Известия НАН Армении, Физика, т.41, №5, с.333-339 (2006)

УДК 531.19

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НУЛЕЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЫ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПОТТСА

К.Г. САРГСЯН, Л.Н. АНАНИКЯН

Ереванский физический институт

(Поступила в редакцию 17 января 2006 г.)

На основе трансфер-матричного метода разработан общий подход для получения нулей статистической суммы в случае одномерной модели Поттса с числом состояний Q, позволяющий получить распределения нулей Янга–Ли, Фишера и хроматических нулей. Рассмотрены нули для $Q < 1$. Приведена общая формула плотности распределения нулей статистической суммы и на ее основе проведен анализ Янг–Ли, Фишеровских и хроматических сингулярностей. Получены соответствующие им критические индексы.

1. Введение

Термодинамические свойства физической системы могут быть описаны с помощью статистической суммы. С появлением статистической механики, одним из ключевых вопросов являлась проблема образования сингулярностей в термодинамическом пределе $(N \to \infty)$ при фазовых переходах. Один из подходов был дан в работах Ли и Янга в 1952 г. [1]. В них рассмотрена статистическая сумма модели Изинга как полином от активности $(\mu = e^{\beta H})$ и исследовано распределение нулей полинома в комплексной плоскости. Было показано, что нули Янга–Ли статистической суммы для модели Изинга произвольной размерности лежат на единичной окружности и фазовый переход в системе происходит в случае, когда непрерывное распределение нулей статистической суммы пересекает реальную ось в термодинамическом пределе. В дальнейшем Фишер рассмотрел также нули статистической суммы от комплексной температуры (нули Фишера) [2].

Знание распределения нулей статистической суммы, полностью задающей критическое поведение системы, играет важную роль. Интересно их рассмотрение на такой простой и эффективной в исследованиях модели, как одномерная модель Поттса с числом состояний Q [3]:

$$H = -J\sum_{i=1}^{N}\delta(\sigma_i,\sigma_{i+1}) - H\sum_{i=1}^{N}\delta(\sigma_i,q)\ . \qquad (1)$$

Одномерная модель Поттса при $Q < 1$ описывает такие реальные системы и процессы, как процесс гелеобразования и вулканизации в разветвленных полимерах [4], задачу перколяции в пределе $Q \to 1$ [5,6], резисторную сеть, а также древовидную перколяцию при

$Q = 0$ [6] и разреженные спиновые стекла в случае $Q = 1/2$ [7].

В данной статье рассмотрены нули Янга–Ли и Фишера при $Q < 1$, а также хроматические нули от комплексного хроматического числа Q [8], изучены соответствующие сингулярности, приведены граничные точки распределения нулей статистической суммы и критические индексы σ, μ, ν.

2. Статистическая сумма и собственные значения трансфер-матрицы

Нули статистической суммы для этой модели уже были частично рассмотрены в разных работах. Динамическим подходом распределения нулей статистической суммы рассчитаны в [9]. Трансфер-матричный метод, используемый и в данной работе, был применен для разных частных случаев [10]. Нули статистической суммы исследовались также с применением метода фейнмановских диаграмм [11].

Как известно, используя трансфер-матричный метод, статистическую сумму системы можно представить в виде

$$Z_N = \mathrm{Tr} V^N . \tag{2}$$

Трансфер-матрица для одномерной модели Поттса имеет вид

$$V_{i,j} = \exp\left[\beta J \delta(i,j) + \beta H \frac{(\delta(i,q) + \delta(j,q))}{2}\right]. \tag{3}$$

Ненулевые собственные значения λ_i трансфер-матрицы задаются следующим образом:

$$\lambda_\pm = (A \pm iB)/2 \text{, где } A = a(1 + x + Q - 2) \text{ и } B = -i\sqrt{[a(1-x)+Q-2]^2 + 4(Q-1)x} ,$$
$$\lambda_0 = a - 1, \qquad a = e^{\beta J}, \qquad x = e^{\beta H} . \tag{4}$$

Статистическую сумму теперь можно представить в виде

$$Z_N = \lambda_+^N + \lambda_-^N + (Q-2)\lambda_0^N . \tag{5}$$

Данное выражение легко обобщить на рациональные Q. Те же величины для собственных значений получаются при аналогичных расчетах в формализме с непрерывными Q [11].

