

УДК 537.8

КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ТОРОИДАЛЬНОМ РЕЗОНАТОРЕ

Э.Д. ГАЗАЗЯН¹, Т.А. АРУТЮНЯН²

¹Ереванский физический институт

²Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 20 сентября 2005 г.)

Рассмотрена проблема собственных функций в тороидальном резонаторе и показано, что в нем существуют волны типа E и H . Получены аналитические выражения для компонент обоих типов, которые сравниваются с выражениями, полученными равномерным коротковолновым асимптотическим методом, и показано, что в таком приближении результаты совпадают друг с другом. Показана также ортогональность собственных функций.

1. Введение

Работа посвящена классификации электромагнитных волн в тороидальном резонаторе. Задача рассмотрена в тороидальной системе координат (τ, σ, φ) [1], где переменные разделяются только в уравнении Лапласа, и уже в уравнении Гельмгольца возможно лишь частичное их разделение путем внесения в тороид неоднородной среды с тороидальной симметрией определенного вида [2]. В настоящей работе кратко описывается система координат (τ, σ, φ) , затем в самом общем виде показывается, что в тороидальном резонаторе электромагнитное поле можно разделить на поля E - и H -типов, т.е. все компоненты поля будут выражаться через продольную компоненту электрического или магнитного полей. При этом решение задачи для обоих типов удается довести до конца. Показано также, что в случае больших торков результаты, полученные с помощью равномерного коротковолнового асимптотического метода [3], сводятся к приближенным (асимптотическим) результатам, полученным в [2]. Заметим также, что ранее нами рассматривалась аналогичная задача и была строго доказана возможность существования волн E - и H -типов в тороиде в случае квазисферической системы координат [4].

2. Тороидальная система координат

Тороидальные координаты (τ, σ, φ) связаны с декартовыми координатами следующими соотношениями [1]:

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \tau}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma} \cos \varphi, \quad y = \frac{a \operatorname{sh} \tau}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma} \sin \varphi, \quad z = \frac{a \sin \sigma}{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma}, \quad (1)$$

где $0 \leq \tau < +\infty$, $-\pi \leq \sigma \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Параметр a описывает тороидальную систему и связан с “большим” $R = a \operatorname{cth} \tau$ и “малым” $r_0 = a/\operatorname{sh} \tau$ радиусами тороида соотношением $a = \sqrt{R^2 - r_0^2}$.

В тороидальной системе коэффициенты Ламэ имеют вид

$$h_\tau = h_\sigma = \frac{a}{h}, \quad h_\varphi = \frac{a \operatorname{sh} \tau}{h}, \quad (2)$$

где введено обозначение

$$h = h(\tau, \sigma) = \operatorname{ch} \tau - \cos \sigma. \quad (3)$$

3. Классификация волн в тороидальном резонаторе

Воспользовавшись симметрией задачи относительно φ , будем искать электромагнитное поле в виде

$$\mathbf{E}(\tau, \sigma, \varphi, t) = \mathbf{E}(\tau, \sigma) \exp(-i(m\varphi + \omega t)), \quad \mathbf{H}(\tau, \sigma, \varphi, t) = \mathbf{H}(\tau, \sigma) \exp(-i(m\varphi + \omega t)), \quad (4)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$.

Первая пара уравнений Максвелла в отсутствие токов

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \mathbf{H})_\tau &= -ik\varepsilon E_\tau, & (\operatorname{rot} \mathbf{E})_\tau &= ikH_\tau, \\ (\operatorname{rot} \mathbf{H})_\sigma &= -ik\varepsilon E_\sigma, & (\operatorname{rot} \mathbf{E})_\sigma &= ikH_\sigma, \end{aligned} \quad (5)$$

в тороидальной системе координат примет следующий вид:

$$\frac{h^2}{a^2 \operatorname{sh} \tau} \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{a \operatorname{sh} \tau}{h} H_\varphi \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{a}{h} H_\sigma \right) \right\} = -ik\varepsilon E_\tau, \quad (6a)$$

$$\frac{h^2}{a^2 \operatorname{sh} \tau} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{a}{h} H_\tau \right) - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{a \operatorname{sh} \tau}{h} H_\varphi \right) \right\} = -ik\varepsilon E_\sigma, \quad (6б)$$

$$\frac{h^2}{a^2 \operatorname{sh} \tau} \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{a \operatorname{sh} \tau}{h} E_\varphi \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{a}{h} E_\sigma \right) \right\} = ikH_\tau, \quad (6в)$$

$$\frac{h^2}{a^2 \operatorname{sh} \tau} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{a}{h} E_\tau \right) - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{a \operatorname{sh} \tau}{h} E_\varphi \right) \right\} = ikH_\sigma. \quad (6г)$$

