

УДК 539.12

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ПОЛЯ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ПРОЛЕТЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ ПОД ПРОИЗВОЛЬНЫМ УГЛОМ К ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМУ МЕТАЛЛИЧЕСКОМУ ЭКРАНУ

Х.В. СЕДРАКЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 30 июля 2004 г.)

Получены точные решения поля излучения точечной заряженной частицы при дифракционном рассеянии в общем случае угла наклона траектории частицы относительно экрана, когда экран представляет из себя идеально проводящую металлическую полуплоскость.

Как известно, при пролете вблизи металлического экрана точечной заряженной частицы возникает излучение, которое связано с дифракцией электромагнитного поля частицы на металлическом экране. Точные решения излучения частицы, когда экран представляет собой идеально проводящую металлическую полуплоскость, рассматривались в двух частных случаях геометрии движения частицы относительно экрана. В работе [1] исследован случай, когда частица летит в плоскости, перпендикулярной к ребру экрана, а в работе [2] рассмотрен случай, когда частица летит в плоскости, перпендикулярной плоскости экрана и, в то же время, параллельно ребру экрана. Однако, в связи с развитием неразрушающей диагностики пучков заряженных частиц [3-9], имеющих заметную угловую расходимость [10], необходимо иметь точные решения излучения точечной заряженной частицы при дифракционном рассеянии в общем случае угла наклона траектории частицы относительно экрана.

Потери энергии заряженной частицы при дифракционном излучении очень малы, поэтому можно предположить, что ее скорость v остается постоянной при движении.

Для определенности расположим ось Oz вдоль ребра экрана, а ось Ox – в плоскости экрана ($x > 0$). Пусть в момент времени $t=0$ частица пролетает на минимальном расстоянии a_0 от ребра экрана с координатой $z(0)=0$. Обозначим угол наклона проекции скорости частицы на плоскость xOy относительно оси Ox через θ , а через ϕ – угол между скоростью частицы и осью Oz . Для удобства обозначим через $A^0 = \{A^0(r, t), \phi^0(r, t)\}$ векторный и

скалярный потенциалы движущейся частицы, а через $A^1 = \{A^1(\mathbf{r}, t), \varphi^1(\mathbf{r}, t)\}$ – потенциалы индуцированных на экране токов и зарядов (обозначим эти токи и заряды через $j^1 = \{j^1(\mathbf{r}, t), \rho^1(\mathbf{r}, t)\}$). Калибровка потенциалов лоренцева: $\partial \varphi^{0,1} / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{A}^{0,1} = 0$ (скорость света $c = 1$).

Потенциалы поля являются решениями неоднородного уравнения Максвелла

$$\Delta A^0 - \frac{\partial^2 A^0}{\partial t^2} = -4\pi j^0, \quad (1)$$

$$\Delta A^1 - \frac{\partial^2 A^1}{\partial t^2} = -4\pi j^1, \quad (2)$$

где

$$j^0 = \{j^0(\mathbf{r}, t), \rho^0(\mathbf{r}, t)\} = \{e \mathbf{v} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}_0 - \mathbf{v}t), e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}_0 - \mathbf{v}t)\} \quad (3)$$

есть ток и заряд дифрагирующей частицы, $\mathbf{a}_0 = \{-a_0 \sin \vartheta, a_0 \cos \vartheta, 0\}$ – координата нахождения частицы в момент времени $t = 0$, а $\mathbf{v} = \{v \sin \phi \cos \vartheta, v \sin \phi \sin \vartheta, v \cos \phi\}$ – ее скорость.

Для решения уравнений (1) и (2) с учетом граничных условий представим потенциалы и токи в виде их Фурье-образов:

$$A^{0,1}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{\infty} A_{\omega}^{0,1}(k_x, k_y, k_z) \exp\{-i\omega t + ik_x x + ik_y y + ik_z z\} d\omega dk_x dk_y dk_z, \quad (4)$$

$$j_x^1(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{\infty} j_{x\omega}^1(k_x, k_y, k_z) \exp\{-i\omega t + ik_x x + ik_y y + ik_z z\} d\omega dk_x dk_y dk_z. \quad (5)$$

Как известно, на идеально проводящем металлическом экране тангенциальная составляющая электрического поля и нормальная составляющая магнитного поля обращаются в нуль ($E_x = E_z = H_y = 0$). С учетом этих граничных условий можно получить следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 \overline{\varphi^1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{\varphi^1}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \overline{\varphi^1}}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 \overline{\varphi^0}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \overline{\varphi^0}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \overline{A_x^0}}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 \overline{A_z^0}}{\partial t \partial z}, \quad (6)$$

