

УДК 330.145

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В СИСТЕМЕ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ФЕРМИ-ЧАСТИЦ

Т.К. МЕЛИК-БАРХУДАРОВ

АОЗТ “Лазерная техника”, Ереван

(Поступила в редакцию 7 октября 2005 г.)

Показано, что фазовые переходы в ферми-жидкости как из нормального состояния в сверхтекучее, так и из жидкого состояния в газообразное, могут быть описаны в рамках одной модели. Подробно исследована область сосуществования жидкой и газовой фаз.

В настоящее время теория ферми-жидкости является одной из наиболее разработанных областей квантовой статистической физики. На основе методов и концепций, разработанных в этой теории, были описаны свойства как ее нормальной, так и сверхтекучей фаз. Многочисленные проявления явления сверхтекучести получили объяснение в рамках простых моделей. Значительно хуже обстоят дела с описанием более обычных переходов, а именно, переходов из жидкого в газообразное или кристаллическое состояние. Выдвигалось даже предположение, что необходимы новые концепции, чтобы описать эти явления в рамках квантовой статистической физики. Цель настоящей работы – показать, что возможности существующей теории далеко не исчерпаны. Нами рассмотрена используемая в теории сверхтекучести модель ферми-жидкости [1] и показано, что на ее основе можно описать не только само явление сверхтекучести и переход жидкости из сверхтекучего в нормальное состояние, но и последующий переход жидкость – газ. Рассмотрение ведется с использованием формализма функциональных интегралов, благодаря чему стало возможным найти не только средние значения величин теории, но и их флуктуации. Далее устанавливается связь флуктуаций характеристик системы с ее стабильностью, что делает в конечном итоге лишними используемые в настоящее время приемы для отбора стабильных решений.

Будем исходить из выражения для термодинамического потенциала системы ферми-частиц $\Omega(\mu, T)$ в формализме функционального интеграла [2]

$$\exp\left(-\frac{\Omega}{T}\right) = \int \exp(S) D\psi D\bar{\psi}, \quad (1)$$

$$S = \int_0^{1/T} d\tau \int \left[\bar{\psi}_\alpha (-\partial/\partial\tau - \varepsilon(\hat{p}) + \mu) \psi_\alpha + \frac{g}{2} \bar{\psi}_\alpha \bar{\psi}_\beta \psi_\beta \psi_\alpha \right] d^3x. \quad (2)$$

Знание потенциала $\Omega(\mu, T)$ позволит определить все термодинамические величины системы. Так, с помощью формул

$$P(\mu, T) = -\frac{\Omega(\mu, T)}{V}, \quad N(\mu, T) = -\frac{\partial\Omega(\mu, T)}{\partial\mu} \quad (3)$$

мы получим параметрическую форму уравнения состояния, т.е. уравнение, связывающее давление, плотность и температуру системы.

Входящие в (2) величины ψ и $\bar{\psi}$ являются антикоммутирующими c -функциями, удовлетворяющими условию антипериодичности

$$\psi(\mathbf{x}, \tau) = -\psi\left(\mathbf{x}, \tau + \frac{1}{T}\right), \quad \bar{\psi}(\mathbf{x}, \tau) = -\bar{\psi}\left(\mathbf{x}, \tau + \frac{1}{T}\right). \quad (4)$$

Разлагая экспоненту в (1) по константе связи g и используя формулу для гауссовых интегралов

$$\int \exp(-\bar{\psi}A\psi - \bar{J}\psi - \bar{\psi}J) D\psi D\bar{\psi} = \exp(\bar{J}A^{-1}J \pm \text{tr} \ln A), \quad (5)$$

