

УДК 621.315

ТОЧНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ СУММ И ФИШЕРОВСКИЕ НУЛИ АНИЗОТРОПНО-СПИНОВОЙ И КАЛИБРОВОЧНОЙ МОДЕЛЕЙ ПОТТСА

В.С. ПОГОСЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 3 февраля 2004 г.)

Рассмотрены точные выражения статистических сумм и распределения фишеровских нулей анизотропно-спиновой модели Поттса с числом состояний q и калибровочной модели Изинга с двухкватратным представлением действия. Исследованы анизотропные лестничные графы (решетки) с разными граничными условиями и, в частности, цилиндр, тороид и бутылка Клейна с шириной 2.

Изучение калибровочных моделей на решетках – один из основных методов получения физических результатов вне рамок теории возмущений. Калибровочная теория на решетке была впервые сформулирована в 1974 г. Вильсоном [1]. Обзор решеточных калибровочных моделей и их применение в КХД были сделаны Когутом [2], а топологические аспекты, дуальность к спиновым моделям, самодуальность и другие вопросы калибровочной модели Поттса исследованы в [3-9]. Рассмотренная $Z(q)$ группа симметрии калибровочной модели является центром группы $SU(q)$ и поэтому играет важную роль в явлении заточения кварков (обнаружен фазовый переход первого рода “конфайнмент-деконфайнмент”) [4]. Спиновая же модель, фишеровские нули и комплексные фазовые переходы исследованы, например, в [9-12].

Рассмотрим сначала спиновую модель Поттса с числом состояний q , определенную на двумерной квадратной решетке. Гамильтониан такой модели имеет вид

$$-\beta H = K_1 \sum_{\langle i,j \rangle} \delta(\sigma_i, \sigma_j) + K_2 \sum_{\langle i,k \rangle} \delta(\sigma_i, \sigma_k), \quad (1)$$

где $\sigma_i = 1, 2, \dots, q$ – спиновые переменные на $i = 1, 2, \dots, n$ узлах решетки. Первое суммирование ведется по всем горизонтальным, а второе – по всем вертикальным взаимодействиям. Статистическую сумму можно записать в виде

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta H} = \sum_{\{\sigma\}} \left(\prod_{\langle i,j \rangle} (1 + v_1 \delta(\sigma_i, \sigma_j)) \right) \left(\prod_{\langle i,k \rangle} (1 + v_2 \delta(\sigma_i, \sigma_k)) \right), \quad (2)$$

где $v_1 = e^{K_1} - 1$ и $v_2 = e^{K_2} - 1$. Каждой решетке соответствует граф $G=(V,E)$ с множеством вершин V и множеством ребер E . Допустим, что $G'=(V,E')$, $E' \subseteq E$ есть подграф графа G . Суммирование по спиновым переменным статистическую сумму можно представить в виде суммы по всем подграфам

$$Z(G, q, v_1, v_2) = \sum_{G' \subseteq G} q^{k(G')} v_1^{e_1(G')} v_2^{e_2(G')}. \quad (3)$$

Здесь $k(G')$ – число связанных компонент, $e_1(G')$ – число горизонтальных, а $e_2(G')$ – число вертикальных ребер. Заметим, что для конечных графов G эта сумма есть многочлен от переменных q, v_1 и v_2 . Далее можно обобщить эти переменные, допуская, что они комплексные числа. Для исследования фазовых переходов интересно рассмотреть нули статистической суммы в пространстве $\{q, v_1, v_2\} \in C^3$. Используя рекурсивные свойства представления (3), была получена система линейных рекуррентных уравнений. Решение этой системы дает аналитические выражения статистических сумм спиновой модели Поттса для анизотропных лестниц с разными граничными условиями. Получается

$$Z(G, q, v_1, v_2) = \sum_{i=q}^6 c_i \lambda_i^n, \quad (4)$$

где n – длина решетки,

$$\lambda_1 = v_1^2, \quad (5)$$

$$\lambda_2 = v_1(q + v_1), \quad (6)$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{v_1}{2} \left(q + 2v_1 + 2v_2 + v_1 v_2 \pm \sqrt{(q + 2v_1 + 2v_2 + v_1 v_2)^2 - 4v_1(1 + v_2)(q + v_1)} \right), \quad (7)$$

$$\lambda_{5,6} = \frac{1}{2} \left(q^2 + 2qv_1 + 2v_1^2 + qv_2 + 2v_1 v_2 + v_1^2 v_2 \pm \right. \quad (8)$$

$$\left. \pm \sqrt{(q^2 + 2qv_1 + 2v_1^2 + qv_2 + 2v_1 v_2 + v_1^2 v_2)^2 - 4v_1^2(1 + v_2)(q + v_1)^2} \right)$$