где черта над буквами указывает, что рассматриваются значения потенциалов на поверхности $y = 0$. Аналогичным образом, для x -компоненты векторного потенциала индуцированных токов на поверхности экрана имеем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 \overline{A_x^1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{A_x^1}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \overline{A_x^1}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \overline{A_x^0}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \overline{\varphi^0}}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 \overline{A_z^0}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \overline{A_z^0}}{\partial z^2}. \quad (7)$$

Решения уравнений (6) и (7) легко получить для их Фурье-образов:

$$\overline{A_{x\omega}^1(x, k_z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{A_x^1(r, t)} \exp\{i\omega t - ik_z z\} dt dz, \quad (8)$$

$$\overline{\varphi_{\omega}^1(x, k_z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi^1(r, t)} \exp\{i\omega t - ik_z z\} dt dz. \quad (9)$$

С учетом (8) и (9) последние имеют вид

$$\frac{\partial^2 \overline{\varphi_{\omega}^1(x, k_z)}}{\partial x^2} + p^2 \overline{\varphi_{\omega}^1(x, k_z)} = (k_z^2 - \tau^2) \overline{\varphi_{\omega}^0(x, k_z)} - i\omega \tau \overline{A_{x\omega}^0(x, k_z)} - \omega k_z \overline{A_{z\omega}^0(x, k_z)}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \overline{A_{x\omega}^1(x, k_z)}}{\partial x^2} + p^2 \overline{A_{x\omega}^1(x, k_z)} = i\omega \tau \overline{\varphi_{\omega}^0(x, k_z)} - p^2 \overline{A_{x\omega}^0(x, k_z)} - i\tau k_z \overline{A_{z\omega}^0(x, k_z)}, \quad (11)$$

где потенциалы "нулевых" полей на поверхности экрана имеют вид

$$\overline{A_{\omega}^0(x, k_z)} = \frac{2\pi e}{\alpha} \exp\left[-\frac{a_0}{v \sin \phi} \alpha - \tau x\right] \{v_x, v_y, v_z, 1\}, \quad (12)$$

$$p^2 = \omega^2 - k_z^2; \quad \alpha = \sqrt{(\omega - k_z v_z)^2 - v_n^2 p^2};$$

$$\tau = \frac{v_y}{v^2 - v_z^2} \alpha - i \frac{v_x}{v^2 - v_z^2} (\omega - k_z v_z); \quad v_n = \sqrt{v^2 - v_z^2}. \quad (13)$$

Для потенциалов индуцированных токов и зарядов на экране ($x > 0$), из (10) и (11), с учетом (12) имеем:

$$\overline{\varphi_{\omega}^1(x, k_z)} = c_1 \exp\{ipx\} + c_2 \exp\{-ipx\} - \frac{2\pi e(v_x \alpha + iv_y[(\omega - k_z v_z) - \omega v_n^2])}{\alpha(v_x \alpha + iv_y[(\omega - k_z v_z)])} \exp\left\{-\frac{a_0}{v_n} \alpha - \tau x\right\}, \quad (14)$$

$$\overline{A_{x\omega}^1(x, k_z)} = \frac{c_1 p}{\omega} \exp\{ipx\} - \frac{c_2 p}{\omega} \exp\{-ipx\} - \frac{2\pi e v_n^2}{v_x \alpha + iv_y(\omega - k_z v_z)} \exp\left\{-\frac{a_0}{v_n} \alpha - \tau x\right\}, \quad (15)$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования.

Если учесть, что индуцированные токи и заряды имеют поверхностный характер и их можно представить в следующем виде:

$$\rho^1(x, y, z, t) = \rho^1(x, z, t) \delta(y), \quad j_x^1(x, y, z, t) = j_x^1(x, z, t) \delta(y), \quad (16)$$

то их Фурье-образы не будут зависеть от компоненты k_y , т.е.

$$\rho_{\omega}^1(k_x, k_y, k_z) = \rho_{\omega}^1(k_x, k_z), \quad j_{x\omega}^1(k_x, k_y, k_z) = j_{x\omega}^1(k_x, k_z). \quad (17)$$

Учитывая (17), решение уравнения Максвелла для Фурье-компонент поля имеет вид:

$$\overline{A_{\omega}^1(k_x, k_z)} = 2i\pi \frac{j_{\omega}^1(k_x, k_z)}{\sqrt{p^2 - k_x^2}}. \quad (18)$$

