Известия НАН Армении, Физика, т.40, №2, с.109-114 (2005)

УДК 537.9

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ТОРОИДАЛЬНОМ РЕЗОНАТОРЕ

Т.А. АРУТЮНЯН

Ереванский государственный университет

(Поступила в редакцию 20 августа 2004 г.)

Рассмотрена проблема собственных частот в тороидальном резонаторе. Проведено численное решение волнового уравнения с помощью пакета FEMLAB, в результате которого получены собственные частоты тороидального резонатора. Сравнение значений этих частот с частотами, полученными методом последовательных приближений, показывает хорошее соответствие результатов обоих методов.

1. Введение

Тороидальные резонаторы представляют интерес в электротехнике, в физике заряженных частиц и в ускорительной физике. Интересно также, что тороидальный резонатор является макетом системы "токомак". Проблема собственных значений и собственных функций тороидального резонатора не имеет точного аналитического решения. Применялись разные приближенные методы. В частности, в [1] задача решалась в тороидальной системе координат [2], где частичное разделение переменных в уравнении Гельмгольца осуществлялось внесением в тороид неоднородной диэлектрической среды, обладающей тороидальной симметрией. Далее, используя равномерный коротковолновый асимптотический метод, изложенный в [3], было получено выражение для собственных частот в приближении больших торов. В [4] задача решена методом последовательных приближений (МПП), основанным на теории возмущений в квазисферической системе координат (r, ϑ, φ), связанной с декартовыми координатами соотношениями

$$x = R(1-\rho_0\cos\vartheta)\cos\varphi,\ \ y = R(1-\rho_0\cos\vartheta)\sin\varphi,\ \ z = R\rho_0\sin\vartheta,$$
$$(0\le r\le R,\ 0\le\vartheta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi).$$

В приближении больших торов получается приближенное выражение для собственных частот:

$$f_{0nm} = \frac{c}{2\pi r_0}\sqrt{\chi_{0n}^2 + (m^2+0.75)\rho_0^2}\,, \tag{1}$$

где c – скорость света, $\rho_0 = r_0/R$, r_0 – радиус поперечного сечения, а R – большой радиус тора, χ_{0n} – n-й корень функций Бесселя, m – азимутальное число, n – радиальное число, а первый индекс соответствует числу полуволн, укладывающихся в окружности в поперечном сечении тороида.

Наконец, в [5,6] показано, что в волновом уравнении одна переменная сразу разделяется, а для остальных двух переменных получается дифференциальное уравнение второго порядка, решая которое, можно получить значение собственных частот без всякого приближения.

2. Собственные электромагнитные колебания в тороидальном резонаторе

В настоящем методе используется квазисферическая система координат (r, ϑ, φ) для нахождения точного решения электромагнитных колебаний в тороидальном резонаторе. Представим электромагнитное поле $\mathbf{E}, \mathbf{H}(r, \vartheta, \varphi)$ в виде [5]

$$\mathbf{E}, \mathbf{H}(r, \vartheta, \varphi) = \mathbf{E}(r, \vartheta), \mathbf{H}(r, \vartheta) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix}, \tag{2}$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$ Подставляя эти выражения в уравнение Максвелла, можно показать, что в тороидальном резонаторе существуют волны E- и H-типов. Продольная компонента поля $E_\varphi(r, \vartheta)$ удовлетворяет двумерному уравнению

$$\frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1 - 2\rho_0 \cos\vartheta}{r\, h} \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\sin\vartheta}{rR(1 - 2\rho_0 \cos\vartheta)} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \vartheta} + \left(k^2 - \frac{m^2}{R^2 h^2}\right) E_\varphi = 0, \tag{3}$$