Легко заметить, что есть всего две возможности для λ_i. Во-первых, это случай, когда $|\lambda_+| = |\lambda_-| > |\lambda_0|$ (а), и в статистической сумме сокращается третий член в термодинамическом пределе. А также ситуация, когда $|\lambda_-| = |\lambda_0| > |\lambda_+|$ или $|\lambda_+| = |\lambda_0| > |\lambda_-|$ (б), и соответственно, сокращается первый или второй член в термодинамическом пределе.

3. Нули Янга–Ли

Рассмотрим распределение нулей статистической суммы на примере нулей Янга–Ли, в обоих случаях (а),(б). В первом случае видно, что статистическая сумма будет равна нулю, если собственные значения трансфер-матрицы связаны соотношением

$$\lambda_+ = \lambda_- e^{i\varphi}, \qquad \text{где} \qquad \varphi = \frac{(2p+1)\pi}{N}, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots, N-1. \tag{6}$$

Отсюда следует уравнение для нулей Янга–Ли относительно x:

$$a^2 e^{i\varphi} x^2 + [(Q-1)(e^{i\varphi}+1)^2 - a(a+Q-2)(e^{2i\varphi}+1)]x + (a+Q-2)^2 e^{i\varphi} = 0\,. \qquad (7)$$

Для второго случая можно записать

$$\frac{\lambda_+}{\lambda_0} = (2-Q)^{1/N}\exp(i\phi_k) = b\,, \quad \text{где} \quad \phi_k = \frac{2\pi k}{N}\,, \qquad k = 0,1,2,\ldots,N-1\,. \qquad (8)$$

Отсюда легко получить уравнение для x, задающее нули Янга–Ли:

$$[a^2 + a(Q-2) - ab(a-1) - Q + 1]x + b(a-1)(b(a-1) - a - Q + 2) = 0\,. \qquad (9)$$

Из этих двух уравнений, с учетом указанных условий их применения, получаем нули Янга–Ли при любых параметрах a и x (пример такого распределения приведен на рис.1).

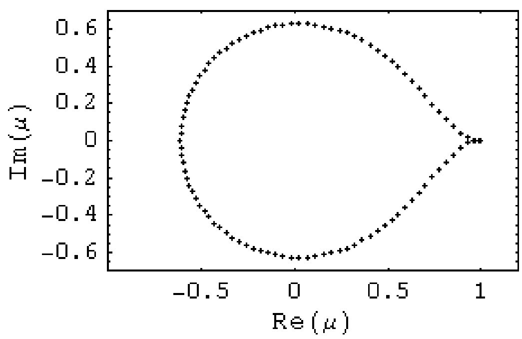

Рис.1. Нули Янга–Ли при параметрах $a = 3$, $Q = 1/10$, $N = 100$.

Для рассмотрения плотности распределения нулей x на кривой мы в общем случае получаем следующее выражение:

$$g(\psi) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\left(\dfrac{\partial(\operatorname{Re} x)}{\partial\psi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial(\operatorname{Im} x)}{\partial\psi}\right)^2}}\,, \qquad (10)$$

где $\psi = \varphi$ или ϕ в зависимости от конкретного случая. Функция $g(\psi)$ нормирована условием

$$\int_0^{2\pi} g(\psi)\,d\psi = 1\,. \qquad (11)$$

Соответствующие сингулярности плотности распределения возникают на концах окружности, задаваемой уравнениями (5). В случае окружности плотность нулей задается более простым соотношением $g(\psi) = (1/2\pi)\cdot(\partial\psi/\partial\theta)$, где θ есть угол, описывающий окружность в полярных координатах.

Расчет нулей Янга–Ли для случая сингулярности $g(\psi) \propto |\psi - \psi_0|^\sigma$ дает соотношение

$$g(\psi \to \psi_0) \propto \frac{1}{\sqrt{x(\psi) - x(\psi_0)}}, \qquad (12)$$

где ψ_0 задает граничные точки на окружности (5):

$$x^{\pm}(\psi_0) = x^{\pm}(0) = \frac{(2 - 2a + a^2 - 2Q + Qa \pm 2\sqrt{(1-a)(Q-1)(a+Q-1)})}{a^2}. \qquad (13)$$

Таким образом, критический индекс, соответствующий сингулярности Янга–Ли, принимает значение $\sigma = -1$. При $Q < 1$ критический индекс имеет такое же значение, что и в случае $Q > 1$.