где верхний знак относится к фермиевским полям, а нижний – к бозевским полям, мы придем к ряду теории возмущений, который ничем не отличается от соответствующего ряда термодинамической теории возмущений операторного представления квантовой статистической физики. Вместе с тем формализм функциональных интегралов оказывается более эффективным для выхода за рамки теории возмущений, а именно, введением двух полей – комплексного $\Delta(x)$ и действительного $U(x)$, формулу (1) можно переписать в виде

$$\exp\left(-\frac{\Omega(\mu, T)}{T}\right) = \int \exp\left(-\frac{\Omega[\Delta, \bar{\Delta}, U]}{T}\right) D\Delta D\bar{\Delta} DU \left(\int \exp\left(-\frac{V\bar{\Delta}\Delta}{g} - \frac{VU^2}{2g}\right) D\Delta D\bar{\Delta} DU \right)^{-1}, \quad (6)$$

$$\Omega[\Delta, \bar{\Delta}, U] = T \left(\frac{\bar{\Delta}\Delta}{g} + \frac{U^2}{2g} \right) + \tilde{\Omega}[\Delta, \bar{\Delta}, U], \quad (7)$$

$$\exp\left(-\frac{\tilde{\Omega}[\Delta, \bar{\Delta}, U]}{T}\right) = \int \exp\left(\begin{pmatrix} \bar{\psi}_\uparrow, \psi_\downarrow \\ \bar{\psi}_\downarrow, \psi_\uparrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\partial/\partial\tau - \varepsilon(\hat{p}) + \mu - U & -\Delta \\ -\bar{\Delta} & -\partial/\partial\tau + \varepsilon(\hat{p}) - \mu + U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} \right) D\psi D\bar{\psi}. \quad (8)$$

Тождественность (6) и (1) проверяется непосредственно интегрированием (6) по полям $\Delta, \bar{\Delta}, U$ с использованием (5) для комплексных полей бозевского типа и формулы

$$\int \exp\left(-\frac{1}{2}UAU - jU\right) DU = \exp\left(\frac{1}{2}jA^{-1}j - \frac{1}{2}\text{tr} \ln A\right) \quad (9)$$

для действительных полей.

Переход от (1) к (6) означает по существу переход к представлению, где

система описывается полями $\Delta, \bar{\Delta}, U$ с функционалом распределения

$$\rho[\Delta, \bar{\Delta}, U] = \exp\left(\frac{\Omega(\mu, T) - \Omega[\Delta, \bar{\Delta}, U]}{T}\right) \left(\int \exp\left(-\frac{V\bar{\Delta}\Delta}{g} - \frac{VU^2}{2g}\right) D\Delta D\bar{\Delta} DU \right)^{-1}. \quad (10)$$

Приближение самосогласованного поля возникает, когда в (6) ограничиваются конфигурациями, минимизирующими функционал $\Omega[\Delta, \bar{\Delta}, U]$. Вычисляя гауссовый интеграл (8) с помощью (5), мы сначала найдем функционал $\Omega[\Delta, \bar{\Delta}, U]$, а затем, после приравнивания нулю его вариационных производных по Δ и U уравнения Боголюбова [3], описывающие систему в приближении самосогласованного поля. За рамки приближения самосогласованного поля можно выйти, если учесть вклад конфигураций потенциалов $\Delta, \bar{\Delta}, U$, близких тем, которые минимизируют функционал $\Omega[\Delta, \bar{\Delta}, U]$. Таким образом находятся флуктуации термодинамических величин. Вообще формализм функциональных интегралов позволяет ввести в задачу новый тип приближений, а именно, в соответствии с характером задачи ограничивать класс конфигураций, по которому ведется интегрирование.

Выпишем выражение для $\Omega[\Delta, \bar{\Delta}, U]$ в случае однородной картины, т.е. когда в (6) основной вклад дают однородные конфигурации. Можно ожидать, что этот случай реализуется в отсутствие внешних полей вдали от критических точек. Особенности поведения системы вблизи критических точек потребуют отдельного рассмотрения. Имеем

$$\Omega[\Delta, \bar{\Delta}, U] = \frac{(\Delta^2 + U^2)V}{g} + \sum_p \left(\varepsilon(p) - \mu - U - 2T \ln \left(2 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{(\varepsilon(p) - \mu - U)^2 + \Delta^2}}{2T} \right) \right), \quad (11)$$

где V – объем системы. Условие стационарности дает следующие уравнения:

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{2V} \sum_p \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon(p) - \mu - U)^2 + \Delta^2}} \operatorname{th} \frac{\sqrt{(\varepsilon(p) - \mu - U)^2 + \Delta^2}}{2T}, \quad (12)$$

$$U = \frac{g}{2V} \sum_p \left(1 - \frac{(\varepsilon(p) - \mu - U)}{\sqrt{(\varepsilon(p) - \mu - U)^2 + \Delta^2}} \operatorname{th} \frac{\sqrt{(\varepsilon(p) - \mu - U)^2 + \Delta^2}}{2T} \right), \quad (13)$$

$$P(\mu, T) = \frac{\Delta^2 + U^2}{g} + \frac{1}{V} \sum_p \left(\varepsilon(p) - \mu - U - 2T \ln \left(2 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{(\varepsilon(p) - \mu - U)^2 + \Delta^2}}{2T} \right) \right). \quad (14)$$

Первое уравнение – это хорошо известное уравнение на определение потенциала спаривания сверхтекучей ферми-жидкости. Для He3 область температур, когда это уравнение имеет ненулевое решение, $\sim 10^{-3}$ К. Нас же будет интересовать переход системы из газообразного в жидкое состояние, который происходит в области температур на три порядка выше. Другими словами, при оценке (6) мы можем исключить конфигурации с $\Delta \neq 0$, а в соотношениях (17-18) положить Δ равным

нулю. С учетом сказанного перепишем необходимые для дальнейшего анализа формулы, переходя к безразмерным величинам. Для интеграла (6) имеем следующее представление:

$$\exp\left(\frac{P(\mu, T)V}{T}\right) = \int \exp\left(\frac{NF[u, m, \Theta]}{\Theta}\right) du \left(\int \exp\left(-\frac{Nu^2}{2\Theta}\right) du \right)^{-1}, \quad (15)$$

где

$$F[u, m, \Theta] = -\frac{u^2}{2} + \Theta \int 3 \ln \left(1 + \exp\left(\frac{u + m - \lambda s^2}{\Theta}\right) \right) s^2 ds. \quad (16)$$

Стационарная точка определяется из уравнения

$$u = \int 3 \left(1 + \exp\left(\frac{\lambda s^2 - u - m}{\Theta}\right) \right)^{-1} s^2 ds, \quad (17)$$

а вторая производная, очевидно, определяет дисперсию

$$K[u, m, \Theta] = -1 + \frac{1}{\Theta} \int 3 \left[\left(1 + \exp\left(\frac{u + m - \lambda s^2}{\Theta}\right) \right) \left(1 + \exp\left(\frac{-u - m + \lambda s^2}{\Theta}\right) \right) \right]^{-1} s^2 ds. \quad (18)$$

Здесь введены следующие величины: $u = U/T_0$, $m = \mu/T_0$, $\Theta = T/T_0$, $\lambda = p_0^2/2MT_0$, а $T_0 = gp_0^3/6\pi^2$, где p_0 – фермиевский импульс, а N – число атомов в системе, т. е. число порядка числа Авогадро.

Итак, обозначая стационарное значение u через $n(t, \Theta)$, получим заданное в параметрической форме уравнение состояния, т.е. уравнение, связывающее давление $p(t, \Theta) \equiv F(n, m, \Theta)$, плотность $n(t, \Theta)$ и температуру системы в равновесном состоянии. В качестве параметра используется величина $t = n + m$. По существу формулы (21–23) дают решение задачи, как говорят, в квадратурах. В сверхтекучей фазе разложением по температуре вблизи абсолютного нуля или по потенциалу спаривания Δ вблизи температуры перехода в сверхтекучее состояние решение можно довести до аналитической формы, т.е. выразить его через элементарные функции. В интересующей же нас области температур нам придется ограничиться численным интегрированием, поскольку мы фактически не имеем малого параметра, по которому можно было бы провести разложение. Разумеется, такой параметр есть вблизи критической температуры, а именно, разность между плотностями жидкой и газовой фаз. Однако этот параметр непосредственно в уравнения не входит и без численных расчетов в этой области тоже не обойтись, хотя бы для нахождения характеристик системы в критической точке. Не следует забывать, что в критической области роль неоднородных конфигураций становится решающей и однородная картина, которой мы ограничились в настоящей работе, может оказаться лишенной смысла.