Предположим, что $H_\varphi = 0$ (волны E -типа в тороиде). Тогда из (4) следует, что

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \varphi} = -im\mathbf{E}, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \varphi} = -im\mathbf{H}, \quad (7)$$

и, воспользовавшись уравнениями (6а-6б), получим:

$$H_\sigma = -\frac{\varepsilon ka \operatorname{sh} \tau}{mh} E_\tau, \quad H_\tau = \frac{\varepsilon ka \operatorname{sh} \tau}{mh} E_\sigma. \quad (8)$$

Подстановкой (8) в (6в) и (6г) поперечные компоненты электрического поля E_τ и E_σ выражаются через продольную компоненту E_φ :

$$E_\tau = -\frac{imh^3}{\varepsilon(ka)^2 \operatorname{sh}^2 \tau - (mh)^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\operatorname{sh} \tau}{h} E_\varphi \right), \quad (9)$$

$$E_\sigma = -\frac{imh^3}{\varepsilon(ka)^2 \operatorname{sh}^2 \tau - (mh)^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\operatorname{sh} \tau}{h} E_\varphi \right). \quad (10)$$

С помощью последних соотношений и (8), поперечные компоненты магнитного поля H_τ и H_σ также выражаются через E_φ . Чтобы определить, какому уравнению удовлетворяет E_φ , воспользуемся уравнением Максвелла:

$$\operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = 0. \quad (11)$$

В этом уравнении разделение переменных по τ и σ не является возможным. Однако, если выбрать заполнение тороида в виде [2]

$$\varepsilon = \varepsilon(\tau, \sigma) = h^2 / \operatorname{sh}^2 \tau \quad (\mu = 1), \quad (12)$$

то уравнение (11) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} \tau} E_\tau \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} \tau} E_\sigma \right) + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \tau} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \tau} = 0. \quad (11a)$$

Подставляя (9) и (10) в (11a) и учитывая (12), имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^2 \tau \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial \tau^2} + \frac{\operatorname{sh}^2 \tau}{h^2} \left(h^2 \operatorname{cth} \tau - h \operatorname{sh} \tau \right) \frac{\partial E_\varphi}{\partial \tau} + \operatorname{sh}^2 \tau \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial \sigma^2} - \\ - \operatorname{sh}^2 \tau \frac{\sin \sigma}{h} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \sigma} + \left[(ka)^2 - (m^2 + 1) \right] E_\varphi = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

В этом уравнении переменные можно частично разделить, если искать решение E_φ в виде

$$E_\varphi(\tau, \sigma, \varphi) = \sin \frac{\sigma}{2} \sqrt{\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma} f_E(\tau) f_2(\sigma) \exp(-im\varphi). \quad (14)$$

Тогда для $f_2(\sigma)$ получим ультрасферические многочлены Гегенбауэра – $f_2(\sigma) = C_{2p-1}^1(\cos \sigma / 2) = \sin p\sigma / \sin(\sigma / 2)$ [5], а $f_E(\tau)$ – функция, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d^2 f_E(\tau)}{d\tau^2} + \operatorname{cth} \tau \frac{df_E(\tau)}{d\tau} + \left(\frac{1}{4} - p^2 - \frac{m^2 + 1 - (ka)^2}{\operatorname{sh}^2 \tau} \right) f_E(\tau) = 0. \quad (15)$$

Уравнение для $f_E(\tau)$ при $ka = 0$ переходит в уравнение для функции тора [5]. В этом смысле функция $f_E(\tau)$ суть некоторое обобщение функции тора. Воспользовавшись явным видом функции $f_2(\sigma)$, запишем окончательное выражение для E_φ в виде

$$E_\varphi(\tau, \sigma, \varphi) = A(\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma)^{1/2} f_E(\tau) \sin(p\sigma) \exp(-im\varphi). \quad (16)$$

Окончательно для волн E -типа имеем

$$\begin{aligned} E_\tau &= -\frac{imh}{(ka)^2 - m^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\operatorname{sh} \tau}{h} E_\varphi \right), \\ E_\sigma &= -\frac{imh}{(ka)^2 - m^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\operatorname{sh} \tau}{h} E_\varphi \right), \\ E_\varphi &= A(\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma)^{1/2} f_E(\tau) \sin(p\sigma) \exp(-im\varphi), \\ H_\tau &= -\frac{i\varepsilon ka \operatorname{sh} \tau}{(ka)^2 - m^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\operatorname{sh} \tau}{h} E_\varphi \right), \\ H_\sigma &= \frac{i\varepsilon ka \operatorname{sh} \tau}{(ka)^2 - m^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\operatorname{sh} \tau}{h} E_\varphi \right), \\ H_\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