4. Нули Фишера

В случае нулей Фишера можно провести аналогичные вычисления. Будем опять рассматривать оба возможных случая (а) и (б) для собственных значений.

В первом случае (а) получаем для распределения нулей y следующее уравнение:

$$\begin{aligned} &y^2(e^{i\varphi}(4 + Q^2 + 2Q(-2+x) - 2x) + (1 + e^{2i\varphi})(-1+Q)x) - \\ &-y(-2+Q)(-2e^{i\varphi} + x + e^{2i\varphi}x) - (x + e^{2i\varphi}x - e^{i\varphi}(1+x)) = 0. \end{aligned} \qquad (14)$$

Во втором случае (б):

$$y^2(b^2 + b(-2+Q) + x - Qx) + y(-2b^2 + (2-Q)x + b(3 - Q + x)) + (b-1)(b-x) = 0. \qquad (15)$$

Из этих двух уравнений, учитывая области их применимости, получаются распределения нулей Фишера при любых параметрах x, Q и N (см. рис.2).

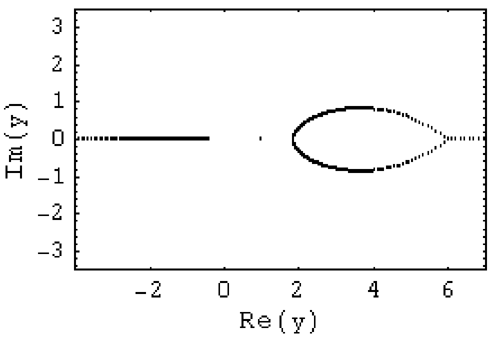

Рис.2. Нули Фишера при $Q = 1/2$, $x = 5/2$, $N = 100$.

Используя соотношения (10), (11) для плотности распределения нулей на кривой, заменяя x на y и изучая поведение этой величины вблизи граничных точек, получаем:

$$g(\psi \to \psi_0) \propto \frac{1}{\sqrt{y(\psi) - y(\psi_0)}}, \qquad (16)$$

где граничные точки описываются уравнением (14):

$$y^{\pm}(\psi_0) = y^{\pm}(0) = \frac{(Q-2)(x-1) - 2\sqrt{(1-Q)(x-1)^2 x}}{(Q-2)^2 - 4(1+Q)x}. \qquad (17)$$

Критический индекс, соответствующий Фишеровской сингулярности $g(\psi) \propto |\psi - \psi_0|^{\mu}$, принимает значение $\mu = -1$. Как и в случае нулей Янга–Ли, критический индекс при $Q < 1$ остается таким же, как и для $Q > 1$.

5. Хроматические нули

Проведем сходное расссмотрение и в случае хроматических нулей *Q*. Снова выделим два случая соотношений между собственными значениями трансфер-матрицы.

В первом случае (а), полностью повторяя рассуждения для предыдущих типов нулей, получаем уравнение:

$$\begin{aligned} &e^{i\varphi}Q^2 - Q[4(a-1)x + (a-1)e^{2i\varphi}x - 2e^{i\varphi}(-2+a+x)] - \\ &-[(a-1)^2 x + (a-1)^2 e^{2i\varphi}x + e^{i\varphi}\{(4a-4+2x-a^2(1+x^2)\}] = 0. \end{aligned} \qquad (18)$$

Для второго случая (б):

$$Q(1-a)(b-x) + (a-1)((a-1)b^2 + (a-1)x - b(-2+a+ax)) = 0. \qquad (19)$$

С учетом области применимости уравнений получаем распределения для любых параметров a, x и *N*. Пример такого распределения приведен на рис.3.

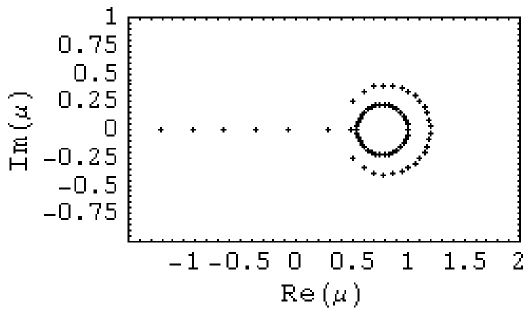

Рис.3. Хроматические нули при $x = 3$, $a = 1/5$, $N = 100$.

Для плотности распределения хроматических нулей на кривой рассуждаем так же, как и в случае нулей Фишера. Хроматическая сингулярность в данном случае возникает для граничных точек окружностей, задаваемых уравнениями (16), (17).

