

УДК 621.384

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА НА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ РАЗБРОС ЭЛЕКТРОНОВ В СГУСТКЕ

Д.К. КАЛАНТАРЯН

Центр синхротронного излучения CANDLE,

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 2 февраля 2005 г.)

Показано, что поперечные электрические поля приводят к дополнительному изменению энергии частицы в сгустке. Во время бетатронных колебаний поперечное электрическое поле совершает работу на частицу, поскольку скорость частицы имеет поперечную компоненту. Найдена формула, с помощью которой можно оценить вклад этого эффекта в общий среднеквадратичный энергетический разброс для ускорителя с произвольной структурой. Дана оценка для накопителя CANDLE.

1. Введение

Развитие современных источников синхротронного излучения с высокой светимостью фотонных пучков требует, наряду с увеличением плотности частиц в электронном сгустке, малого энергетического разброса частиц в сгустке. Это необходимо как для увеличения времени жизни пучка, так и для предотвращения синхро-бетатронных неустойчивостей сгустка в процессе накопления [1].

Как известно [2], пространственный заряд сгустка заряженных частиц, движущегося в циклических ускорителях, обуславливает наличие поперечной компоненты электрического поля, действующей на частицы сгустка. В то же время, частицы сгустка совершают поперечные бетатронные колебания за счет внешнего фокусирующего поля. Таким образом, наряду с взаимодействием частиц сгустка с основным ускоряющим полем высокочастотных резонаторов кольца, частицы сгустка получают дополнительное приращение энергии за счет наличия поперечного электрического поля пространственного заряда и поперечной компоненты импульса частицы.

В настоящей работе исследовано смещение энергии произвольной частицы в сгустке из-за пространственного заряда и поперечных бетатронных колебаний в кольце и найдена величина дополнительного среднеквадратичного разброса энергии частиц в сгустке. Получено аналитическое выражение для относительного энергетического разброса частиц, которое опреде-

ляется магнитооптической системой ускорителя, плотностью частиц в сгустке и равновесной энергией частиц.

2. Зависимость энергии от бета-функции

Рассмотрим движение частицы в кольце в отсутствие связи горизонтальных и вертикальных колебаний. Уравнения движения частицы в горизонтальном x и вертикальном y направлениях с учетом продольного ускоряющего электрического поля E_s и потерь энергии на единицу длины на излучение $J(s)$, ведущего магнитного поля B_y и сил пространственного заряда, в линейном приближении имеют вид [3]

$$x'' = - \left(h_x^2(s) + g(s) - \frac{k}{a \cdot \gamma^3} \right) \cdot x, \quad (1)$$

$$y'' = \left(g(s) + \frac{k}{b \cdot \gamma^3} \right) \cdot y, \quad (2)$$

а изменение энергии частицы равно разности работы сил электрических полей и излученной энергии

$$E' = eE_s + K \cdot \left(\frac{x \cdot x'}{a} + \frac{y \cdot y'}{b} \right) - J(s). \quad (3)$$

В уравнениях (1) – (3) E_s есть продольное электрическое поле, действующее на частицу, x и y есть горизонтальное и вертикальное отклонения частицы от равновесной орбиты, соответственно, $h_x(s) = 1/\rho(s)$ – кривизна идеальной орбиты, $\rho(s)$ – радиус поворота в дипольных магнитах, $g(s) = (B\rho)^{-1} \partial B / \partial x$ – фокусирующая сила квадрупольных линз, γ – Лоренц-фактор равновесной частицы, $K = E_e k$, $E_e = 0.511$ МэВ – энергия покоя электрона. Величина k обусловлена силами пространственного заряда [2] однородного сгустка с полюсами a и b , длины l_b и числом частиц в сгустке N_b :

$$k = \frac{4N_b r_c}{l_b(a+b)}, \quad (4)$$

где r_c – классический радиус электрона. Потери энергии частицы на единицу длины на синхротронное излучение $J(s)$ задаются выражением [4]

$$J[\text{кэВ/м}] = \frac{88.5}{2\pi} \cdot h_x^2[\text{м}^{-1}] \cdot E^4[\text{ГэВ}], \quad (5)$$

Уравнения (1) и (2) имеют одинаковый вид, и их решения можно представить в следующем виде [5]:

$$z(s) = A_z \sqrt{\beta_z(s)} \cdot \cos(\Phi_z(s) - \delta_z), \quad (6)$$

$$z'(s) = - \frac{A_z}{\sqrt{\beta_z(s)}} \cdot \{ \sin(\Phi_z(s) - \delta_z) + \alpha(s) \cdot \cos(\Phi_z(s) - \delta_z) \}, \quad (7)$$

