Известия НАН Армении, Физика, т.41, №6, с.412-418 (2006)

УДК 530.145

ОБОБЩЕНИЕ СООТВЕТСТВИЯ ОСЦИЛЛЯТОР – КЕПЛЕР

К.С. АРАМЯН

Арцахский государственный университет, Степанакерт

(Поступила в редакцию 16 августа 2006 г.)

Приведено гамильтоново описание обобщенного преобразования Болина, связывающего системы с различными степенными потенциалами. Предложен аналог этого соответствия на искривленных поверхностях непостоянной кривизны, обобщающих сферу и гиперболоид.

1. Введение

Задачи Кеплера и изотропного осциллятора являются наиболее известными системами классической и квантовой механик, обладающими скрытой симметрией. Полные алгебры симметрий этих систем есть $su(d)$ в случае осциллятора и $so(d+1)$ (при фиксированной энергии) в случае задачи Кеплера, где d – размерность пространства [1]. Если в случае осциллятора скрытые симметрии имеют прозрачную интерпретацию в терминах геометрии фазового пространства, то в случае задачи Кеплера они существенно нелинейны и имеют нетривиальную интерпретацию в терминах геодезических потоков на d-мерной сфере, заданной в пространстве импульсов. Между тем еще в XIX веке отмечалось сходство осциллятора и задачи Кеплера, проявляющееся, в частности, в эллиптичности классических траекторий этих систем. Сходство траекторий этих систем отражается в том, что преобразование $r = R^2$ переводит $(p+1)$-мерную радиальную задачу Кеплера в $2p$-мерную задачу радиального осциллятора как в классическом случае, так и на квантовом уровне (см., например, [2]). Впоследствии, в трех выделенных случаях, $p = 1,2,4$, было установлено полное отображение задачи Кеплера в задачу изотропного осциллятора. Эти соответствия устанавливаются посредством т.н. преобразований Леви-Чивиты-Болина [3] (для $p=1$), Кустаанхеймо-Штифеля [4] (для $p=2$) и Гурвица [5] (для $p=4$). Эти преобразования имеют глубокий геометрический смысл, будучи связанными с известными расслоениями Хопфа (расслоения сферы над сферой) и, соответственно, с существованием алгебр вещественных чисел, комплексных чисел, и кватернионов (см., например, обзор [6]). Благодаря этим расслоениям удается связать угловые части задач осциллятора и Кеплера. Отметим, что имеется последнее, четвертое расслоение Хопфа, отвечающее октонионам, которое должно соответствовать связи между 16-мерным осциллятором и 9-мерной задачей Кеплера. В популярной книге Арнольда [7] приведено обобщение преобразования Болина для систем со степенными потенциалами. С другой стороны, имеются обобщения задач осциллятора [8] и Кеплера [9] на простейшие пространства постоянной кривизны, сферу и гиперболоид. Связь между этими системами была установлена Нерсесяном и Погосяном [10] и оказалась довольно необычной: как обнаружилось, и сферический, и гиперболический осцилляторы переходят в гиперболическую задачу Кеплера.

В предлагаемой работе мы даем описание преобразования Арнольда-Болина на гамильтоновом языке, сильно упрощающем его восприятие, а затем приводим его обобщение на некоторый класс пространств с непостоянной кривизной, в духе работы [10].

Исследование и обобщение связи задач осциллятора и Кеплера имеет не только методический интерес. Это связано, во-первых, с многоплановостью приложений задач осциллятора и Кеплера в самых широких областях физики. Во-вторых, отображения Хопфа играют ключевую роль в современных теоретико-полевых и струнных моделях, обуславливая выделенность определенных размерностей пространства-времени этих моделей. Поэтому структуры, обнаруженные при исследовании связи задач осциллятора и Кеплера, могут быть применены в совершенно ином контексте.

2. Преобразование Болина и его обобщение

В начале XX века независимо Болином и Леви-Чивитой было установлено соответствие между классической (2-мерной) задачей Кеплера и круговым осциллятором [3]. Было показано, что траектории, соответствующие этим задачам, связаны преобразованием

$$w = z^2 , \qquad (1)$$

где комплексные координаты $z = (x_1 + ix_2)/\sqrt{2}$ и $w = (y_1 + iy_2)/\sqrt{2}$ параметризуют положение частицы в осцилляторной и кеплеровой задаче.