Изучая поведение плотности хроматических нулей при приближении к граничным точкам, получаем как и в предыдущих случаях:

$$g(\psi \to \psi_0) \propto \frac{1}{\sqrt{Q(\psi) - Q(\psi_0)}}. \qquad (20)$$

Граничные точки можно найти из уравнения окружности (18):

$$Q^{\pm}(\psi_0) = Q^{\pm}(0) = (a-2)(x-1) \pm 2\sqrt{(1-a)(x-1)x} \; . \tag{21}$$

Критический индекс, соответствующий хроматической сингулярности $g(\psi) \propto |\psi - \psi_0|^{\nu}$, принимает значение $\nu = -1$. Как и в предыдущих типах нулей статистической суммы, критический индекс при $Q < 1$ остается таким же, как и для $Q > 1$.

6. Заключение

В данной работе изложен общий метод нахождения нулей Янга–Ли, Фишера и хроматических нулей статистической суммы одномерной модели Поттса трансфер-матричным методом, при любых возможных параметрах. Также приведено соотношение для функции распределения плотности нулей статистической суммы на кривой и на ее основе изучен нерасмотренный до этого случай $Q < 1$. Получены критические индексы для соответствующих сингулярностей. Данный подход позволит в дальнейшем исследовать нули Фишера, сингулярности Янга–Ли и Фишера, а также получить критические индексы для одномерных моделей Блюме–Капела и Блюме–Эвери–Гриффитса [12]. Трансфер-матричный подход также будет применен для исследования нулей статистической суммы и критического поведения модели Поттса на треугольной зигзаг-решетке, описывающей полипептиды и белки. Ранее эта модель была рассмотрена динамическим методом с многомерным отображением [13].

Авторы благодарят Н.С.Ананикяна, Н.Я.Иванова и Р.Артузо за постановку задачи и многочисленные полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **C.N.Yang**, **T.D.Lee**. Phys. Rev., **87**, 404 (1952), **T.D.Lee, C.N.Yang**. Phys. Rev., **87**, 410 (1952).
2. **M.E.Fisher**, in Lectures in Theoretical Physics, edited by W.E. Brittin.University of Colorado Press, Boulder, vol.**7c**, p.1, 1965.
3. **R.B.Potts.** Proc. Camb. Philos. Soc., **48**, 106 (1952); **F.Y. Wu**. Rev. Mod. Phys., **54**, 235 (1982).
4. **T.C.Lubensky, J.Isaacson.** Phys. Rev. Lett., **41**, 829 (1978).
5. **P.W.Kasteleyn, C.M.Fortuin.** J. Phys. Soc. Jpn. Suppl., **26**, 11 (1969); **C.M.Fortuin, P.W.Kasteleyn.** Physica A**, 57**, 536 (1972).
6. **M.J. Stephen.** Phys. Lett. A, **56**, 149 (1976).
7. **A. Aharony.** J. Phys. C, **11**, L457 (1978).
8. **S.-Y.Kim, R.J.Creswick.** Phys. Rev. E, **63**, 066107 (2001); **S.-C.Chang, J.Salas, R.Shrock**. J. Stat. Phys., **107**, 1207 (2002); **J.Salas, A.D.Sokal.** J. Stat. Phys., **104,** 609 (2001); **K.Appel, W.Haken**. Contemp. Math., **98,** 1 (1989); **R.Shrock, S-H.Tsai**. Phys. Rev. E, **56** 4111 (1997); **R.Shrock, S-H.Tsai**. Physica A, **275** 429 (2000); **N.L.Biggs, R.Shrock**. J. Phys. A., **32** L489 (1999); **Z.Glumac, K.Uzelac**. Physica A, **310,** 91 (2002).
9. **R.G.Ghulghazaryan, N.S.Ananikian**. J. Phys. A., **36**, 6297 (2003); **R.G.Ghulghazaryan, N.S.Ananikian, P.M.A.Sloot.** Phys. Rev. E, **66**, 046110 (2002); **N.S.Ananikian, R.G.Ghulghazaryan.** J. Comp. Methods in Sciences and Engineering, **2**, 75 (2002); **A.E.Alakhverdian., N.S.Ananikian, S.K.Dallakian**. Phys. Rev. E, **57**, 2452 (1998); **J.L.Monroe**. Phys. Lett. A, **188**, 80 (1994).
10. **Z.Glumac, K.Uzelac**. J. Phys. A, 27 7709, (1994); **S.-Y.Kim**. Journal of the Korean Society, **44**, 495 (2004); **S.-Y.Kim**. Nucl. Phys. B, **705** [FS], 504 (2005); **S.-Y.Kim**. Phys. Rev. Lett., **93**, 130604 (2004); **R.J.Creswick, S.-Y.Kim**. Phys. Rev. E, **56**, 2418 (1997); **S.-Y.Kim**. Phys. Rev. E, **70**, 016110 (2004); **G.Bhanot, J.Lacki**. J. Stat. Phys., **71**, 259 (1993); **S.-Y.Kim, R.J.Creswick**. Phys. Rev. Lett., **82**, 3924 (1999); **S.-Y.Kim**. Nucl. Phys. B, **637**, 409 (2002).

