

УДК 538.945

ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ КВАНТОВЫХ ВИХРЕЙ В СВЕРХПРОВОДНИКАХ ВТОРОГО РОДА

Д.М. СЕДРАКЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 12 июля 2006 г.)

Получена система динамических уравнений, описывающая движение магнитных квантовых вихрей в сверхпроводниках второго рода при $T = 0$. Из этих уравнений выведено уравнение релаксации плотности вихревой решетки (или сверхпроводящего тока) и найдено его стационарное решение. Стационарное значение плотности вихревой решетки соответствует условию исчезновения сверхпроводящего тока в сверхпроводнике и определяется только заданием внешнего магнитного поля.

1. Введение

В сверхпроводниках второго рода при магнитных полях $H > H_{c1}$ имеется так называемое “смешанное состояние”, при котором магнитное поле входит в сверхпроводник в виде Абрикосовских вихрей. Уравнение, описывающее усредненную по вихрям магнитную индукцию $\mathbf{B}$ в сверхпроводнике при постоянном магнитном поле $\mathbf{H}$, имеет вид

$$\lambda^2 \text{rot rot } \mathbf{B} + \mathbf{B} = \Phi_0 n \mathbf{v}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{v}$ – единичный вектор в направлении вихрей, λ – лондоновская глубина проникновения, $\Phi_0 = hc/2e$ – квант магнитного потока, h – постоянная Планка, c – скорость света, e – электрический заряд сверхпроводящего электрона, n – плотность квантованных вихрей и равняется

$$n = \frac{|\mathbf{B}|}{\Phi_0} = \frac{f(H)}{\Phi_0}. \quad (1.2)$$

Здесь функция $|\mathbf{B}| = f(H)$ определена заданием статистически равновесной конфигурации вихревых нитей, обеспечивающей минимум потенциала Гиббса системы [1].

При изменении внешнего магнитного поля $\mathbf{H}$ система вихревых нитей должна измениться так, чтобы соответствовать новому значению магнитного поля. Это изменение обеспечивается перестройкой вихревых нитей, движение которых должно вызываться сверхпроводящими токами, возбуждаемыми изменяющимся внешним магнитным полем. Процесс установления нового распределения вихревых нитей будет характеризоваться

временем релаксации τ , которая, как увидим ниже, будет зависеть как от плотности вихревых нитей, так и от коэффициента трения η этих вихрей [1].

Данная статья посвящена обобщению уравнения (1.1) в случае переменных полей, усредненных по вихревой решетке, и получению уравнений, описывающих релаксацию вихревых нитей. В п.2 получено обобщение уравнения (1.1) в случае переменных полей. В следующем п.3 найдены радиальные и азимутальные скорости вихревых нитей в зависимости от распределения сверхтекучих токов. Далее выводится уравнение, описывающее релаксацию системы вихревых нитей.

2. Динамические уравнения движения вихревых нитей

Как известно, для сверхтекучей жидкости при наличии вихрей уравнение, описывающее сверхтекучее движение при $T = 0$, имеет вид [2]

$$\text{rot} \mathbf{V}_s = \chi n_1 \mathbf{v}_1, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{V}_s$ – сверхтекучая скорость, $\mathbf{v}_1$ – единичный вектор в направлении вихрей, $\chi = \pi \hbar / m$, где m и $\hbar$ – соответственно, масса сверхтекучей частицы и постоянная Планка, а n_1 – плотность вихревых нитей. Здесь предполагается, что $\mathbf{V}_s$ и n_1 в общем случае есть функции от координат и времени. В частном случае, при $n_1 = 0$ уравнение (2.1) переходит в известное требование Ландау для сверхтекучей скорости.

Обобщение уравнения (2.1) в случае сверхпроводящих вихрей при $T = 0$ можно записать в следующей форме:

$$\text{rot} \mathbf{M} = \mathbf{v} \Phi_0 n, \quad (2.2)$$

где

$$\mathbf{M} = \frac{mc}{e^2 n_s} \mathbf{j}_s + \mathbf{A}. \quad (2.3)$$

Здесь $\mathbf{j}_s$ – сверхпроводящий ток, $\mathbf{A}$ – вектор-потенциал магнитного поля $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$, m и n_s – соответственно, масса и плотность сверхпроводящих электронов. Можно убедиться, что если подставить уравнение (2.3) в (2.2) и учесть уравнение Максвелла $\text{rot} \mathbf{B} = (4\pi/c) \mathbf{j}_s$, то можно получить уравнение (1.1). Обобщенное нами уравнение (2.2) удовлетворяется, когда функции $\mathbf{M}$, $\mathbf{j}_s$ и $\mathbf{A}$ зависят от координат и времени. Чтобы замкнуть динамические уравнения, описывающие движение вихревых нитей, необходимо добавить к уравнению (2.2) уравнение сохранения вихревых нитей

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n \mathbf{V}_L) = 0, \quad (2.4)$$

где $\mathbf{V}_L$ – скорость вихревых нитей, и уравнение, определяющее скорость движения вихревых нитей. Последнее уравнение можно получить из равенства нулю суммы сил, действующих на вихрь.

При течении сверхпроводящего тока на единицу длины вихря с потоком Φ_0 будет действовать сила, определяющаяся формулой

$$\mathbf{F}_m = \frac{e}{c} n_s \Phi_0 [(\mathbf{V}_s - \mathbf{V}_L), \mathbf{v}], \quad (2.5)$$

где $\mathbf{V}_s$ выражается через сверхпроводящий ток $\mathbf{j}_s$ как $\mathbf{V}_s = \mathbf{j}_s / en_s$. Сила (2.5) есть аналог силы Магнуса в сверхтекучей жидкости. На единицу длины вихря действует также сила трения, которая пропорциональна скорости вихря $\mathbf{V}_L$:

$$\mathbf{F}_{тр} = -\eta \mathbf{V}_L. \quad (2.6)$$

Уравнение, определяющее скорость вихря $\mathbf{V}_L$, можно получить из условия

$$\mathbf{F}_m + \mathbf{F}_{тр} = 0. \quad (2.7)$$

Ниже мы перейдем к определению $\mathbf{V}_L$ через заданные сверхпроводящие токи $\mathbf{j}_s$.