с граничным условием

$$f_E(\tau) \Big|_{\tau=\tau_1} = 0. \quad (18)$$

Для H -типов волн компоненты поля $H_\varphi(\tau, \sigma)$ удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^2 \tau \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial \tau^2} + \frac{3 \operatorname{sh}^2 \tau}{h^2} \left(h^2 \operatorname{cth} \tau - h \operatorname{sh} \tau \right) \frac{\partial H_\varphi}{\partial \tau} + \operatorname{sh}^2 \tau \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial \sigma^2} - \\ - 3 \operatorname{sh}^2 \tau \frac{\sin \sigma}{h} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \sigma} + \left[(ka)^2 - (m^2 - 1) \right] H_\varphi = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

в котором переменные по τ и σ могут быть частично разделены, если теперь искать решение в виде

$$H_\varphi(\tau, \sigma, \varphi) = B(\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma)^{3/2} f_H(\tau) \sin(p\sigma) \exp(-im\varphi), \quad (20)$$

где функция $f_H(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 f_H(\tau)}{d\tau^2} + 3 \operatorname{cth} \tau \frac{df_H(\tau)}{d\tau} + \left(\frac{9}{4} - p^2 - \frac{m^2 + 1 - (ka)^2}{\operatorname{sh}^2 \tau} \right) f_H(\tau) = 0 \quad (21)$$

и граничному условию

$$\frac{\partial f_H(\tau)}{\partial \tau} = 0 \quad \text{при} \quad \tau = \tau_1. \quad (22)$$

Соотношения для волн H -типа имеют вид

$$\begin{aligned} E_\tau &= \frac{ika \operatorname{sh} \tau}{(ka)^2 - m^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\operatorname{sh} \tau}{h} H_\varphi \right), \\ E_\sigma &= -\frac{ika \operatorname{sh} \tau}{(ka)^2 - m^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\operatorname{sh} \tau}{h} H_\varphi \right), \\ E_\varphi &= 0, \\ H_\tau &= -\frac{imh}{(ka)^2 - m^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\operatorname{sh} \tau}{h} H_\varphi \right), \\ H_\sigma &= -\frac{imh}{(ka)^2 - m^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\operatorname{sh} \tau}{h} H_\varphi \right), \\ H_\varphi(\tau, \sigma, \varphi) &= B(\operatorname{ch} \tau - \cos \sigma)^{3/2} f_H(\tau) \sin(p\sigma) \exp(-im\varphi). \end{aligned} \quad (23)$$

4. Равномерный коротковолновый асимптотический метод и сравнение результатов

В [2] в приближении больших торов ($\operatorname{ch} \tau \gg 1$), используя равномерный коротковолновый асимптотический метод, изложенный в [3], получены следующие выражения для волн E -типа:

$$\begin{aligned} E_\tau &= C(\operatorname{ch} \tau)^{3/2} \sin \frac{\sigma}{2} \frac{df_1(\tau)}{d\tau} f_2(\sigma) f_3(\varphi), \\ E_\sigma &= C(\operatorname{ch} \tau)^{3/2} \sin \frac{\sigma}{2} f_1(\tau) \frac{df_2(\sigma)}{d\sigma} f_3(\varphi), \\ E_\varphi &= C \left(1 - \frac{m^2}{(ka)^2} \right)^{1/2} \sin \frac{\sigma}{2} (\operatorname{ch} \tau)^{1/2} f_1(\tau) f_2(\sigma) f_3(\varphi), \\ H_\tau &= C(\operatorname{ch} \tau)^{3/2} \sin \frac{\sigma}{2} f_1(\tau) \frac{df_2(\sigma)}{d\sigma} f_3(\varphi), \\ H_\sigma &= C(\operatorname{ch} \tau)^{3/2} \sin \frac{\sigma}{2} \frac{df_1(\tau)}{d\tau} f_2(\sigma) f_3(\varphi), \\ H_\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

