Известия НАН Армении, Физика, т.40, №4, с.244-247 (2005)

УДК 537.8

# ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ТОРОИДАЛЬНОМ РЕЗОНАТОРЕ

Т.А. АРУТЮНЯН[1], Д.К. КАЛАНТАРЯН[1,2]

[1]Ереванский государственный университет

[2]Центр синхротронного излучения CANDLE

(Поступила в редакцию 3 февраля 2004 г.)

Рассмотрена проблема собственных колебаний в тороидальном резонаторе в системе координат, связанной с траекторией частицы. Показано, что в такой системе в волновом уравнении одна переменная сразу разделяется, а для других переменных получается дифференциальное уравнение 2-го порядка, которое надо решать численными методами. Показано также, что в тороидальных резонаторах существуют волны *E*- и *H*-типов.

## 1. Введение

Тороидальные резонаторы представляют интерес как в ускорительной физике и физике заряженных частиц, так и в термоядерных реакторах, так называемых токамаках. Но тор – сложный геометрический объект, и в нем очень сложно определить поля, зависящие от источников возбуждения. Для определения этих полей необходимо найти собственные функции тороида. Сложность состоит в выборе подходящей системы координат. В [1] задача решена в тороидальной системе координат, где уравнение Гельмгольца не допускает разделения переменных. Там разделение переменных достигается искусственным путем – внесением в тороид неоднородной среды. Далее собственные электромагнитные поля определяются из решений уравнения Гельмгольца применением метода равномерной коротковолновой асимптотики [2]. В настоящей работе задача рассматривается в координатной системе, связанной с траекторией частицы.

## 2. Коэффициенты Ламэ в "квазитороидальной" системе координат

Для нахождения собственных колебаний в тороидальном резонаторе воспользуемся "квазитороидальной" системой координат. В этой системе одну ось ($s$) в каждой точке траектории частицы возьмем вдоль касательной к этой точке. Другие две координаты выберем в перпендикулярной к траектории плоскости, или как декартовые координаты ($x$,$y$), или как полярные координаты ($r$, $\varphi$). Самый удобный подход для нахождения коэффицентов Ламэ в этой системе – это определение элемента длины [3]. Из рис.1 видно, что квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками $P(x, y, s)$ и $Q(x+dx, y+dy, s+ds)$ равен $dL^2 = dx^2 + dy^2 + dl^2$. Так как $ds = R\,d\alpha$ и $dl = \left(R + x\right) d\alpha$ (где $R$ – радиус кривизны), то $dl = (1+\rho x)ds$, где величина $\rho = 1/R$ – кривизна. Таким образом, $dL^2 = dx^2 + dy^2 + (1+\rho x)^2\, ds^2$, и в системе $(x, y, s)$ будем иметь для коэффициентов Ламэ:

$$h_x = h_y = 1\,, \quad h_s = 1 + \rho x h\,. \tag{1}$$

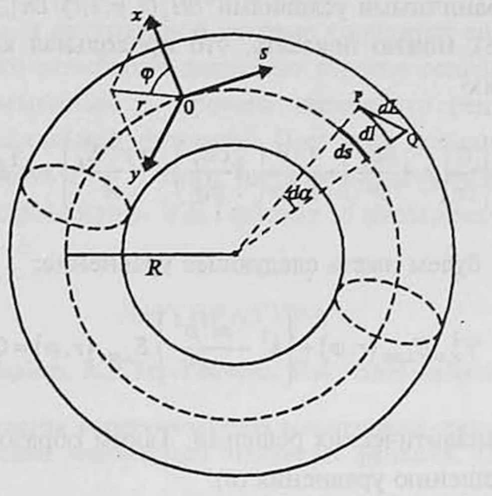


Рис.1. “Квазитороидальная” система координат.

Так как $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, то в системе $(r, \varphi, s)$ будем иметь $dL^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + (1+\rho\, r\cos\varphi)^2\, ds^2$ и, следовательно,

$$h_r = 1, \quad h_\varphi = r\,, \quad h_s = 1 + \rho\, r\cos\varphi\,. \tag{2}$$

## 3. Собственные электромагнитные поля в тороидальном резонаторе

В тороидальном резонаторе с круглым поперечным сечением решение уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{3}$$

в системе координат $(r, \varphi, s)$ ищем в виде

$$\mathbf{E},\mathbf{H}(r,\varphi,s,t) = \mathbf{E},\mathbf{H}(r,\varphi),\;\; \mathbf{H}(r,\varphi)(e^{i\gamma s} + e^{-i\gamma s})e^{-i\omega t} \qquad (\gamma = m\rho;\; m = 0,1,2,\ldots). \tag{4}$$

Так как $\partial\mathbf{E},\mathbf{H}/\partial t = i\omega\,\mathbf{E},\mathbf{H}$; $\partial\mathbf{E},\mathbf{H}/\partial s = -\gamma\,\operatorname{tg}\gamma s\,\mathbf{E},\mathbf{H}$, то выражая в уравнении (3) все компоненты полей по $E_s$, для $E$-типов волн ($E_s \neq 0$, $H_s = 0$) имеем следующие соотношения:

$$E_r = -\frac{\gamma}{\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \gamma s + k^2 A^2} \frac{\partial}{\partial r}[AE_s], \qquad H_r = -\frac{ikA}{\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \gamma s + k^2 A^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}[AE_s],$$

$$E_\varphi = -\frac{\gamma}{\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \gamma s + k^2 A^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}[AE_s], \quad H_\varphi = -\frac{ikA}{\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \gamma s + k^2 A^2} \frac{\partial}{\partial r}[AE_s], \tag{5}$$

$$E_s = E_{\perp ms}(r,\varphi)\left(e^{i\gamma s} + e^{-i\gamma s}\right)e^{-i\omega t}, \qquad H_s = 0,$$

с граничными условиями $E_s(r,\varphi,s,t)\big|_{r=a} = 0$, где $A = 1 + \rho r \cos\varphi$, а $a$ – малый радиус тора. Подобным образом получим соотношения для волн $H$-типа $(E_s = 0,\ H_s \neq 0)$ с граничными условиями $\partial H_s(r,\varphi,s,t)/\partial n\,|_{r=a} = 0$.

