Известия НАН Армении, Физика, т.40, №3, с.167-173 (2005)

УДК 539.12

КВАНТОВАЯ ДИНАМИКА ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В СРЕДЕ ПРИ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

С.С. ИСРАЕЛЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 14 мая 2004 г.)

В рамках релятивистской квантовой теории исследовано нелинейное взаимодействие заряженной частицы с когерентной электромагнитной волной в диэлектрической среде, при сильной связи “частица–волна”. Показано, что в отличие от случая слабой связи, когда имеет место зонная структура связанных состояний частицы в волне, в случае сильной связи спектр состояний имеет дискретный характер и между ними возможны резонансные радиационные переходы.

1. Введение

Как известно, при взаимодействии заряженной частицы с плоско-поперечной электромагнитной (ЭМ) волной в диэлектрической среде существует критическое значение поля, выше которого волна становится для частицы потенциальным барьером или потенциальной ямой, и частица отражается или захватывается поперечной волной [1]. Это нелинейное классическое явление, так как комптоновская длина волны частицы пренебрежимо мала по сравнению с оптическими длинами реальных световых пучков, даже по сравнению с длиной ЭМ волны и, следовательно, пренебрежимо малы вероятности квантовых эффектов надбарьерного отражения и туннельного прохождения. Тем не менее, квантовое описание такого нелинейного явления существенно, так как при классическом отражении от волны или захвате частицы (что может наступать в сколь угодно слабом поле волны вблизи резонанса [2]), в результате суперпозиции квантовых состояний могут возникнуть такие явления, как квантовая модуляция [3] или зонная структура состояний частицы [4-6].

Однако, в общем случае квантовое описание вынужденного черенковского процесса с математической точки зрения точно не удается, так как оно сводится к решению уравнений Матье или Хилла. Только в одном частном случае, когда начальная скорость частицы параллельна направлению распространения волны и последняя имеет круговую поляризацию, удается точно решить уравнение Дирака для внешнего по отношению к волне электрона и получить точную квантовую картину взаимодействия с учетом вышеуказанного явления классического отражения (квантовая отдача фотона, спиновое взаимодействие) [7]. В этом случае система четырех дифференциальных уравнений Дирака первого порядка с частными производными для компонент биспинора приводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка с постоянными коэффициентами. В остальных случаях, при наличии начального поперечного импульса электрона или при других поляризациях волны, система сводится к дифференциальным уравнениям четвертого или второго порядка с периодичными коэффициентами (типа Матье или Хилла). Следовательно, в общем случае не выяснена квантовая динамика нелинейного взаимодействия частицы с волной под углом при не слабых полях. А захват частицы волной или возникновение связанных состояний возможны лишь при нелинейном взаимодействии под углом. Отметим, что данная задача была решена в двух частных случаях: в рамках теории возмущений [8] и эйконального приближения [9], при полях, меньших вышеуказанного критического значения, когда отсутствуют явления отражения и захвата частицы волной. Изучению последнего в достаточно слабом поле волны посвящены работы [4-6], где выявлена зонная структура связанных состояний частицы, аналогичная зонной структуре энергетического спектра электронов в твердых телах [10].

Проявление квантовых эффектов в вынужденном черенковском процессе обусловлено возникновением потенциальной ямы в результате нелинейного взаимодействия и периодичностью волнового поля: частица, находящаяся в какой-либо потенциальной яме, как бы мала ни была вероятность туннелирования, чувствует влияние остальных бесчисленных ям, квантовое взаимодействие с которыми приводит к возникновению полос конечной ширины вместо дискретных уровней, т.е. к зонной структуре.

В отмеченных работах [4-6] квантовое изучение вынужденного черенковского процесса проведено на основе уравнений Клейна-Гордона и Дирака при очень малых значениях характеристического параметра связи частица–волна, но в случае, когда существенно нелинейное взаимодействие и поэтому имеет место явление отражения и захвата. Иное квантовое поведение должно проявляться в случае сильной связи, когда потенциальная яма, образовавшаяся вследствие нелинейного черенковского резонанса в поле сильной волны (лазерные пучки), может связать частицу на дне ямы. Изучению этого вопроса посвящена настоящая работа.