Рассмотрим соответствие между классическими двумерной задачей Кеплера и двумерным изотропным (круговым) осциллятором на гамильтоновом языке. Гамильтонову динамику кругового осциллятора удобно описывать фазовым пространством $T_*I\!C$, на котором заданы следующие канонические скобки Пуассона и гамильтониан:

$$\{\pi, z\} = 1 , \quad \{\bar{\pi}, \bar{z}\} = 1 ; \qquad (2)$$

$$H_{osc} = \frac{1}{\mu}\pi\bar{\pi} + \mu\omega^2 z\bar{z} . \qquad (3)$$

Интегралы движения, образующие алгебру $su(2)$, удобно представить в виде вещественного интеграла J, имеющего смысл вращательного момента осциллятора, и комплексного интеграла I^+ (комплексно-сопряженную ему величину мы обозначаем I^-):

$$J = i(\pi z - \overline{\pi z}), \qquad I^+ = \frac{\pi^2}{\mu} - \mu\omega^2\overline{z}^2, \qquad \{I^+, I^-\} = 2\omega^2 J, \quad \{I^\pm, J^-\} = \pm 2I_\pm . \tag{4}$$

Теперь совершим преобразование $(z,\pi)\to(w,p)$, каноническое на всем фазовом пространстве (за исключением начала координат, в котором оно сингулярно):

$$w = z^2, \quad p = \frac{\pi}{2z}, \quad \{w,w\} = 0, \quad \{w,p\} = 1, \quad \{p,\overline{p}\} = 0 . \tag{5}$$

Это преобразование переводит изоэнергетические поверхности осциллятора $H_{osc} = E_{osc}$ в изоэнергетические поверхности задачи Кеплера $H_K = -2\mu\omega^2$, где

$$H_C = \frac{1}{2\mu} p\overline{p} - \frac{E_{osc}}{|w|}; \tag{6}$$

При этом интегралы движения осциллятора переходят во вращательный момент и в вектор Рунге-Ленца двумерной задачи Кеплера:

$$j = 2\widetilde{J} = 2i(wp - \overline{wp}), \qquad j \to 2\widetilde{J} = 2\left(2iJp - \frac{\alpha w}{2|w|}\right). \tag{7}$$

Отметим, что при переходе от задачи осциллятора к задаче Кеплера удваивается вращательный момент системы, что проявляется в двойном обходе орбиты в задаче Кеплера при однократном обходе орбиты в задаче об осцилляторе. Чтобы увидеть это, параметризуем траектории осциллятора эллипсом Жуковского, где комплексный параметр u параметризует окружность с радиусом, отличным от единицы ($|u| = \text{const} \neq 1$):

$$z = u + \frac{1}{u}, \qquad u = r_0 e^{i\phi}, \qquad r_0 \neq 0 . \tag{8}$$

Ясно, что большая и малая полуоси эллипса задаются выражениями

$$a = r_0 + \frac{1}{r_0}, \qquad b = r_0 - \frac{1}{r_0} . \tag{9}$$

Тогда в результате преобразования $w = z^2$ имеем

$$z = u + \frac{1}{u} \to w = u^2 + \frac{1}{u^2} + 2,$$

то есть центр притяжения задачи Кеплера смещается в фокус эллипса с полуосями

$$a = r_0^2 + \frac{1}{r_0^2}, \qquad b = r_0^2 - \frac{1}{r_0^2},$$

а обходу частицей эллипса в задаче об осцилляторе соответствует двойной обход орбиты в задаче Кеплера. Таким образом, при рассмотрении эллиптических орбит мы можем констатировать эквивалентность классического кругового осциллятора и двумерной задачи Кеплера.

Б популярной книге Арнольда [7] приводится обобщение преобразования Болина

$$w = z^N, \tag{10}$$

связывающее классические траектории двумерных систем с потенциалами $|z|^a$ и $|w|^b$, где

$$(a+2)(b+2) = 4, \qquad N = \frac{a+2}{2}. \tag{11}$$

Опишем на гамильтоновом языке это преобразование, а также представим его обобщение на сфере, плоскости Лобачевского и связанных с ними классах пространств. Сперва рассмотрим случай Евклидова пространства.