где под z подразумеваются координаты x или y . В уравнениях (6) и (7) β_z ,

$\alpha_z = -\beta'_z/2$ есть параметры Твиса магнитной системы [5], A_z и δ_z — произвольные постоянные, определяющие начальные амплитуду и фазу частицы, а набег фазы бетатронных колебаний $\Phi_z(s)$ определяется соотношением

$$\Phi_z(s) = \int_{s_0}^s \frac{du}{\beta_z(u)}. \quad (8)$$

Заметим, что параметры A_z и δ_z связаны с начальными координатами частицы (z_0, z'_0) следующими соотношениями:

$$A_z^2 = \frac{z_0^2 + (\beta_{z0} z'_0 + \alpha_{z0} z_0)^2}{\beta_{z0}}, \quad \tan \delta_z = \frac{\beta_{z0} z'_0 + \alpha_{z0} z_0}{z_0}. \quad (9)$$

Согласно (3), выражение для энергии частицы с учетом внешнего ускоряющего поля, излучения и сил пространственного заряда примет вид

$$E = E_0 + \int_{s_0}^s [eE_s(u) - J(u)] \cdot du + \frac{K}{a} \cdot I_x + \frac{K}{b} \cdot I_y, \quad (10)$$

где E_0 — равновесная энергия частиц, $I_x = \int_{s_0}^s x(u) \cdot x'(u) \cdot du$, $I_y = \int_{s_0}^s y(u) \cdot y'(u) \cdot du$. Используя уравнения (6), вычислим I_x и I_y .

$$I_x = \frac{A_x^2}{2} \cdot [\beta_x(s) \cdot \cos^2(\Phi_x(s) - \delta_x) - \beta_{x0} \cdot \cos^2(\delta_x)],$$

$$I_y = \frac{A_y^2}{2} \cdot [\beta_y(s) \cdot \cos^2(\Phi_y(s) - \delta_y) - \beta_{y0} \cdot \cos^2(\delta_y)]. \quad (11)$$

Таким образом, для смещения энергии частицы $\Delta E = E - E_0$ получим

$$\Delta E = \Delta U + \frac{KA_x^2}{2a} \cdot [\beta_x(s) \cdot \cos^2(\Phi_x(s) - \delta_x) - \beta_{x0} \cdot \cos^2(\delta_x)] +$$

$$+ \frac{KA_y^2}{2b} \cdot [\beta_y(s) \cdot \cos^2(\Phi_y(s) - \delta_y) - \beta_{y0} \cdot \cos^2(\delta_y)]. \quad (12)$$

Предположим, что E_s за один оборот полностью компенсирует потери энергии частицы на излучение, так что $\Delta U = \int_{s_0}^{s+L} [eE_s(u) - J(u)] \cdot du = 0$. Тогда изменение энергии за оборот примет вид (вместо s_0 подставляем s , а вместо $s - s + L$; где L — длина орбиты ускорителя):

$$\Delta E = \frac{KA_x^2}{2a} \cdot [\beta_x(s+L) \cdot \cos^2(\Phi_x - \delta_x) - \beta_x(s) \cdot \cos^2(\delta_x)] +$$

$$+ \frac{KA_y^2}{2b} \cdot [\beta_y(s+L) \cdot \cos^2(\Phi_y - \delta_y) - \beta_y(s) \cdot \cos^2(\delta_y)]. \quad (13)$$

Так как $\beta_{x,L}$ — периодическая функция, $\beta_z(s+L) = \beta_z(s)$, а набег фазы за оборот $\Phi_z = \int (du / \beta_z(u)) = 2\pi\nu_z$ определяется частотой бетатронных колебаний ν_z , то окончательно имеем

$$\Delta E = -\frac{KA_x^2 \beta_x(s)}{2a} \sin(2\pi\nu_x) \cdot \sin(2\pi\nu_x - 2\delta_x) - \frac{KA_y^2 \beta_y(s)}{2b} \sin(2\pi\nu_y) \cdot \sin(2\pi\nu_y - 2\delta_y). \quad (14)$$

За N оборотов в кольце будем иметь

$$\Delta E = -\frac{KA_x^2\beta_x(s)}{2a}\sin(2\pi N\nu_x)\cdot\sin(2\pi N\nu_x-2\delta_x)-\frac{KA_y^2\beta_y(s)}{2b}\sin(2\pi N\nu_y)\cdot\sin(2\pi N\nu_y-2\delta_y). \quad (15)$$