Поэтому, с одной стороны, $\overline{A_{x\omega}^1(x, k_z)}$ при $x > 0$ дается выражением (15), с другой стороны, его можно представить с помощью (18) в виде

$$\overline{A_{\omega}^1(x, k_z)} = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j_{\omega}^1(k_x, k_z)}{\sqrt{p^2 - k_x^2}} \exp\{ik_x x\} dk_x. \quad (19)$$

Однако, так как вне экрана ($x < 0$) индуцированные токи и заряды отсутствуют, то

$$j_{x\omega}^1(x, k_z)|_{x \leq 0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j_{x\omega}^1(k_x, k_z) \exp\{ik_x x\} dk_x|_{x \leq 0} = 0, \quad (20)$$

$$\rho_{\omega}^1(x, k_z)|_{x \leq 0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\omega}^1(k_x, k_z) \exp\{ik_x x\} dk_x|_{x \leq 0} = 0. \quad (21)$$

Считая, что $\text{Im } \omega > 0$ ($\text{Im } p > 0$), для конечности решения при $x > 0$ из (15) имеем $c_2 = 0$, а связанное с наличием частицы аналитическое решение (которое зануляется при отсутствии частицы), совместимое с выражениями (15), (19) и (20), ищем в виде

$$j_{x\omega}^1(k_x, k_z) = \frac{c'}{(k_x - i\tau)\sqrt{p - k_x}}, \quad (22)$$

где $c' = \text{const}$ есть неизвестный параметр.

Окончательно получаем:

$$j_{x\omega}^1(k_x, k_z) = \frac{(p - i\tau)}{(k_x - i\tau)\sqrt{p - k_x}} B_{\omega}(k_x, k_z), \quad (23)$$

где $B_{\omega}(k_x, k_z) = \frac{ev_n^2 \sqrt{p + i\tau}}{\alpha v_x + i(\omega - k_z v_z) v_y} \exp\left\{-\frac{a_0}{v_n} \alpha\right\}$, ($c' = B_{\omega}(k_x, k_z)(p - i\tau)$), а для постоянной получим $c_1 = -(2\pi \omega / p \sqrt{2p}) B_{\omega}(k_x, k_z)$.

Имея значение c_1 , с помощью (14) и (21) для индуцированных зарядов будем иметь:

$$\rho_{\omega}^1(k_x, k_z) = \left\{ \frac{\omega}{p \sqrt{p - k_x}} + \frac{v_x \alpha + i v_y \left[(\omega - k_z v_z) - \omega v_n^2 \right] \sqrt{p - k_x}}{\alpha v_n^2 k_x - i \tau} \right\} B_{\omega}(k_x, k_z). \quad (24)$$

Заряд и x -компонента индуцированного тока определены, а z -компоненту индуцированного тока легко можно вычислить с помощью уравнения непрерывности (учтем, что $j_y^1(r, t) = 0$):

$$\frac{\partial \rho^1(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial j_x^1(\mathbf{r}, t)}{\partial x} + \frac{\partial j_z^1(\mathbf{r}, t)}{\partial z} = 0. \quad (25)$$

Для $j_{z\omega}^1(k_x, k_z)$ будем иметь:

$$j_{z\omega}^1(k_x, k_z) = B_\omega(k_x, k_z) \left[\frac{k_z}{p\sqrt{p-k_x}} + \frac{\sqrt{p-k_x}}{(k_x - i\tau)} \frac{v_x v_z}{v_n^2} + i \frac{\sqrt{p-k_x} [\omega v_z - k_z v^2]}{\alpha (k_x - i\tau)} \frac{v_y}{v_n^2} \right]. \quad (26)$$

Таким образом, имея индуцированные на экране токи и заряды, можно найти поле излучения этих токов (т.е. дифракционное поле). С учетом того, что характерный размер токов и зарядов сравним с длиной излученной волны, поле на больших расстояниях (в волновой зоне) можно найти с помощью формулы

$$A^1(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{R} \int_S j^1(\mathbf{r}', t - |\mathbf{R} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}', \quad (27)$$

где $R = |\mathbf{R}|$, а интегрирование проводится по поверхности S экрана. Фурье-образ векторного потенциала поля излучения с учетом (5) и (27) имеет вид

$$A_\omega^1(\mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} A^1(\mathbf{R}, t) e^{i\omega t} dt = \frac{e^{i\omega R}}{R} j_\omega^1(k_{x0}, k_{z0}), \quad (28)$$

где $k_{x0} = \omega(R_x / R) = \omega \sin \psi \cos \varphi$, $k_{z0} = \omega(R_z / R) = \omega \cos \psi$ (использована сферическая координатная система: $x = R \sin \psi \cos \varphi$, $y = R \sin \psi \sin \varphi$, $z = R \cos \psi$).