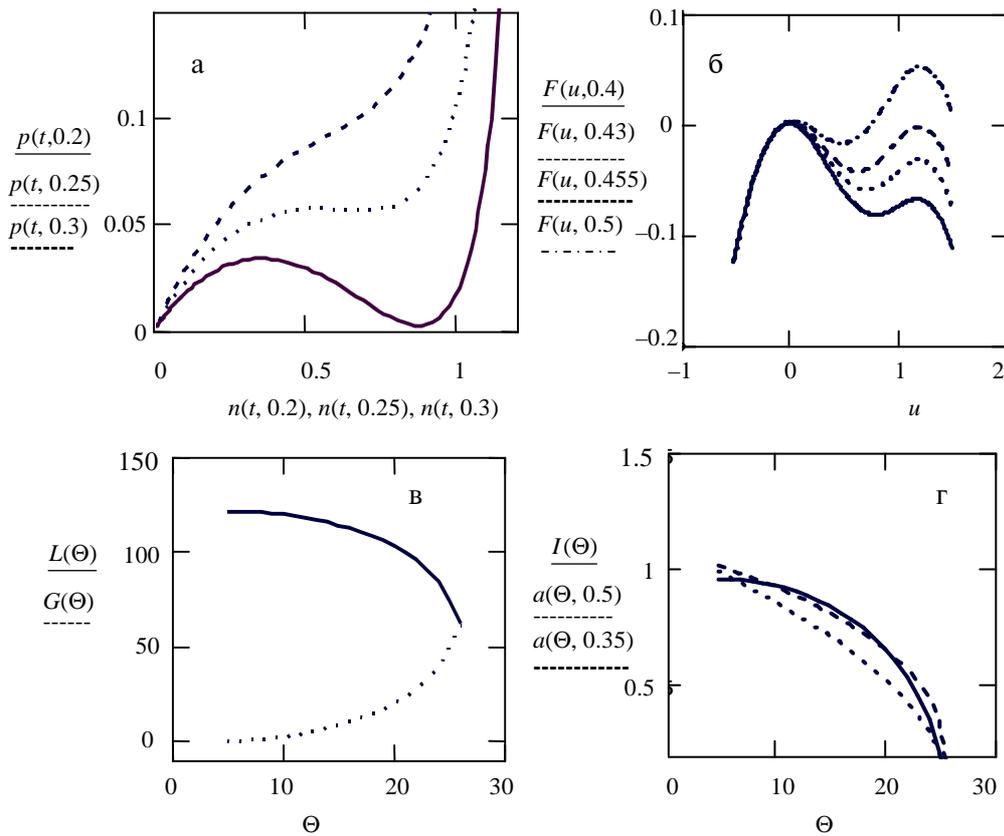


Рис.1.

На рис.1а представлен результат численного интегрирования для уравнения состояния. Очевидно, что мы имеем характерную ван-дер-ваальсовскую петлю, с помощью которой описывается как переход из газообразного состояния в жидкое состояние, так и существование метастабильных состояний. При стандартном рассмотрении область с отрицательным наклоном выбрасывается из термодинамических соображений (давление не может расти с уменьшением плотности), а остальное интерпретируется на основе правила Максвелла. Для того, чтобы понять, что стоит за этой интерпретацией петли, рассмотрим поведение функции $F[u, m, \Theta]$ при различных значениях m . Ее графическое представление изображено на рис.1б. Из этого рисунка видно, что при малых m $F[u, m, \Theta]$ имеет лишь один максимум, а именно, при малых значениях плотности, что соответствует устойчивой газовой фазе. С ростом m возникает второй максимум, соответствующий метастабильной жидкой фазе. Когда оба максимума сравниваются, мы имеем состояние, когда обе фазы одинаково стабильны. С дальнейшим увеличением m газовая фаза, в отличие от жидкой, становится метастабильной. И, наконец, когда $F[u, m, \Theta]$ остается только с одним максимумом уже при большой плотности, мы имеем однородное жидкое состояние. Кривая сосуществования, получаемая при