и $\{c_1 = q^2 - 3q + 1, c_2 = c_3 = c_4 = q - 1, c_5 = c_6 = 1\}$ для циклических граничных условий, а для ленты Мебиуса – $\{c_1 = -1, c_2 = 1 - q, c_3 = c_4 = q - 1, c_5 = c_6 = 1\}$. Отметим, что в случае изотропных лестниц ($v_1 = v_2$) эти результаты совпадают с результатами Р.Шрока [10].

Теперь рассмотрим калибровочную модель Изинга с двухквадратным представлением действия для тороидальных решеток. Допустим, что решетка имеет N частиц и $2N$ ребер. Тогда действие имеет вид

$$S(\beta_p, \beta_g) = \beta_p \sum_{\square} U_{\square} + \beta_g \sum_{\square} U_{\square}. \quad (9)$$

Первая сумма ведется по всем N квадратам решетки, а вторая – по всем $2N$ прямоугольникам с размерами 2×1 (рис.1). Здесь

$$U_{ij} \in Z(2), \quad Z(q) = \left\{ e^{\frac{2i\pi k}{q}}, \quad k = 1, 2, \dots, q \right\} \quad (10)$$

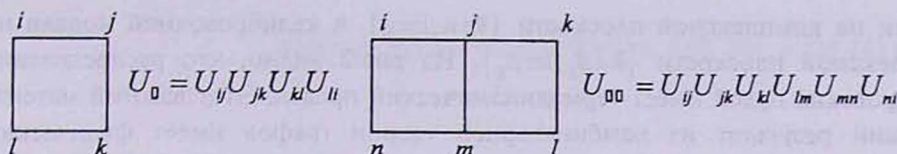


Рис.1. Пример квадрата и прямоугольника на решетке.

суть калибровочные переменные на ребре ij . Действие инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$U_{ij} \rightarrow s_i^{-1} U_{ij} s_j \quad (11)$$

для произвольных $s_i \in Z(2)$ (см. [1,8]). Теперь на дуальной решетке построим спиновую модель Изинга со спинами $\mu_\alpha = U_\alpha$. Тогда

$$Z_{\text{Ising}}^{\text{gauge}}(\beta_p, \beta_g) = \sum_{\{U\}} e^{S(\beta_p, \beta_g)} = 2^N \sum_{\{\mu\}} e^{\beta_p \sum_\alpha \mu_\alpha + \beta_g \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \mu_\alpha \mu_\beta} = 2^N Z_{\text{Ising}}^{\text{spin}}(\beta_p, \beta_g). \quad (12)$$

Коэффициент появляется из-за калибровочной инвариантности, поскольку каждой спиновой конфигурации соответствует 2^N калибровочных состояний с одинаковыми действиями. С другой стороны,

$$Z_{\text{Potts}}^{\text{spin}}(K_1^{\text{Potts}} = 2K_1^{\text{Ising}}, K_2^{\text{Potts}} = 2K_2^{\text{Ising}}, q=2) \Leftrightarrow Z_{\text{Ising}}^{\text{spin}}(K_1^{\text{Ising}}, K_2^{\text{Ising}}). \quad (13)$$

Если $K_2 = 2K_1$, то лестницы со свободным, циклическим и обратным (лента Мебиуса) граничными условиями становятся эквивалентными соответственно цилиндру, тороиду и бутылке Клейна с шириной 2. Следовательно, в данном случае спиновая модель Поттса дуальна калибровочной модели Изинга

$$Z_{\text{Ising}}^{\text{gauge}}(\beta_p = 0, \beta_g) \Leftrightarrow Z_{\text{Potts}}^{\text{spin}}(K_1 = 2\beta_g, K_2 = 4\beta_g, q=2). \quad (14)$$