Для Фурье-образов электрического и магнитного полей излучения

$$\mathbf{E}_\omega^1(\mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}^1(\mathbf{R}, t) e^{i\omega t} dt; \quad \mathbf{H}_\omega^1(\mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}^1(\mathbf{R}, t) e^{i\omega t} dt \quad (29)$$

имеем:

$$E_{x\omega}^1(\mathbf{R}) = i \frac{\omega \sqrt{p_0 - k_{x0}}}{R(k_{x0} - i\tau_0)} e^{i\omega R} B_\omega(k_{x0}, k_{z0}) \left\{ 1 + \frac{k_{x0} - i\tau_0}{p_0} - \frac{k_{x0} v_x}{\omega v_n^2} - i \frac{k_{x0} v_y [\omega - v_z k_{z0} - \omega v_n^2]}{\omega v_n^2 \alpha_0} \right\},$$

$$E_{y\omega}^1(\mathbf{R}) = -i \frac{\omega}{R} e^{i\omega R} B_\omega(k_{x0}, k_{z0}) \sin \psi \sin \varphi \times$$

$$\times \left\{ \frac{\omega}{p_0 \sqrt{p_0 - k_{x0}}} + \frac{\sqrt{p_0 - k_{x0}}}{k_{x0} - i\tau_0} \frac{v_x}{v_n^2} + i \frac{v_y [\omega - v_z k_{z0} - \omega v_n^2]}{\alpha_0 v_n^2} \frac{\sqrt{p_0 - k_{x0}}}{k_{x0} - i\tau_0} \right\},$$

$$E_{z\omega}^1(\mathbf{R}) = i \frac{\omega e^{i\omega R} B_\omega(k_{x0}, k_{z0}) \sqrt{p_0 - k_{x0}}}{\alpha_0 v_n^2 (k_{x0} - i\tau_0)} \left\{ \alpha_0 v_x (\omega v_z - k_{z0}) - i v_y [\omega k_{z0} (1 + v_z^2) - v_z (\omega^2 + k_z^2)] \right\}, \quad (30)$$

$$H_{x\omega}^1(\mathbf{R}) = i \frac{\omega}{R} e^{i\omega R} B_\omega(k_{x0}, k_{z0}) \sin \psi \sin \varphi \times$$

$$\times \left\{ \frac{k_{z0}}{p_0 \sqrt{p_0 - k_{x0}}} + i \frac{\sqrt{p_0 - k_{x0}}}{\alpha v_n^2 (k_{x0} - i\tau_0)} \left[\alpha v_x v_z + i v_y (\omega v_z - k_{z0} v^2) \right] \right\},$$

$$H_{y\omega}^1(\mathbf{R}) = -i \frac{\sqrt{p_0 - k_{x0}}}{R(k_{x0} - i\tau_0)} e^{i\omega R} B_\omega(k_{x0}, k_{z0}) \left\{ \frac{k_{z0}}{p_0} [i\tau_0 - k_{x0}] - k_{z0} + \frac{v_x v_z}{v_n^2} k_{x0} + i \frac{k_{x0} v_y}{\alpha v_n^2} [\omega v_z - k_{z0} v^2] \right\}.$$

$$H_{z\omega}^1(\mathbf{R}) = -i \frac{(p_0 - i\tau_0) k_{y0}}{R(k_{x0} - i\tau_0) \sqrt{p_0 - k_{x0}}} e^{i\omega R} B_\omega(k_{x0}, k_{z0}).$$

где $p_0 = \omega \sin \psi$, $k_{y0} = \omega(R_y / R) = \omega \sin \psi \sin \varphi$, $\alpha_0 = \sqrt{(\omega - k_{z0} v_z)^2 - v_n^2 p_0^2}$, а

$$\tau_0 = \frac{v_y}{v^2 - v_z^2} \alpha_0 - i \frac{v_x}{v^2 - v_z^2} (\omega - v_z k_{z0}).$$

В рассматриваемой задаче полную энергию излучения W можно представить в следующем виде:

$$W = \frac{R^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d\Omega \left[\mathbf{E}^1(\mathbf{R}, t) \mathbf{H}^1(\mathbf{R}, t) \right] \quad (31)$$

(интегрирование проводится по сфере большого радиуса).