3. Уравнение релаксации сверхпроводящих вихрей

Рассмотрим сверхпроводящий бесконечный цилиндр, помещенный во внешнее магнитное поле, направленное параллельно оси цилиндра. Используем цилиндрические координаты и ось Z направим параллельно оси цилиндра. Тогда вихрь, т.е. вектор $\mathbf{v}$, будет направлен по оси Z . Если ввести цилиндрические координаты r и φ , то векторное уравнение (2.7), записанное в компонентах в направлениях r и φ , будет иметь следующий вид:

$$V_{Lz} = \kappa (V_{s\varphi} - V_{L\varphi}), \quad (3.1)$$

$$V_{L\varphi} = \kappa V_{Lr}, \quad (3.2)$$

где введено обозначение

$$\kappa = \frac{en_s \Phi_0}{\eta c}. \quad (3.3)$$

Разрешив систему уравнений (3.1) и (3.2) относительно V_{Lr} и $V_{L\varphi}$, окончательно получим:

$$V_{L\varphi} = \frac{\kappa^2 / en_s}{1 + \kappa^2} j_{s\varphi}, \quad (3.4)$$

$$V_{Lr} = \frac{\kappa / en_s}{1 + \kappa^2} j_{s\varphi}. \quad (3.5)$$

Заметим, что, если согласно (3.2) при больших коэффициентах трения, т.е. при малых κ , основное движение вихрей радиальное, то при малых коэффициентах трения, т.е. при больших κ , основное движение вихрей будет азимутальным.

Теперь перейдем к получению уравнения релаксации вихревой решетки. Запишем уравнения (2.2) и (2.4) в цилиндрических координатах, учитывая, что вектор $\mathbf{v}$ направлен по оси Z . Тогда имеем

$$\frac{\partial}{\partial r} (r M_\varphi) = n \Phi_0 r, \quad (3.6)$$

и

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rnV_{Lr}). \quad (3.7)$$

Если продифференцировать обе стороны уравнения (3.6) по t и подставить $\partial n/\partial t$ из уравнения (3.7), окончательно получим

$$\frac{\partial}{\partial t} M_\varphi = -\Phi_0 n V_{Lr}. \quad (3.8)$$

Подставляя в уравнение (3.8) функцию V_{Lr} из уравнения (3.5) и заменяя $j_{s\varphi}$ на

$$j_{s\varphi} = \frac{e^2 n_s}{mc} (M_\varphi - A_\varphi), \quad (3.9)$$

вместо уравнения (3.8) окончательно получим:

$$\frac{\partial M_\varphi}{\partial t} = -\frac{e\Phi_0 n_s}{mc} \frac{\kappa}{1+\kappa^2} (M_\varphi - A_\varphi). \quad (3.10)$$

Это и есть уравнение релаксации для средней магнитной индукции в сверхпроводнике второго рода. Оно имеет стационарное решение $\partial M_\varphi / \partial t = 0$, что соответствует

$$A_\varphi = M_\varphi. \quad (3.11)$$

В этом случае зависимость M_φ от координаты будет иметь вид

$$M_\varphi = m_\varphi r, \quad (3.12)$$

где $m_\varphi = \text{const}$. Тогда стационарное значение плотности вихрей определится из формулы (3.6) и будет иметь вид

$$n_0 = \frac{2m_\varphi}{\Phi_0}. \quad (3.13)$$

Среднее магнитное поле в сверхпроводнике, согласно (3.11)-(3.13), будет равно

$$\bar{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_\varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 m_\varphi) = n_0 \Phi_0. \quad (3.14)$$

Это магнитное поле и есть $\bar{B} = f(H)$, что фактически определяется заданием внешнего магнитного поля H .

Автор выражает благодарность гранту CRDF/NFSAT №ARP2-3232-YE-04 за финансовую поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. **П. Де Жен.** Сверхпроводимость металлов и сплавов. М., Мир, 1969.
2. **A.D.Sedrakian, D.M.Sedrakian.** Astrophys. J., **447**, 305 (1995).

ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԳԵՐՀԱՂՈՐԴԻՉՆԵՐՈՒՄ
ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ՄՈՐԻԿՆԵՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

Դ.Ս. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ

Ստացված է երկրորդ կարգի գերհաղորդիչներում մագնիսական քվանտային մրրիկների շարժման դինամիկայի հավասարումների համակարգը, երբ $T = 0$: Այս հավասարումների համակարգից ստացված է մրրիկների խտության (կամ գերհաղորդիչ հոսանքի) ռելաքսացիայի հավասարումը և այն լուծված է ստացիոնար դեպքում: Մրրիկների խտության ստացիոնար արժեքը համապատասխանում է $\mathbf{j}_s = 0$ պայմանին և որոշվում է միայն արտաքին մագնիսական դաշտի արժեքով:

EQUATIONS OF QUANTUM VORTEX DYNAMICS
IN II TYPE SUPERCONDUCTORS

D.M. SEDRAKIAN

The equations of motion of magnetic quantum vortices in II type superconductors at $T = 0$ are derived. From these equations the equation of relaxation of the vortex density (or superconducting current) is obtained. It is shown that the stationary value of the vortex density corresponds to the condition $\mathbf{j}_s = 0$ and is determined only by the value of the external magnetic field.