Рассмотрим на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ гамильтонову систему, заданную каноническими скобками Пуассона (2) и гамильтонианом (здесь и далее $\mu = 1$)

$$H = \pi\overline{\pi} + A(z\overline{z})^{a/2}. \tag{12}$$

Ее вращательный момент имеет вид

$$J = i(\pi z - \overline{\pi}\overline{z}). \tag{13}$$

Теперь совершим каноническое преобразование

$$w = z^N, \qquad p = \frac{\pi}{Nz^{N-1}}, \qquad \{w, w\} = 0, \quad \{w, p\} = 1, \quad \{p, \overline{p}\} = 0. \tag{14}$$

Это преобразование приводит изоэнергетические поверхности гамильтониана H, $H = E_{osc}$ к следующему виду:

$$N^2\left(w\overline{w}\right)^{\frac{N-1}{N}} p\overline{p} + A\left(w\overline{w}\right)^{\frac{a}{2N}} - E_{osc} = 0. \tag{15}$$

Положив $a/2 = N - 1$, и поделив на $N^2(w\overline{w})^{(N-1)/N}$, получим

$$\widetilde{H} = E, \qquad \widetilde{H} = p\widetilde{p} + B(w\overline{w})^{b/2}, \qquad E = -\frac{A}{N^2}, \tag{16}$$

где

$$B = -\frac{E_{osc}}{N^2}, \qquad b = \frac{2(N-1)}{N}. \tag{17}$$

Исключив N, мы приходим к выражению (3). Из него, в частности, видно, что потенциалу осциллятора, $a = 2$, отвечает потенциал задачи Кеплера, $b = -1$. Этот случай подробно разобран выше. Другим важным случаем является $a = 4$, часто встречающийся в задачах квантовой теории поля. Преобразование Арнольда-Болина переводит его в систему с потенциалом $b = -4/3$.

Вращательный момент исходной системы оказывается равным N-кратному вращательному моменту полученной системы

$$j = i(z\pi - \bar{z}\bar{\pi}) = N\widetilde{J}\ , \qquad \widetilde{J} = i(wp - \overline{wp})\ . \tag{18}$$

3. Обобщение преобразования Арнольда-Болина

Попытаемся обобщить приведенное преобразование на искривленные пространства, с метриками вида

$$ds^2 = \frac{dz d\bar{z}}{(1+\varepsilon z^n \bar{z}^n)^{2m}}\ , \qquad \varepsilon = \pm 1\ . \tag{19}$$

Скалярная кривизна этой метрики задается выражением

$$R = -g\frac{\partial^2 \log g}{\partial z \partial \bar{z}} = 2\varepsilon m n^2 (1+\varepsilon z^n \bar{z}^n)^{2(m-1)}(z\bar{z})^n\ . \tag{20}$$

Этот класс метрик включает также ряд других важных в теоретической физике пространств. В частности, к системам на таких пространствах сводится движение тела в поле черной дыры (как обычной, задаваемой метрикой Шварцшильда, так и т.н. топологической, или БТЗ черной дыры). При $n = m = 1$ мы имеем сферу, если $\varepsilon = 1$, и гиперболоид, если $\varepsilon = -1$.

Рассмотрим на таком пространстве гамильтонову систему, заданную скобками Пуассона (2) и гамильтонианом

$$H = (1+\varepsilon z^n \bar{z}^n)^{2m}\pi\bar{\pi} + \frac{A(z\bar{z})^{a/2}}{(1-\varepsilon z^n \bar{z}^n)^{2m}}\ . \tag{21}$$

При $n = m = 1$, $a = 2$ эта система сводится к осциллятору Хиггса.

Совершив каноническое преобразование (5), и поделив поверхность уровня энергии $H = E_{osc}$ на $N^2(w\bar{w})^{(N-1)/N}$, мы придем к выражению

$$(1-(w\bar{w})^{2n/N})^{2m}p\bar{p} + \frac{A}{N^2}(w\bar{w})^{\frac{a-2N+2}{2N}} - E\frac{(1+(w\bar{w})^{n/N})^{2m}}{N^2(w\bar{w})^{\frac{N-1}{N}}} = 0\ . \tag{22}$$

Для соответствия с плоским случаем положим

$$N = \frac{a}{2} + 1\ .$$

Тогда последнее выражение можно представить в виде поверхности уровня энергии новой системы

$$\widetilde{H} = E\ ,$$

заданной гамильтонианом

$$\widetilde{H}=\left(1-(w\overline{w})^{2n/N}\right)^{2m}p\overline{p}-B\frac{\left(1+\varepsilon(w\overline{w})^{n/N}\right)^{2m}}{(w\overline{w})^{\frac{N-1}{N}}} \qquad (23)$$

со следующими значениями энергии и константы связи:

$$E=-\frac{A}{N^2}, \qquad B=-\frac{E_{osc}}{N^2}.$$

Как видим, лишь при $N=2$, $m=1$ мы переводим систему на сфере (плоскости Лобачевского) в систему на плоскости Лобачевского. При этом потенциал исходной системы есть известный потенциал осциллятора Хиггса, а результирующая система отвечает предложенному Шредингером обобщению задачи Кеплера. Нетрудно рассмотреть его простейшее обобщение.