С учетом (29), перейдя от интегрирования по t к интегрированию по ω , имеем:

$$W = \frac{R^2}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d\Omega \left[\mathbf{E}_\omega^1(\mathbf{R}, t) \mathbf{H}_\omega^1(\mathbf{R}, t) \right]. \quad (32)$$

Выражение (32) можно представить в следующем виде:

$$W = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \int_0^\pi d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \psi \left\{ \left| j_{x\omega}^1(k_{x0}, k_{z0}) \right|^2 \sin^2 \varphi + \right. \\ \left. + \frac{\left| j_{x\omega}^1(k_{x0}, k_{z0}) \cos \varphi - \rho_\omega^1(k_{x0}, k_{z0}) \sin^2 \psi \right|^2}{\cos^2 \psi} \right\}. \quad (33)$$

После интегрирования по частотам, с учетом (23) и (24), для полной энергии излучения имеем:

$$W = \frac{e^2}{4\pi^2 a_0} \int_0^\pi d\psi d\varphi \frac{v_n^2}{|K_0 - i\tau_{00}|^2 \left[(1 - v_z \cos \psi)^2 - v_n^2 \sin^2 \psi \right]^{\frac{3}{2}}} \left\{ \cos^2 \frac{\varphi}{2} (\cos \psi - v_z)^2 [1 - \right. \\ \left. - v_z \cos \psi - v_n \sin \psi \cos \theta] + \sin^2 \frac{\varphi}{2} [(1 - v_z \cos \psi)^2 - v_n^2 \sin^2 \psi] [1 - v_z \cos \psi + v_n \sin \psi \cos \theta] \right\}, \quad (34)$$

где введены следующие обозначения: $K_0 = (k_{x0} / \omega) v_n$, $\tau_{00} = (\tau_0(k_{z0}) / \omega) v_n$, и

$$|K_0 - i\tau_{\infty}|^2 = \left[\sqrt{(1 - v_z \cos \psi)^2 - v_z^2 \sin^2 \psi} \sin \vartheta - v_z \sin \psi \cos \varphi \right]^2 + (1 - v_z \cos \psi)^2 \cos^2 \vartheta. \quad (35)$$

Когда угол наклона траектории частицы равняется $\phi = 90^\circ$, то формула (34) в общем виде совпадает с известной формулой, полученной в работе [1]. Однако, следует отметить, что в формуле (15) работы [1] имеется лишний множитель β^2 . В другом частном случае, когда $\vartheta = 90^\circ$, формула (34) совпадает с результатом работы [2].

В заключение хочу выразить свою благодарность проф. Г.К.Аветисяну за ценные советы и многочисленные обсуждения.

Работа финансировалась фондом НФНПТ, грант No. NFSAT PH 082-02 / CRDF 12023.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.П.Казанцев, Г.И.Сурдутович. ДАН СССР, **147**, 74 (1962).
2. Д.М.Седракий. Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. наук, **17**, 103 (1964).
3. M.J.Moran, B.Chang. Nucl. Instr. and Meth., **B40/41**, 970 (1989).
4. M.Castellano. Nucl. Instr. and Meth., **A 394**, 275 (1997).
5. D.W.Rule, R.B.Fiorito, W.D.Kimura. AIP Conference Proceedings, **390**, 510 (1997).
6. R.B.Fiorito, D.W.Rule. Nucl. Instr. and Meth., **B 173**, 67 (2001).
7. A.P.Potylitsyn, N.A.Potylitsyn. Preprint, lanl.arXiv physics/0002034 (2000).
8. Y.Shibata et al. Phys. Rev., **E 52**, 6787 (1995).
9. B.Feig et al. Nucl. Instr. and Meth., **A 475**, 492 (2001).
10. H.K.Avetissian et al. Nucl. Instr. and Meth., **A 528**, 215 (2004).

ՄԵՏԱՂԱԿԱՆ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՆԿԱՏՄԱՄԲ ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ
ԱՆԿՅԱՆ ՏՄԿ ԹՈՂՈՂ ԼԻՑԻԱ ԴԻՖՐԱԿՏԻՈՆ ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ
ԴԱՇՏԻ ՃՇԳՐԻՏ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԸ

Խ.Վ ՄԵՐԻԱԿՅԱՆ

Ստացված են իդեալական հաղորդիչ կիսահարթության մկատմամբ կամայական անկյան տակ թռչող կետային լիցքի դիֆրակցիոն ճառագայթման դաշտի ճշգրիտ արտահայտությունները:

EXACT FORMULAS FOR THE DIFFRACTION RADIATION FIELD
FROM A SEMI-INFINITE METALLIC SCREEN AT AN ARBITRARY MOTION
OF A CHARGED PARTICLE

KH.V. SEDRAKIAN

Exact formulas for the diffraction radiation of a point charged particle passing close to a semi-infinite ideally conducting metallic screen at an arbitrary angle are obtained.