Чтобы найти среднеквадратичный разброс по энергии, рассмотрим квадрат смещения энергии частицы

$$\begin{aligned} \Delta E^2 = & \frac{K^2 A_x^4 \beta_x^2(s)}{4a^2} \sin^2(2\pi N\nu_x) \cdot \sin^2(2\pi N\nu_x - 2\delta_x) + \\ & + \frac{K^2 A_y^4 \beta_y^2(s)}{4b^2} \sin^2(2\pi N\nu_y) \cdot \sin^2(2\pi N\nu_y - 2\delta_y) + \text{перекрестные члены.} \end{aligned} \quad (16)$$

Среднеквадратичный разброс энергии частиц в сгустке получим, усреднив выражение (16) по всем начальным параметрам частиц и числу оборотов:

$$\sigma_E^2 = \langle \Delta E^2 \rangle_{A_{x,y}, \delta_{x,y}, N}. \quad (17)$$

Средний вклад перекрестных членов по начальным амплитудам A_z и фазам δ_z равен нулю, поскольку начальные положения частиц на фазовой плоскости не скоррелированы. Далее учтем, что (рис.1)

$$\langle A_z^4 \rangle = \int_0^{A_{z\max}} A_z^4 \cdot dn(A_z) = \frac{2}{A_{z\max}^2} \int_0^{A_{z\max}} A_z^5 \cdot dA_z = \frac{\varepsilon_z^2}{3}, \quad (18)$$

где $dn(A_z) = A_z \cdot dA_z / \pi A_{z\max}^2$, а $\varepsilon_z = A_{z\max}^2$ есть эмиттанс пучка.

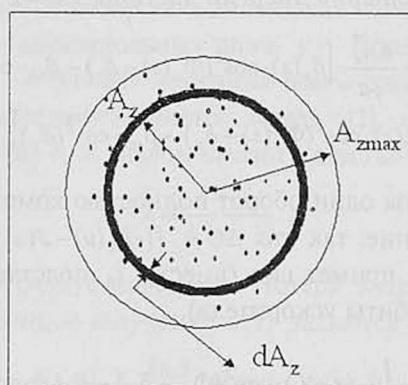


Рис.1. Схематическое изображение распределения частиц в фазовой плоскости.

Таким образом, среднеквадратичное смещение энергии частиц за N оборотов примет вид

$$\langle \Delta E^2 \rangle_{A_{x,y}, \delta_{x,y}} = \frac{K^2 \varepsilon_x^2 \beta_x^2(s)}{24a^2} \sin^2(2\pi N\nu_x) + \frac{K^2 \varepsilon_y^2 \beta_y^2(s)}{24b^2} \sin^2(2\pi N\nu_y). \quad (19)$$

Усредняя за большое число оборотов, получим

$$\langle \Delta E^2 \rangle_{A_{x,y}, \delta_{x,y}} = \frac{K^2 \varepsilon_x^2 \beta_x^2(s)}{48a^2} + \frac{K^2 \varepsilon_y^2 \beta_y^2(s)}{48b^2}. \quad (20)$$

Учитывая, что $K = \frac{4E_p N_b r_c}{l_b(a+b)}$, для дополнительного относительного разброса энергии частиц в сгустке σ_ϵ / E_0 , обусловленного пространственным зарядом, получим

$$\frac{\sigma_\epsilon}{E_0} = \frac{N_b r_c}{\sqrt{3} l_b (a+b) \gamma} \left(\frac{\varepsilon_x^2 \beta_x^2(s)}{a^2} + \frac{\varepsilon_y^2 \beta_y^2(s)}{b^2} \right)^{1/2}, \quad (21)$$

где полуоси эллипса определяются средним значением бетатронной функции $\bar{\beta}$ в кольце, $a^2 = \varepsilon_x \bar{\beta}_x$, $b^2 = \varepsilon_y \bar{\beta}_y$.

Как видно из (14), дополнительный энергетический разброс в сгустке за счет пространственного заряда существенно зависит от плотности заряда, энергии частиц, структуры магнитного поля и среднеквадратичных размеров пучка.