где $h = 1 - \rho_0 \cos\vartheta$, $k = 2\pi f/c$ – собственные волновые числа, f – собственные частоты тороида. Такое же уравнение получается для $H_\varphi(r, \vartheta)$. Решая это уравнение, можно определить собственные электромагнитные колебания для E-типов волн в тороидальном резонаторе:

$$E_r = -\frac{iRm \operatorname{tg} m\varphi}{(khR)^2 - m^2 \operatorname{tg}^2 m\varphi} \frac{\partial}{\partial r}\left[h E_\varphi\right], \qquad H_r = -\frac{ikhR^2}{(khR)^2 - m^2 \operatorname{tg}^2 m\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left[h E_\varphi\right],$$

$$E_\vartheta = -\frac{imR \operatorname{tg} m\varphi}{(khR)^2 - m^2 \operatorname{tg}^2 m\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left[h E_\varphi\right], \quad H_\vartheta = -\frac{ikhR^2}{(khR)^2 - m^2 \operatorname{tg}^2 m\varphi} \frac{\partial}{\partial r}\left[h E_\varphi\right], \tag{4}$$

$$E_\varphi(r, \vartheta, \varphi) = E_\varphi(r, \vartheta) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix}, \qquad H_\varphi = 0$$

с граничными условиями $E_\varphi(r, \vartheta, \varphi)\big|_{r=r_0} = 0$. Выражения для волн H-типа можно получить, сделав подстановки $\mathbf{E} \to \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \to -\mathbf{E}$ и воспользовавшись граничными условиями $\partial H_\varphi(r, \vartheta, \varphi)/\partial n\big|_{r=r_0} = 0$.

3. Метод FEMLAB и сравнение с методом МПП

Для нахождения собственных частот тороидального резонатора используем пакет FEMLAB, который численно решает уравнение в частных производных методом конечных элементов. Для этого тороидальный резонатор представим как фигуру вращения на расстоянии R вокруг оси OZ в цилиндрической системе координат (r, φ, z). В FEMLAB-е волновое уравнение для компоненты поля $E_\varphi(r, \varphi, z)$ имеет следующий вид:

$$\nabla \times (-c \nabla u - \alpha u + \gamma) + au + \beta \times \nabla u = d_\alpha \lambda u, \tag{5}$$

где $u(r, \varphi, z) = \dfrac{E_\varphi(r, \varphi, z)}{r}$, $\quad \nabla = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$.

Предполагая $E_\varphi(r, \varphi, z) = E_\varphi(r, z) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix}$ и подставляя $c = r$, $a = m^2 / r$, $\beta = \gamma = 0$, $\alpha = 2$, $d_\alpha = r$, получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{\partial u}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) ru = 0, \tag{6}$$

которое соответствует уравнению (3) в квазисферической системе координат. Решая это уравнение для волн E-типа, можно получить также значения полей H_r, H_z. Вычисления проводились для тороида с $R = 1$ м, $r_0 = 0.1$ м и $r_0 = 0.01$ м.

Ниже приведены значения собственных частот, полученные численно методом конечных элементов (f_{0nm}^{FEM}) для нескольких значений n и m (см. таблицы 1,2 и рис.1). Сравнение полученных для собственных частот значений со значениями, полученными МПП ($f_{0nm}^{МПП}$), показывает хорошее соответствие друг с другом, что потдверждает достаточную строгость полученных асимптотических оценок для достаточно больших торов.

Табл.1. Собственные частоты f_{01m} и f_{02m} тороида с $R = 1$ м и $r_0 = 0.1$ м, полученные методами конечных элементов (FEM) и последовательных приближений (МПП).

m	f_{01m}^{FEM} (GHz)	$f_{01m}^{МПП}$ (GHz)	m	f_{02m}^{FEM} (GHz)	$f_{02m}^{МПП}$ (GHz)
0	1.1482	1.1527	0	2.6343	2.6388
1	1.1492	1.1537	1	2.6346	2.6393
2	1.1521	1.1567	2	2.6359	2.6406
3	1.1571	1.1616	3	2.6381	2.6428
4	1.1630	1.1685	4	2.6411	2.6461
5	1.1728	1.1772	5	2.6440	2.6497
6	1.1834	1.1879	6	2.6497	2.6544

Вычислим частоты f_{11m}, используя следующую формулу [4]:

$$f_{11m} = \frac{c}{2\pi r_0} \sqrt{\chi_{11}^2 + (0.75 + m^2)\rho_0^2 + \left[\frac{0.75 + m^2}{2} \left(1 \pm \frac{\delta_{1n}}{2} \right) + \frac{4m^2}{\chi_{11}^2} \right] \rho_0^4}, \tag{7}$$

где δ_{1n} – символ Кронекера.