где $f_2(\sigma) = \sin p\sigma$, $f_3(\varphi) = \exp(-im\varphi)$, а $f_1(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 f_1(\tau)}{d\tau^2} + \operatorname{cth} \tau \frac{df_1(\tau)}{d\tau} + \left(\frac{1}{4} - p^2 - \frac{m^2 - (ka)^2}{\operatorname{sh}^2 \tau} \right) f_1(\tau) = 0. \quad (25)$$

Покажем, что полученные нами точные выражения (17) в случае больших торов, используя равномерный коротковолновый асимптотический вид собственных функций, также приводятся к виду (24). Действительно, известно [3], что собственная функция, удовлетворяющая уравнениям типа (15) или (25), и ее производная имеют следующий асимптотический вид:

$$f_1(\tau) = \left[\sqrt{\beta(\tau)} \operatorname{sh} \tau \right]^{-1/2} c \cos \left(k \int_{\tilde{\tau}}^{\tau} \sqrt{\beta(\tau)} d\tau - \frac{\pi}{4} \right), \quad (26)$$

$$\frac{df_1(\tau)}{d\tau} = -k \left[\sqrt{\beta(\tau)} \operatorname{sh} \tau \right]^{-1/2} c \sin \left(k \int_{\tilde{\tau}}^{\tau} \sqrt{\beta(\tau)} d\tau - \frac{\pi}{4} \right), \quad (27)$$

где $\beta(\tau)$ – гладкая функция. Для функции $f_1(\tau)$ или $f_E(\tau)$

$$\beta(\tau) = \frac{1}{k^2} \left(p^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{\operatorname{sh}^2 \tilde{\tau} - \operatorname{sh}^2 \tau}{\operatorname{sh}^2 \tau}, \quad (28)$$

где $\tilde{\tau}$ – координаты каустической поверхности. Обозначим $k \int_{\tilde{\tau}}^{\tau} \sqrt{\beta(\tau)} d\tau = g(\tau)$.

Тогда получим

$$f_1(\tau) = C (\operatorname{sh}^2 \tilde{\tau} - \operatorname{sh}^2 \tau)^{-1/4} \cos \left[g(\tau) - \frac{\pi}{4} \right]; \quad \frac{df_1(\tau)}{d\tau} = C k (\operatorname{sh}^2 \tilde{\tau} - \operatorname{sh}^2 \tau)^{-1/4} \sin \left[g(\tau) - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (29)$$

Подставим (29) сначала в (24), затем в (17). Для E_τ из (24) получим выражение

$$E_\tau = A (\operatorname{ch} \tau)^{3/2} \sin \frac{\sigma}{2} k (\operatorname{sh}^2 \tilde{\tau} - \operatorname{sh}^2 \tau)^{-1/4} \sin \left[g(\tau) - \frac{\pi}{4} \right] f_2(\sigma) f_3(\varphi), \quad (30)$$

а из (17) следует

$$E_\tau = \operatorname{const} \cdot (\operatorname{ch} \tau)^{3/2} \sin \frac{\sigma}{2} (\operatorname{sh}^2 \tilde{\tau} - \operatorname{sh}^2 \tau)^{-1/4} \times \\ \times \left\{ k \sin \left[g(\tau) - \frac{\pi}{4} \right] + \frac{1}{2} \cos \left[g(\tau) - \frac{\pi}{4} \right] \right\} f_2(\sigma) f_3(\varphi). \quad (31)$$

В нашем приближении $ka \gg 1$. Вторым слагаемым в (31) можно пренебречь, и (30) и (31) совпадут друг с другом. Теперь сравним компоненты E_σ . Из (17) сразу следует, что

$$E_\sigma = \operatorname{const} \cdot (\operatorname{ch} \tau)^{3/2} p \cos(p\sigma) f_E(\tau) f_3(\varphi). \quad (32)$$

Чтобы сравнить (30) с (24), вспомним, что функция $f_2(\sigma)$ удовлетворяет уравнению вида [2]

$$\frac{d^2 f_2(\sigma)}{d\sigma^2} + \alpha(\sigma) \frac{df_2(\sigma)}{d\sigma} + k^2 \beta(\sigma) f_2(\sigma) = 0, \quad (33)$$

где $\beta(\sigma) = a^2(4p^2 - 1)/4(ka)^2$. Так как в приближении равномерной коротковолновой

асимптотики $ka \gg 1$, то для конечности $\beta(\sigma)$ необходимо, чтобы $p \gg 1$. Тогда из (24) следует,

$$\begin{aligned} E_\sigma &= \text{const} \cdot (\text{ch } \tau)^{3/2} \left[p \cos p\sigma - \frac{1}{2} \sin p\sigma \text{ctg } \frac{\sigma}{2} \right] f_1(\tau) f_3(\varphi) \approx \\ &\approx \text{const} \cdot (\text{ch } \tau)^{3/2} p \cos(p\sigma) f_1(\tau) f_3(\varphi), \end{aligned} \quad (34)$$

что совпадает с (32).