вычислении значений плотности, соответствующих одинаковым m при разных значениях температуры, представлена на рис.1в. На рис.1г представлена как зависимость от температуры разности плотностей жидкой и газообразной фаз $\delta n = n_l - n_g$, следующая из нашей теории, так и интерполяционная, обозначенная через $d(\Theta, \alpha) = (\Theta_c - \Theta)^\alpha$, где Θ_c – критическая температура. Рассмотрены случаи $\alpha = 1/2$ (теория ван-дер-Ваальса) и $\alpha = 1/3$, более соответствующие экспериментальным данным. Наконец, попробуем выяснить, нет ли величины, с помощью которой можно определить стабильность фазы, исходя из ее значения в стационарной точке. Ранее мы определяли стабильность состояния по виду функции $F[u, m, \Theta]$. Поскольку в основе наших вычислений лежит метод перевала, т.е. мы разлагаем $F[u, m, \Theta]$ вблизи точек минимума с точностью до второго порядка по $u - n$ включительно, то ясно, что для одновременного сосуществования двух фаз необходимо равенство и вторых производных в точке максимума $F[u, m, \Theta]$. Эта производная определяет дисперсию состояния. На рис.2 приведен ход зависимости, определяемой формулой (18), – дисперсии жидкой и газообразной фаз на кривой сосуществования.

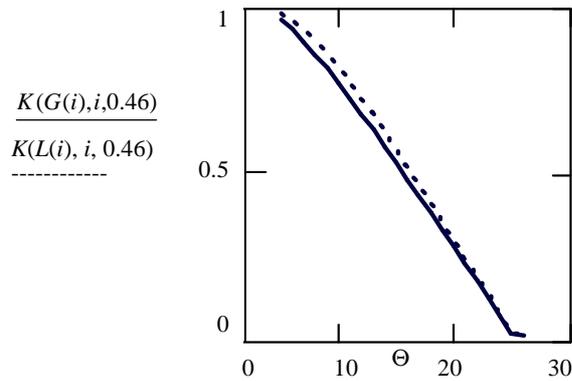


Рис.2.

Итак, сформулируем вкратце полученные результаты. Нами показано, что в рамках модели, используемой при описании явления сверхтекучести в He3, т.е. модели Бардина, Купера и Шриффера, можно описать и переход системы из жидкого в газообразное состояние. Получено простое объяснение таких особенностей этого перехода, как существование метастабильных состояний и возможность стабильного сосуществования одновременно двух фаз. Показано, что метастабильные состояния отличаются от стабильных большей дисперсией и, лишь когда дисперсии двух фаз сравниваются, возможно их сосуществование. Можно предположить, что эта тенденция носит общий характер и может быть прослежена в нелинейных задачах квантовой оптики. Однако подробное рассмотрение этого вопроса будет проведено позже.

ЛИТЕРАТУРА

1. **A.J.Leggett.** Rev. Mod. Phys., **76**, 3 (2004).
2. **В.Н.Попов.** Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М., Атомиздат, 1976.
3. **П.Де Жен.** Сверхпроводимость металлов и сплавов М., Мир, 1968.

ՖԱԶԱՅԻՆ ԱՆՑՈՒՄՆԵՐԸ ՓՈԽԱԶԴՈՂ ՖԵՐՄԻ ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳՈՒՄ

Թ.Կ. ՄԵԼԻԿ-ԲԱՐԽՈՒԴԱՐՈՎ

Ցույց է տրված, որ անցումները Ֆերմի հեղուկում նորմալ վիճակից դեպի գերհոսող, ինչպես նաև հեղուկից դեպի գազ, կարող են նկարագրվել մեկ մոդելի շրջանակներում: Մանրամասն հետազոտված է գազի և հեղուկի գոյակցության տիրույթը:

PHASE TRANSITIONS IN A SYSTEM OF INTERACTING FERMI PARTICLES

T.K. MELIK-BARKHUDAROV

It is shown that phase transitions in a Fermi liquid both from the normal state to the superfluid and to the gas states can be described in the framework of the same model. The range of coexistence of the gas and liquid states is studied in detail.