Рассмотрим квантовую динамику нелинейного резонансного взаимодействия заряженной частицы с сильным ЭМ полем излучения (когерентное лазерное излучение) в преломляющей среде в приближении сильной связи. При линейной или эллиптической поляризации волны релятивистское квантовое уравнение движения скалярной частицы (уравнение Клейна-Гордона) сводится к уравнению Хилла, а при круговой поляризации – к уравнению Матье. Как было отмечено выше, уравнение Дирака для спинорной частицы (электрона) в общем случае приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка для каждой компоненты биспинора. Только для волны с линейной поляризацией компоненты биспинора разделяются в уравнениях второго порядка – квадратурная форма уравнения Дирака. Последнее обстоятельство связано с пространственной симметрией полей, которое наглядно в системе покоя волны (в среде с показателем преломления $n(\omega) > 1$). В этой системе существует только статическое магнитное поле, по направлению которого проекция спина частицы может принимать определенное значение. В случае плазменной среды $(n(\omega) < 1)$ существует аксиальная симметрия поля в системе, которая движется со скоростью $v = cn$, где остается только однородное электрическое поле (периодичное по времени). Следовательно, в этом случае также существует определенное выделенное направление. Однако, как известно, излучение или поглощение фотонов свободным электроном в плазме запрещается законами сохранения, и система, движущаяся со скоростью $v = cn$, связана не с процессами излучения, а с процессом рождения электронно-позитронных пар [11] (система центра инерции рожденных частиц). Следовательно, разделение спиновых компонент в квадратурном уравнении Дирака при линейной поляризации волны имеет место как в диэлектрической, так и в плазменной средах, и в общем случае задача сводится к решению уравнения Хилла, а при определенных условиях – уравнения Матье. Очевидно, что при пренебрежении спинового взаимодействия квадрированное уравнение Дирака переходит в уравнение Клейна-Гордона. Следовательно, в тех случаях, когда спиновое взаимодействие не приводит к существенно новым эффектам и количественно можно им пренебречь по сравнению с зарядовым взаимодействием, квантовое уравнение движения релятивистского электрона в среде в поле произвольно поляризованной ЭМ волны представляет собой уравнение Хилла или Матье.

Для решения указанной проблемы в настоящей работе развито приближение, которое соответствует случаю сильной связи частицы с волновым полем. Получены волновая функция и энергетический спектр электрона (в системе покоя волны) в сильном поле при наличии среды. В отличие от случая слабой связи, когда проявляется зонная структура состояний электрона в волне, в случае сильной связи устанавливаются дискретные уровни, между которыми возможны резонансные радиационные переходы.

2. Волновая функция и энергетический спектр электрона в поле плоской монохроматической ЭМ волны в приближении сильной связи

Как уже было отмечено, квадрированное уравнение Дирака для электрона при пренебрежении спинового взаимодействия совпадает с уравнением Клейна-Гордона, которое в поле когерентной ЭМ волны, распространяющейся в среде, имеет следующий вид:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \left[c^2 \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \right)^2 + m^2 c^4 \right] \Psi, \tag{1}$$

где e – заряд, а m – масса электрона, $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ – оператор его обобщенного импульса, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t - nx/c)$ – вектор-потенциал плоской ЭМ волны, которая распространяется в среде с показателем преломления $n = n(\omega)$ по направлению OX. Векторный потенциал монохроматической волны с круговой поляризацией имеет вид

$$\mathbf{A} = \left\{ 0, A_0 \sin \omega \left(t - n\frac{x}{c} \right), A_0 \cos \omega \left(t - n\frac{x}{c} \right) \right\} . \tag{2}$$

Задачу удобно решать в системе покоя волны R (система R движется по отношению к лабораторной системе L со скоростью V = c/n). Легко заметить, что в этой системе существует только неоднородное магнитное поле $(E' \equiv 0, H' = H(\sqrt{n^2 - 1})/n)$, векторный потенциал которого, согласно (2), имеет следующий вид:

$$\mathbf{A}_R = \{ 0, A_0 \sin k'x', A_0 \cos k'x' \}; \quad k' = \frac{\omega}{c}\sqrt{n^2 - 1} . \tag{3}$$

От волновой функции частицы в системе R можно перейти к волновой функции в лабораторной системе посредством преобразования Лоренца

$$\Psi = \hat{S} \Psi_R , \tag{4}$$

где $\hat{S}$ – оператор преобразования.

Для волновой функции Ψ_R имеем следующее уравнение:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi_R}{\partial t'^2} = \left[c^2 \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A}_R(x') \right)^2 + m^2 c^4 \right] \Psi_R . \tag{5}$$

Из уравнения (5) видно, что t, y, z являются циклическими переменными, из чего следует, что собственные значения операторов $-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, $\hat{p}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}$, $\hat{p}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$, которыми являются энергия и проекции y, z обобщенного импульса, сохраняются. Следовательно, решение уравнения (5) можно искать в виде

$$\Psi_R(\mathbf{r}', t) = \Phi(x') \exp\left[\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_\perp \mathbf{r} - \frac{i}{\hbar} Et \right]. \tag{6}$$