5. Ортогональность собственных функций

В заключение покажем, что собственные функции (16) ортогональны с весом ε , где ε имеет вид (12). Действительно,

$$\begin{aligned} &\int_V \varepsilon E_\phi^{pm}(\tau, \sigma, \varphi) \cdot E_\phi^{*p'm'}(\tau, \sigma, \varphi) dV = \\ &= |A|^2 a^3 \int_{-\infty}^{\tau_1} \frac{1}{\text{sh } \tau} f_E^{pm}(\tau) f_E^{*p'm'}(\tau) d\tau \int_{-\pi}^{\pi} \sin(p\sigma) \sin(p'\sigma) d\sigma \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} e^{-im'\varphi} d\varphi = \delta_{pp'} \delta_{mm'}. \end{aligned} \quad (35)$$

Постоянная A определяется из условия нормировки:

$$|A|^2 = \frac{1}{2\pi^2 a^3 \int_{-\infty}^{\tau_1} \frac{1}{\text{sh } \tau} [f_E^{pm}(\tau)]^2 d\tau}. \quad (36)$$

Для волн H -типа функции оказываются ортогональными:

$$\begin{aligned} &\int_V H_\phi^{pm}(\tau, \sigma, \varphi) \cdot H_\phi^{*p'm'}(\tau, \sigma, \varphi) dV = |B|^2 a^3 \int_{-\infty}^{\tau_1} f_H^{pm}(\tau) f_H^{*p'm'}(\tau) d\tau \times \\ &\times \int_{-\pi}^{\pi} \sin(p\sigma) \sin(p'\sigma) d\sigma \int_0^{2\pi} \exp(-im\varphi) \exp(-im'\varphi) d\varphi = \delta_{pp'} \delta_{mm'}, \end{aligned} \quad (37)$$

и постоянная B определяется из условия нормировки:

$$|B|^2 = \frac{1}{2\pi^2 a^3 \int_{-\infty}^{\tau_1} [f_H^{pm}(\tau)]^2 d\tau}. \quad (38)$$

В заключение считаем своим приятным долгом выразить благодарность д.ф.м.н. М.И.Иваняну за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике. М., Наука, 1968.
2. Э.Д. Газазян, М.И. Иванян, А.Д. Тер-Погосян. Изв. НАН Армении, Физика, **29**, 141 (1994).
3. Э.Д. Газазян. Равномерная коротковолновая асимптотика скалярных и электромагнитных полей на основе одномерных эталонных функций. Препринт ЕФИ-1092(55)-88, Ереван, 1988.
4. Т.А. Арутюнян, Д.К. Калантарян. Изв. НАН Армении, Физика, **40**, 244 (2005).
5. Справочник по специальным функциям (под ред. М. Абрамовица и И. Стиган). М., Наука, 1979.

ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՏԱԿԱՆ ՏՍՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԴԱՍԱԿԱՐԳՈՒՄԸ ՏՈՐՈԻԴԱՅԻՆ ՌԵԶՈՆԱՏՈՐՆԵՐՈՒՄ

Է.Դ. ԳԱԶԱԶՅԱՆ, Տ.Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Դիտարկված է սեփական ֆունկցիաների խնդիրը տորոիդային ռեզոնատորում: Ապացուցված է, որ տորոիդային ռեզոնատորում գոյություն ունեն E - և H -տիպի ալիքներ: Երկու տիպերի բաղադրիչների համար ստացված են ճշգրիտ արտահայտություններ: Ստացված արդյունքները համեմատված են հավասարաչափ կարճալիքային մոտարկային եղանակով ստացված արտահայտությունների հետ, և ցույց է տրված, որ այդ մոտավորությամբ ստացված արդյունքները համընկնում են:

CLASSIFICATION OF ELECTROMAGNETIC OSCILLATIONS IN A TOROIDAL CAVITY

E.D. GAZAZYAN, T.A. HARUTYUNYAN

We consider the problem of own functions in a toroidal cavity. It is proved that E - and H -types of waves exist in a toroidal cavity. Analytical expressions for the components of two types of waves are obtained. These expressions are compared with the expressions obtained by the uniform short-wave asymptotic method and it is shown that the results are in good agreement. The orthogonality of own functions in a toroidal cavity is shown as well.