Табл.2. Собственные частоты f_{01m} и f_{02m} тороида с $R = 1$ м и $r_0 = 0.01$ м, полученные методами конечных элементов (FEM) и последовательных приближений (МПП).

m	f_{01m}^{FEM} (GHz)	$f_{01m}^{МПП}$ (GHz)	m	f_{02m}^{FEM} (GHz)	$f_{02m}^{МПП}$ (GHz)
0	11.4743	11.5199	0	26.3383	26.3856
1	11.4744	11.5207	1	26.3384	26.3857
2	11.4747	11.5203	2	26.3385	26.3858
3	11.4752	11.5208	3	26.3387	26.3860
4	11.4759	11.5215	4	26.3390	26.3863
5	11.4768	11.5224	5	26.3394	26.3867
6	11.4779	11.5234	6	26.3399	26.3872

В методе МПП, если ограничиться приближением до ρ_0^4, обнаруживается эффект снятия вырождения кривизной тора [4]. На алгоритме FEMLAB эти же результаты получаются автоматически (см. табл.3 и рис.2). Однако здесь становится затруднительным объяснить эффект снятия вырождения, обусловленный кривизной тора.

Табл.3. Собственные частоты f_{11m} тороида с $R = 1$ м, $r_0 = 0.1$ м и $r_0 = 0.01$м, полученные методами конечных элементов (FEM) и последовательных приближений (МПП).

m ($r_0 = 0.1$)	f_{11m}^{FEM} (GHz)	$f_{11m}^{МПП}$ (GHz)	m ($r_0 = 0.01$)	f_{11m}^{FEM} (GHz)	$f_{11m}^{МПП}$ (GHz)
0 +	1.8287	1.8300	0 +	18.2825	18.2951
–	1.8287	1.8300	–	18.2825	18.2951
1 +	1.8293	1.8306	1 +	18.2825	18.2952
–	1.8293	1.8306	–	18.2825	18.2952
2 +	1.8312	1.8325	2 +	18.2827	18.2954
–	1.8312	1.8325	–	18.2827	18.2954
3 +	1.8343	1.8356	3 +	18.2830	18.2957
–	1.8343	1.8356	–	18.2830	18.2957
4 +	1.8387	1.8400	4 +	18.2834	18.2961
–	1.8387	1.8400	–	18.2835	18.2961
5 +	1.8442	1.8456	5 +	18.2840	18.2967
–	1.8443	1.8456	–	18.2840	18.2967
6 +	1.8510	1.8524	6 +	18.2847	18.2974
–	1.8511	1.8524	–	18.2847	18.2974

4. Заключение

Сравнение результатов, полученных методами МПП и FEMLAB, который позволяет определить собственные частоты тороидального резонатора численно, показывает, с одной стороны, что МПП достаточно точен, а с другой стороны, сопоставление двух методов позволяет судить об устойчивости получаемых решений и позволяет надеяться на существование строгого численного метода расчета, основанного на алгоритмах MATLAB и FEMLAB.