Таким образом, для неизвестной функции $\Phi(x')$ уравнение (5) приводится к одномерному уравнению типа Шредингера:

$$\frac{d^2 \Phi}{dx'^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E_\parallel - \frac{e^2 A_0^2}{2mc^2} + \frac{eA_0 p_\perp}{mc} \cos k'x' \right] \Phi = 0, \tag{7}$$

где

$$E_{\parallel}=\frac{E^2-m^2c^4-p_{\perp}^2c^2}{2mc^2} \tag{8}$$

есть "продольная" энергия частицы. Вследствие существующей азимутальной симметрии по направлению распространения волны OX, без нарушения общности можно принять $p_y=0$ и энергию частицы разделить на две части – энергию "поперечного" и "продольного" движений (так как в системе R движение нерелятивистское).

Уравнение (7) является уравнением типа Матье, о котором говорилось во введении. В данной работе это уравнение решается в приближении сильной связи электрона с волной, когда удовлетворяется условие

$$E_{\parallel}<<\frac{2eA_0p_{\perp}}{mc}, \tag{9}$$

и связанные состояния электрона в бесчисленном множестве потенциальных ям в периодическом поле находятся в основном на дне этих ям. В этом случае каждую яму, описываемую функцией $\cos k'x'$, можно аппроксимировать гармоническим потенциалом (выражаясь классическим языком, рассматриваются колебания электрона малой амплитуды вокруг положения равновесия). В этом приближении имеем следующее уравнение:

$$\frac{d^2\Phi}{dx'^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E_{\parallel}-\frac{\xi^2}{2}mc^2+\xi cp_{\perp}-\frac{\xi cp_{\perp}}{2}k'^2x'^2\right]\Phi=0\,, \tag{10}$$

где $\xi=eA_0/mc^2$ – релятивистски инвариантный параметр интенсивности сильной ЭМ волны.

Уравнение (10) является аналогом уравнения, описывающего квантовую динамику одномерного гармонического осциллятора. Следовательно, пропуская математические детали, для волновой функции связанных состояний электрона получим следующее решение:

$$\Phi_s(x')=\frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}}\sqrt{\frac{d}{2^s s!}}\exp\left[-\frac{x'^2}{2d^2}\right]H_s\left(\frac{x'}{d}\right), \tag{11}$$

где $H_s(x)$ – многочлены Эрмита.

Соответствующие собственным функциям (11) собственные значения энергии, т.е. спектр "продольной" энергии, пробегают дискретный ряд

$$E_{\parallel s}=\frac{\xi^2}{2}mc^2-\xi cp_{\perp}+\hbar\Omega(s+\frac{1}{2}), \tag{12}$$

где

$$d=\sqrt{\frac{\hbar}{m\Omega}},\qquad \Omega=k'\sqrt{\xi\frac{cp_{\perp}}{m}}\,.$$

Связанные состояния частицы должны удовлетворять условию Блоха и вместо дискретных энергетических уровней появятся зоны. Таким образом, для того, чтобы учесть влияние бесконечных потенциальных ям на состояния частицы, воспользуемся описанием состояний сильно связанного электрона в кристалле. Волновая функция, аналогичная функции Блоха, в этом случае имеет вид

$$\Phi_{sk}(x') = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{ik\lambda' l}\Phi_s(x' - l\lambda'), \tag{13}$$

где k – квазиимпульс электрона, описывающий зонную структуру состояний. Зонная структура энергии описывается следующей формулой:

$$E_{\parallel sk} = \frac{\xi^2}{2}mc^2 - \xi cp_\perp + \hbar\Omega(s + \frac{1}{2}) + \frac{\Delta E_{sk}}{2}\cos k\lambda', \tag{14}$$

где

$$\Delta E_{sk} = (-1)^s \frac{2\hbar^2}{m}\Phi_s\left(\frac{\lambda'}{2}\right)\Phi'_s\left(\frac{\lambda'}{2}\right) \tag{15}$$

есть ширина s-го уровня.

Условие применимости приближения (9), выраженное с помощью параметров лабораторной системы L, будет иметь следующий вид:

$$\frac{4mc^3 p_\perp \xi}{\hbar^2\omega^2(n^2-1)} >> 1. \tag{16}$$

Это условие обратно пропорционально условию, принятому в работе [5], где рассмотрен предел слабого поля для выяснения зонной структуры состояний частицы. Вместе с условием (16) мы можем также потребовать

$$d << \lambda', \tag{17}$$

что означает сильную локализацию частицы и пренебрежительно слабое воздействие остальных потенциальных ям на состояние частицы в данной яме. Принимая во внимание формулы (6),(13) и (14), для волновой функции электрона в системе R получим

$$\Psi_R(\mathbf{r}', t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}_\perp\mathbf{r}' - \frac{i}{\hbar}E(p_z, s, k)t\right]\sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{ik\lambda' l}\Phi_s(x' - l\lambda'), \tag{18}$$