Для кольца с ФОДО магнитной структурой периодичности среднее значение бетатронной функции есть

$$\bar{\beta} = \frac{L_p}{|\sin \mu|}, \quad (22)$$

где μ – набег фазы за период, а L_p – длина периода магнитной системы кольца. Для таких структур формула (21) преобразуется к виду

$$\frac{\sigma_\epsilon}{E_0} = \frac{N_b r_c}{l_b \sqrt{3} L_p (a+b) \gamma} \left(\varepsilon_x \beta_x(s) \cdot |\sin \mu_x| + \varepsilon_y \beta_y(s) \cdot |\sin \mu_y| \right)^{1/2}. \quad (23)$$

Для круглого в поперечном сечении пучка $a=b$, $\varepsilon_x \beta_x = \varepsilon_y \beta_y$, и формула (21) упрощается:

$$\frac{\sigma_\epsilon}{E_0} = \frac{N_b r_c}{\sqrt{6} l_b \gamma}. \quad (24)$$

Для современных источников синхротронного излучения вертикальный размер пучка намного меньше его горизонтального размера, и среднеквадратичное смещение приближенно задается выражением

$$\frac{\sigma_\epsilon}{E_0} = \frac{N_b r_c \beta_x(s)}{\sqrt{3} l_b \gamma \bar{\beta}}. \quad (25)$$

Для накопительного кольца CANDLE [6] с энергией электронов 3 GeV, горизонтальным и вертикальным эмиттантами $\varepsilon_x = 8.4$ нм, $\varepsilon_y = 0.084$ нм, длиной сгустка $l_b = 6$ мм, числом частиц в сгустке $5.6 \cdot 10^9$, $\beta_{x\max} / \bar{\beta} \sim 1.5$, частицы сгустка будут иметь дополнительный энергетический разброс порядка $\sigma_\epsilon / E_0 \approx 0.5 \cdot 10^{-6}$. Заметим, что поскольку энергетический разброс в накопи-

тельном кольце CANDLE, обусловленный синхротронными колебаниями, составляет порядка 0.1%, то этот эффект пренебрежимо мал и не влияет на устойчивость синхротронных колебаний частиц.

3. Заключение

В работе рассмотрен дополнительный энергетический разброс, связанный с бетатронными колебаниями частиц и пространственным зарядом сгустка в ускорителях. Получена аналитическая формула для произвольной структуры магнитного поля. Дана оценка для накопителя CANDLE и показано, что эффект не влияет на стабильность синхротронных колебаний частиц в кольце.

Автор выражает благодарность Э.Д.Газазяну, В.М.Цаканову, Ю.Л.Мартirosяну и Г.А.Аматуни за постоянный интерес к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. H.Wiedemann. "Storage Ring Design as a Synchrotron Light Source", School on Synchrotron Radiation, 2000, Trieste, Italy.
2. I.Borchardt, E.Karantzoulis, H.Mais, G.Ripken. "Calculation of Transverse and Longitudinal Space Charge Effects within the Framework of the Fully Six-Dimensional Formalism". DESY 88-013, February. 1988.
3. Д.К.Калантарян, Ю.Л.Мартirosян. Изв. НАН Армении, Физика, 39, 293 (2004).
4. M.Sands. The Physics of Electron Storage Rings, an Introduction. SLAC-121, UC-28 (ACC), 1970.
5. J.Rossbach, P.Schmuser. "Basic Course on Accelerator Optics". Internal Report DESY M-93-02, February 1993.
6. CANDLE – Conceptual Design Report. ASLS R-02-001, Yerevan, 2002.

ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ԼԻՑԻԱ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԹԱՆՁՐՈՒԿՈՒՄ
ԷԼԵԿՏՐՈՆՆԵՐԻ ԷՆԵՐԳԻԱԿԱՆ ՑՐՎԱԾՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Դ.Զ. ԶԱԼԱՆԹԱՐՅԱՆ

Լայնական էլեկտրական դաշտերի առկայությունը բերում է մասնիկի էներգիայի լրացուցիչ փոփոխության, որը տեղի է ունենում բետատրոն տատանումների ժամանակ լայնական էլեկտրական դաշտի մասնիկի վրա կատարած աշխատանքի հաշվին: Դիտարկված է նշված երևույթի հետևանքով մասնիկի էներգիայի փոփոխության չափը և ստացված է բանաձև, որը օգտագործելով, կարելի է գնահատել ցանկացած արագացուցիչում նշված երևույթի հետևանքով առաջացած միջին քառակուսային էներգիական շեղումը: Տրված է գնահատական CANDLE կուտակիչ օղակի համար:

SPACE-CHARGE INFLUENCE ON THE ENERGY SPREAD OF ELECTRONS IN A BUNCH

D.K. KALANTARYAN

The presence of transverse electric field during betatron oscillations leads to additional energy changes due to transverse field action on the particle. The description of the energy changes due to the space charge caused by the transverse electric field action on the particle is presented. A formula for the r.m.s. energy spread in accelerators is derived. The numerical results for the CANDLE storage ring are given.