11. **L.A.F.Almeida, D.Dalmazi.** J. Phys. A, **38,** 6863 (2005); **M.Staudacher.** Nucl. Phys. B, **336,** 349 (1990); **W.Janke, D.A.Johnston, M.Stathakopoulos**. Nucl. Phys. B, **614,** 494 (2001); **L.C.de Albuquerque, N.A.Alves, D.Dalmazi.** Nucl. Phys. B, **580,** 739 (2000); **V.A.Kazakov,** Phys. Lett. A, **119,** 140 (1986); **D.Boulatov, V.A.Kazakov**. Phys. Lett. B, **186,** 379 (1987); **B.P.Dolan, W.Janke, D.A.Johnston, M.Stathakopoulos**. J. Phys. A, **34,** 6211 (2001); **D.A.Johnston**. J. Phys. A, **31,** 5641 (1998) ; **B.Dolan.** Phys. Rev. E, **52,** 4512 (1995).
12. **M.Blume, V.J.Emery, R.B.Griffiths. Phys. Rev. B, 4**, **1071 (1971); A.Z.Akheyan., N.S.Ananikian**. J. Phys. A, **29,** 721 (1996); **N.S.Ananikian** et al. **JETP Lett., 59**, 71 (1994); **N.S.Ananikian** et al. Physica A, **172**, 391 (1991); **A.R.Avakian, N.S.Ananikian, N.Sh.Izmailyan.** Phys. Lett. A, **150**, 163 (1990); **N.S.Ananikian**, et al. Solid State Phys. (Soviet), **34**, 3448 (1992).
13. **N.S.Ananikian, L.N.Ananikyan. World Scientific, ed. by S.Rahvar, N.Sadooghi, F.Shojai, 21, (2005).**

ՎԻՃԱԿԱԳՐԱԿԱՆ ԳՈՒՄԱՐԻ ԶՐՈՆԵՐԻ ԲԱՇԽՄԱՆ ԽՏՈՒԹՅՈՒՆԸ ՓՈԹՍԻ ՄԻԱՉԱՓ ՄՈԴԵԼՈՒՄ

Կ.Գ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Լ.Ն. ԱՆԱՆԻԿՅԱՆ

Q վիճակների թվով Փոթսի միաչափ մոդելի վիճակագրական գումարի զրոների ստացման համար տրանսֆեր-մատրիցական մեթոդի հիման վրա մշակված է ընդհանուր մոտեցում, որը թույլ է տալիս ստանալ Յանգ-Լիի, Ֆիշերի և քրոմատիկ զրոների բաշխումները: Դիտարկված են Q<1 դեպքի զրոները: Բերված է վիճակագրական գումարի զրոների բաշխման խտության ընդհանուր բանաձև, և նրա հիման վրա կատարված է Յանգ-Լիի, Ֆիշերի և քրոմատիկ եզակիությունների վերլուծություն: Ստացված են համապատասխան կրիտիկական ինդեքսները:

DISTRIBUTION DENSITY OF PARTITION FUNCTION ZEROS FOR A ONE-DIMENSIONAL POTTS MODEL

K.G. SARGSYAN, L.N. ANANIKIAN

Using transfer-matrix approach, we propose a general approach to obtain one-dimensional *Q*-State Potts model partition function zeros. We give examples of calculated distributions for $Q < 1$ and derive a formula for the zeros distribution density. Also the Yang–Lee, Fisher and chromatic edge singularities are analyzed, using our formula, and their critical exponents are derived.