Учитывая (5), можно показать, что продольная компонента $E_s$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{rA}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(rA\frac{\partial E_s}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(A\frac{\partial E_s}{\partial \varphi}\right) - \frac{r\gamma^2 E_s}{A}\right\} + k^2 E_s = 0,$$

откуда для $E_\perp(r,\varphi)$ будем иметь следующее уравнение:

$$\nabla^2_{r,\varphi} E_{\perp ms}(r,\varphi) + \left\{k^2 - \frac{m^2\rho^2}{A^2}\right\} E_{\perp ms}(r,\varphi) = 0, \tag{6}$$

которое не имеет аналитических решений. Таким образом, проблема сводится к численному решению уравнения (6).

В заключение рассмотрим тороидальный резонатор с прямоугольным поперечным сечением. Воспользуемся системой $(x,y,s)$, где волновое уравнение для компоненты $E_s$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 E_s}{\partial x^2} + \frac{\rho}{A}\frac{\partial E_s}{\partial x} + \frac{\partial^2 E_s}{\partial y^2} + \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 E_s}{\partial s^2} + k^2 E_s = 0. \tag{7}$$

В (7) переменные разделяются:

$$E_s(x,y,s) = X(x)Y(y)Z(s), \tag{8}$$

где

$$X(x) = C_1 J_m\left(\frac{k_x}{\rho}(1+\rho x)\right) + C_2 N_m\left(\frac{k_x}{\rho}(1+\rho x)\right);\quad Y(y) = \begin{matrix}\cos k_y y\\ \sin k_y y\end{matrix};\quad Z(s) = \begin{matrix}\cos\gamma s\\ \sin\gamma s\end{matrix}. \tag{9}$$

В (9) $C_1$ и $C_2$ – произвольные постоянные, $\gamma = m\rho$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, $k^2 = k_x^2 + k_y^2$, $J_m$ и $N_m$ – функции Бесселя и Неймана, соответственно.

Тогда для волн $E$-типа имеем

$$E_x = -\frac{\gamma A}{\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \gamma s + k^2 A^2}\left[\frac{\partial E_s}{\partial x} + \frac{1}{\rho} E_s\right], \qquad H_x = -\frac{k n A^2}{\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \gamma s - k^2 A^2} E_s ,$$

$$E_y = \frac{i n \gamma A}{\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \gamma s - k^2 A^2} E_s , \qquad H_y = \frac{i k A^2}{\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \gamma s + k^2 A^2}\left[\frac{\partial E_s}{\partial x} + \frac{1}{\rho} E_s\right],$$

$$E_s = X(x) Y(y) Z(s) \mathrm{e}^{-i\omega t} , \qquad H_s = 0 ,$$

с граничными условиями $E_s(x_c, y_c, s, t) = 0$. Для волн $H$-типа получаем аналогичные соотношения с граничными условиями $\partial H_s(x_c, y_c, s, t) / \partial n = 0$, где $x_c, y_c$ – значения поперечных координат стенок тора.

Таким образом, в натуральной системе координат волновое уравнение для электромагнитного колебания допускает строгое решение путем частичного разделения переменных и строгого численного решения двумерного уравнения для потенциальной функции. При этом доказывается, что в тороиде могут существовать $E$- и $H$-типы тороидальных колебаний.

Авторы благодарны проф. Э.Д.Газазяну за постановку задачи и за ценные советы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Э.Д.Газазян, М.И.Иванян, А.Д.Тер-Погосян.** Изв. НАН Армении, Физика, **29**, 141 (1994).
2. **Э.Д.Газазян.** Равномерная коротковолновая асимптотика скалярных и электромагнитных волн на основе одномерных эталонных функций. Препринт ЕФИ-1092 (55)-88 (1988).
3. **Л.А.Вайнштейн.** Электромагнитные волны. М., Радио и связь, 1988.

## ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ՏՈՐՈԻԴԱՅԻՆ ՌԵԶՈՆԱՏՈՐՈՒՄ

Տ.Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Դ.Կ. ՔԱԼԱՆԹԱՐՅԱՆ

Լուծված է տորոիդային ռեզոնատորներում սեփական էլեկտրամագնիսական տատանումները որոշելու խնդիրը մասնիկի հետագծի հետ կապված կոորդինատային համակարգում: Ցույց է տրված, որ այս համակարգում ալիքային հավասարման մեջ մի փոփոխականն անմիջապես անջատվում է, իսկ մյուս երկու փոփոխականների համար ստացվում է 2-րդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարում, որը կարելի է լուծել թվային եղանակով: Ապացուցված է նաև, որ տորոիդային ռեզոնատորներում գոյություն ունեն $E$- և $H$-տիպի ալիքներ:

## ELECTROMAGNETIC OSCILLATIONS IN A TOROIDAL CAVITY

T.A. HARUTYUNYAN, D.K. KALANTARYAN

We determine the natural electromagnetic fields in toroidal cavities in the system of coordinates which is connected with the trajectory of a charged particle. It is shown that in the wave equation one variable is separated, and for other two variables one obtains the second-order differential equation which can be solved by numerical methods. It is also proved that there are electromagnetic waves of $E$- and $H$-types in toroidal cavities.