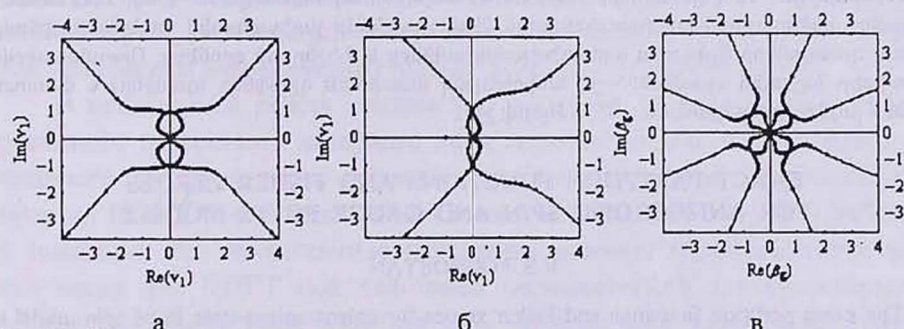


Рис.2. Фишеровские нули: а) спиновая модель Поттса, $q=2$, $v_2 = v_1(v_1 + 2)$ (тороид с шириной 2), б) спиновая модель Поттса, $q=2$, $v_1 = v_2$ (изотропная лестница), в) калибровочная модель Изинга, $\beta_p = 0$ (тороид с шириной 2).

Имея статистическую сумму спиновой модели, можно исследовать калибровочную модель. Для примера рассмотрим фишеровские нули спиновой

модели на комплексной плоскости $\{\operatorname{Re} v_1, \operatorname{Im} v_1\}$ и калибровочной модели на комплексной плоскости $\{\operatorname{Re} \beta_g, \operatorname{Im} \beta_g\}$. Из рис.2 видно, что распределение фишеровских нулей имеет термодинамический предел. Этот важный математический результат из комбинаторной теории графов имеет физический смысл. Оказывается, что в термодинамическом пределе фишеровские нули находятся на линиях комплексных фазовых переходов. В частности, виден реальный фазовый переход в нулевой точке. Заметим, что в данном случае распределение фишеровских нулей не зависит от граничных условий.

Автор выражает благодарность Н.С.Ананикяну за предложенную тему, ценные консультации и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. K.Wilson. Phys. Rev. D, 10, 2445 (1974).
2. J.Kogut. Univ. of Illinois preprint, ILL-(TH)-82-46 (1982).
3. N.S.Ananikyan, N.Sh.Izmailyan. Phys. Lett. B, 151, 142 (1985).
4. N.S.Ananikyan, N.Sh.Izmailian. Nucl. Phys., 56, 216 (1993).
5. N.S.Ananikyan, R.R.Shcherbakov. J. Phys. A, 27, 140 (1994).
6. N.S.Ananikyan, R.R.Shcherbakov. Phys. Lett. A, 200, 27 (1995).
7. N.S.Ananikyan, R.G.Ghazaryan, N.Sh.Izmailian, R.R.Shcherbakov. Phys. Rev. E, 60, 5106 (1999).
8. L.Turban. J. Phys. A, 17, 419 (1984).
9. F.Y.Wu. Rev. Mod. Phys., 54, 241 (1982).
10. R.Shrock. Physica A, 283, 388 (2000).
11. S.-C.Chang, R.Shrock. ArXiv:math-ph/0112061, 2 (2002).
12. H.Whitney. Ann. of Math., 33, 688 (1932).

ՓՈԹՍԻ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՍՊԻՆԱՅԻՆ ԵՎ ՉԱՓԱՐԿԱՅԻՆ ՍՈՒԵԼՆԵՐԻ
ՎԻՃԱԿԱԳՐԱԿԱՆ ԳՈՒՄԱՐՆԵՐԻ ՃՇՏԳՐԻՏ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ
ԵՎ ՖԻՇԵՐՅԱՆ ՋՐՈՆՆԵՐԸ

Վ.Ս. ՊՈԳՈՍՅԱՆ

Դիտարկված են q վիճակների թվով Փոթսի անիզոտրոպ սպինային և Իզինգի $Z(2)$ համաչափությամբ գործողության երկբառակուսային ներկայացմամբ չափարկային մոդելների վիճակագրական գումարների ճշգրիտ արտահայտությունները և Ֆիշերյան զրոները: Ուսումնասիրված են տարբեր եզրային պայմաններով անիզոտրոպ աստիճան գրաֆներ (ցանցեր) և մասնավորապես 2 լայնությամբ զլան, տ. և Զլեյնի շիշ:

EXACT PARTITION FUNCTIONS AND FISHER ZEROES FOR ANIZOTROPIC SPIN AND GAUGE POTTS MODELS

V.S. POGHOSYAN

The exact partition functions and Fisher zeroes for anisotropic q -state Potts spin model and Ising gauge model with double plaquette representation of the $Z(2)$ symmetric action are considered. The anisotropic ladders with different boundary conditions are studied. The 2-leg toroids, which are a special case of anisotropic ladders, are also investigated.