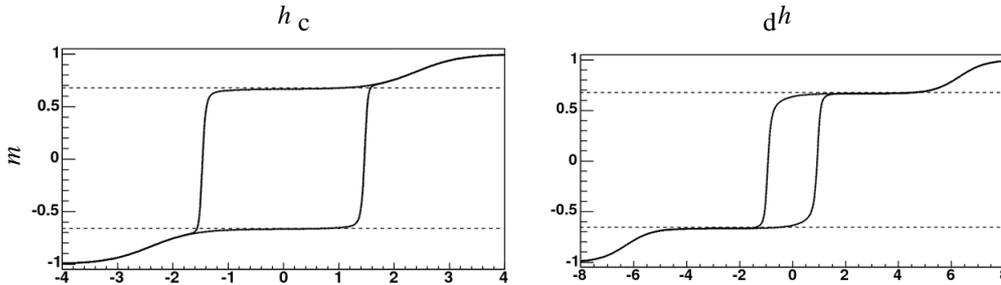


Рис.5. Зависимость намагниченности от внешнего поля для шестиугольной рекурсивной решетки. (a)  $T = 10$  мК,  $J_2 = 2$ ,  $J_3 = 2.5$ ,  $J_4 = 1.8$ ,  $J_5 = 0.5$ ,  $J_6 = 1$ ; (b)  $T = 0.1$  мК,  $J_2 = 2$ ,  $J_3 = 2.5$ ,  $J_4 = 1.8$ ,  $J_5 = 0.5$ ,  $J_6 = 1$ ; (c)  $T = 0.1$  мК,  $J_2 = 2$ ,  $J_3 = 2.5$ ,  $J_4 = J_5 = J_6 = 0$ ; (d)  $T = 0.1$  мК,  $J_2 = 2$ ,  $J_3 = 2.3$ ,  $J_4 = 1$ ,  $J_5 = 0.1$ ,  $J_6 = 0.5$ .

## 5. Заключение

Таким образом, мы показали, что в антиферромагнитном случае при низких



температурах существуют плато намагниченности, бифуркационные точки и удвоения. При этом существенную роль играют точные рекуррентные соотношения для статистической суммы, которые можно получить, заменив кагоме и треугольную решетку рекурсивными Хусими и шестиугольной решетками. В дальнейшем было бы интересно исследовать нули Янг-Ли статистической суммы на плато и в бифуркационных точках.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **M.Roger, J.H.Hetherington, J.M.Delrieu.** Rev. Mod. Phys., **55**, 1 (1983); **H.Franco, R.Rapp, H.Godfrin.** Phys. Rev. Lett., **57**, 1161 (1986); **H.Godfrin, R.Ruel, D.Osheroff.** Phys. Rev. Lett., **60**, 305 (1988); **H.Godfrin, R.E.Rapp.** Adv. Phys., **44**, 113 (1995).
2. **H.Jichu, K.Kuroda.** Prog. Theor. Phys., **67**, 715 (1982); **R.A.Gayer.** Phys. Rev. Lett., **64**, 1919 (1990); **M.Roger.** Phys. Rev. B, **56**, R2928 (1997).
3. **M.Siquera, J.Nyeki, B.Cowan, J.Saunders.** Phys. Rev. Lett., **76**, 1884 (1996); **K.Ishida, M.Morishita, K.Yawata, H.Fukuyama.** Phys. Rev. Lett., **79**, 3451 (1997); **M.Roger, C.Bauerle, Yu.M.Bunkov, A.-S.Chen, H.Godfrin,** Phys. Rev. Lett., **80**, 1308 (1998).
4. **J.M.Delrieu, M.Roger, J.H.Hetherington.** J. Low Temp. Phys., **40**, 71 (1980); **M.Roger.** Phys. Rev. B, **30**, 6432 (1984); **B.Bernu, D.Ceperley, C.Lhuillier.** J. Low Temp. Phys., **89**, 589 (1992).
5. **T.Momoi, H.Sakamoto, K.Kubo.** Phys. Rev. B, **59**, 9491 (1999).
6. **M.Oshikawa, M.Yamanaka, I.Affleck.** Phys. Rev. Lett., **78**, 1984 (1997).
7. **C.Zeng, V.Elser.** Phys. Rev. B, **51**, 8318 (1995); **P.W.Leung, V.Elser.** Phys. Rev. B, **47**, 5459 (1993); **Ch.Waldtmann et al.** Eur. Phys. J. B, **2**, 501 (1998).
8. **T.A.Arakelyan, V.R.Ohanyan, L.N.Ananikyan, N.S.Ananikian, M.Roger.** Phys. Rev. B, **67**, 024424 (2003); **N.S.Ananikian, S.K.Dallakian, B.Hu.** Complex Systems, **11** 213 (1997); **N.S.Ananikian et al.** Physica A, **172**, 391 (1991).
9. **P.A.M.Dirac.** The Principles of Quantum Mechanics. Clarendon Press, Oxford, 1947.  
10. **H.Godfrin, D.D.Osheroff.** Phys. Rev. B, **38**, 4492 (1988).

<sup>3</sup>He-ի ՄԱԳՆԻՏԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՌԵԿՐՍԻՎ ՑԱՆՑԵՐԻ ՎՐԱ

Լ.Ն. ԱՆԱՆԻԿՅԱՆ

Ռեկուրսիվ ցանցերի վրա դիտարկված է <sup>3</sup>He-ի բազմամասնիկային փոխազդեցություններով Հայզենբերգի մոդելը, որպես երկչափ կազմե ցանցի մոտարկում, ինչպես նաև ռեկուրսիվ վեցանկյուն ցանցը, որպես եռանկյուն ցանցի մոտարկում: Ուժեղ մագնիսական դաշտում Հայզենբերգի մոդելը կարելի է մոտարկել Բզինգի մոդելով: Կիրառելով դինամիկ մեթոդը՝ ստացված են ռեկուրենտ հավասարումներ վիճակագրական գումարի համար: Կառուցված են մագնիսացման կախվածության գրաֆիկները արտաքին մագնիսական դաշտից տարբեր փոխազդեցության հաստատունների և ջերմաստիճանների համար: Ստացված են մագնիսացման պլատոներ, բիֆուրկացիոն կետեր և կրկնապատկումներ:

MAGNETIC PROPERTIES OF <sup>3</sup>He ON THE RECURSIVE LATTICES

L.N. ANANIKIAN

We considered the Heisenberg model on the recursive lattices with multi-spin interaction in a strong magnetic field as an approximation of the two-dimensional kagome lattice, as well as hexagonal recursive lattices as an approximation of triangular lattice, for solid <sup>3</sup>He. In the strong magnetic field it is possible to approximate the Heisenberg model with the Ising one. Using dynamic approach, we obtain exact recursion relations for partition functions. Diagrams of the magnetization versus external magnetic field with different spin-exchange parameters and temperatures are presented. Magnetization plateau, bifurcation points and doublings are obtained.