Действительно, при $n=N-1$, $m=1$ второй член в потенциале становится константой. В этом случае удобно переопределить энергию и гамильтониан системы, приведя его к виду

$$\widetilde{H}'=\left(1-(w\overline{w})^{k}\right)^{2}p\overline{p}-B\frac{1+(w\overline{w})^{k}}{(w\overline{w})^{\frac{k}{2}}}, \qquad k=\frac{2n}{n+1}. \qquad (24)$$

В этом случае энергия системы связана с энергией исходной системы выражением

$$E=-\frac{A}{(n+1)^2}+2\varepsilon\frac{E_{osc}}{(n+1)^2}.$$

Итак, мы привели гамильтоново описание преобразования Болина, связывающего круговой осциллятор с задачей Кеплера. Затем мы описали аналогичным образом преобразование Арнольда-Болина, связывающее системы с потенциалами других степеней, и рассмотрели его аналог на искривленных поверхностях непостоянной кривизны, имеющих пределом сферу и плоскость Лобачевского. Заметим, что аналогичное квантовомеханическое преобразование приводит к системам с дробным спином [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. **А.М.Переломов**. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М., Наука, 1990.
2. **V.M.Ter-Antonyan**. Dyon-oscillator duality, quant-ph/0003106.
3. **K.Bohlin**. Bull. Astr., **28**, 144 (1911). **T.Levi-Civita.** Opere Mathematiche, **2**, 411 (1906).
4. **P.Kustaanheimo, E.Stiefel**. J. Reine Angew. Math., **218**, 204 (1965).
5. **L.S.Davtyan, L.G.Mardoyan, G.S.Pogosyan, A.N.Sissakian, V.M.Ter-Antonyan**. J. Phys., **A20**, 6121 (1987).
6. **A.Nersessian**. Lecture Notes on Physics, **698,** 139 (2006) [arXiv:hep-th/0506170].
7. **В.И.Арнольд.** Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. М., Наука, 1989.
8. **P.W.Higgs**. J. Phys. A, **12** 309 (1979).
9. **E.Schrödinger**. Proc. Roy. Irish Soc., **46,** 9 (1941); **46,** 183 (1941); **47,** 53 (1941).

10. **A.Nersessian, G.Pogosyan**. Phys. Rev. A, **63**, 020103(R) (2001). **A.Nersessian**. Phys. Atom. Nucl., **65**, 1070 (2002) [arXiv:math-ph/0010049].
11. **A.Nersessian, V.Ter-Antonian, M.M.Tsulaia**. Mod. Phys. Lett. A, **11**, 1605 (1996). **A.Nersessian, V.M.Ter-Antonian**. Phys. Atom. Nucl., **61**, 1756 (1998).

ՕՍՑԻԼՅԱՏՈՐ–ԿԵՊԼԵՐ ՀԱՄԱՊԱՏԱՍԽԱՆՈՒԹՅԱՆ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՈՒՄԸ

Կ.Ս. ԱՐԱՄՅԱՆ

Դիտարկված է տարբեր աստիճանային պոտենցիալներով համակարգերի միջև կապ ստեղծող Բոլինի ընդհանրացված ձևափոխության համիլտոնյան նկարագրությունը: Առաջարկված է այդ համապատասխանության ընդհանրացումը փոփոխական կորությամբ մակերևույթների համար, որոնք հանդիսանում են սֆերայի և հիպերբոլոիդի ընդհանրացումը:

GENERALIZATION OF THE OSCILLATOR–KEPLER CORRESPONDENCE

K.C. ARAMYAN

We give the Hamiltonian description of the generalized Bohlin transformation connecting the systems with potentials of different powers. Then we suggest an analog of this correspondence for the curved spaces of non-constant curvature, which are the generalizations of the sphere and hyperboloid.