где

$$E(p_z, s, k) = mc^2 + \frac{p_\perp^2}{2m} + \frac{\xi^2}{2}mc^2 - \xi cp_\perp + \hbar\Omega(s + \frac{1}{2}) + \frac{\Delta E_{sk}}{2}\cos k\lambda'. \tag{19}$$

Приведем численные оценки для ширины уровня $s = 0$ и энергии перехода $\hbar\Omega$. В газовой среде с типичными для черенковского процесса значениями показателя преломления $n - 1 \sim 10^{-4}$ имеем следующие значения параметров: при лазере на неодимовом стекле с энергией фотона $\hbar\omega = 1{,}17$ эВ, с интенсивностью $\sim 10^{12}$ Вт/см^2 ($\xi \sim 10^{-3}$) и поперечной энергии электрона $cp_\perp \sim 10^{-1}mc^2$ получаем $\hbar\Omega \sim 10^{-4}$ эВ, что в лабораторной системе L составляет порядка $\sim 10^{-2}$ эВ. При этом $\lambda'/d \sim 10^3$, т.е. ширина $s=0$ энергетического уровня $\Delta E_{0k} \sim \exp(-\lambda'^2/d^2)$ – пренебрежимо малая величина. Это означает, что с большой точностью (вплоть до $s = 10^3$ уровня, в том случае, когда потенциальная яма содержит $\sim 10^7$ уровней) мы имеем дискретные уровни.

В заключение хочу выразить благодарность проф. Г.К.Аветисяну за постановку задачи и содействие при ее решении.

Работа сделана в рамках научного гранта NFSAT PH-02 082.

ЛИТЕРАТУРА

1. **В.М.Арутюнян, Г.К.Аветисян**. Квантовая электроника, **1**, 54 (1972); ЖЭТФ, **62**, 1639 (1972).
2. **Г.К.Аветисян**. УФН, **167**, 793 (1997).
3. **V.M.Haroutunian, H.K.Avetissian**. Phys. Lett., **44A**, 281 (1973).
4. **Г.К.Аветисян и др.** ЖЭТФ, **113**, 43 (1998).
5. **H.K.Avetissian et al.** Phys. Lett., **244A**, 25 (1998).
6. **H.K.Avetissian et al.** Phys. Lett., **245A**, 16 (1998).
7. **С.Г.Оганесян, Г.К.Аветисян**. Изв. АН Арм. ССР, Физика, **8**, 395 (1973).
8. **H.K.Avetissian**. Phys. Lett., **63A**, 7 (1977).
9. **H.K.Avetissian**. Phys. Lett., **58A**, 144 (1976).
10. **Дж.Займан**. Основы теории твердого тела. М., Мир, 1974.
11. **Г.К.Аветисян и др.** ЖЭТФ, **94**, 21 (1988).

ԼԻՑՔԱՎՈՐՎԱԾ ՄԱՍՆԻԿԻ ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ԴԻՆԱՄԻԿԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ՏԱՐԱԾՎՈՂ ՀԱՐԹ ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԱԼԻՔԻ ԴԱՇՏՈՒՄ ՈՒԺԵՂ ԿԱՊԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ս.Ս. ԻՍՐԱԵԼՅԱՆ

Ռելյատիվիստական քվանտային տեսության շրջանակներում ուսումնասիրված է լիցքավորված մասնիկի ոչ-գծային փոխազդեցությունը կոհերենտ էլեկտրամագնիսական ալիքի հետ դիէլեկտրական միջավայրում, «ալիք-մասնիկ» ուժեղ կապի դեպքում: Ցույց է տրված, որ ի տարբերություն թույլ կապի դեպքի, երբ ալիքում կապված մասնիկի վիճակները ունեն զոնային կառուցվածք, ուժեղ կապի դեպքում վիճակների սպեկտրը դիսկրետ է, և նրանց մեջ հնարավոր են ռեզոնանսային ճառագայթային անցումներ:

QUANTUM DYNAMICS OF A CHARGED PARTICLE IN THE FIELD OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE IN A MEDIUM AT THE STRONG BOND

S.S. ISRAELYAN

In the scope of relativistic quantum theory the nonlinear interaction of a charged particle with a coherent electromagnetic wave in a dielectric medium at the strong bond of the «particle-wave» is considered. It is shown that, in contrast to the case of the weak bond of the «particle-wave» when the band structure of the particle's bound states in the wave takes place, the spectrum at the strong bond has a discrete character and resonant radiative transitions between these states are possible.