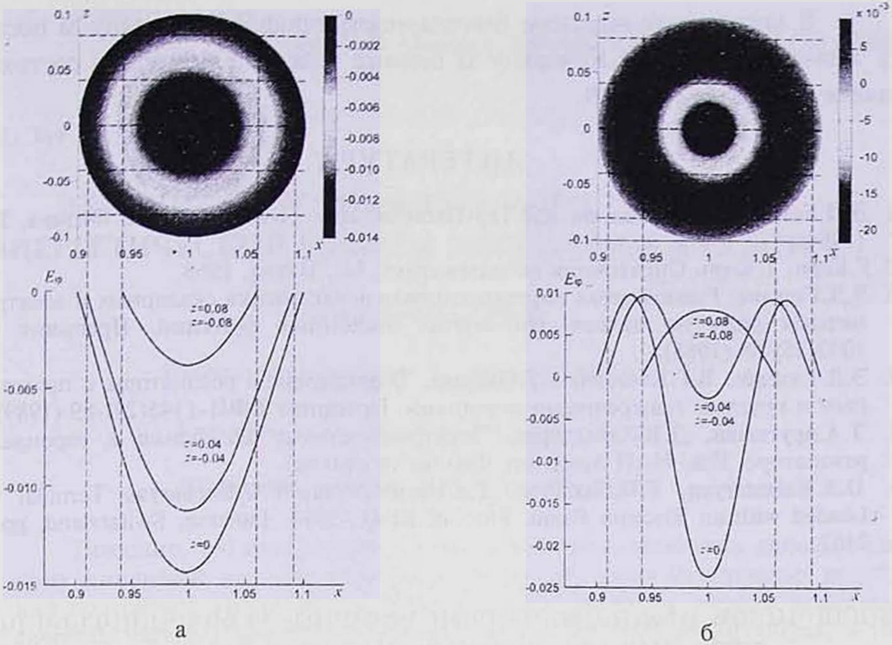

Рис.1. Распределение компоненты поля E_φ в плоскости XOZ и зависимость E_φ от координат в сечениях $z = 0, \pm 0.04, \pm 0.08$ для тороида с $R = 1$м и $r_0 = 0.1$м для частот а) f_{010}, б) f_{020}.

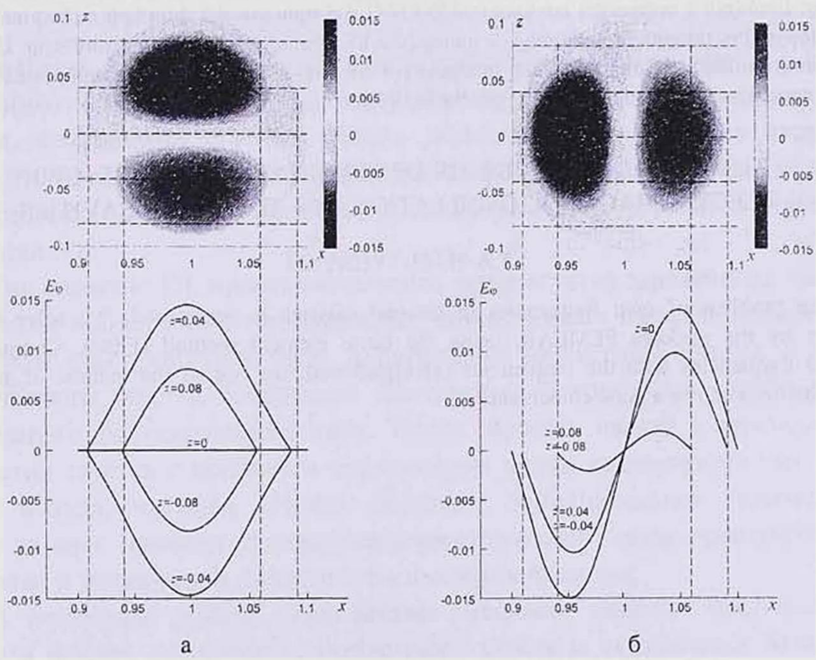

Рис.2. Распределение компоненты поля E_φ в плоскости XOZ и зависимость E_φ от координат в сечениях $z = 0, \pm 0.04, \pm 0.08$ для тороида с $R = 1$м и $r_0 = 0.1$м для частот а) f^-_{110}, б) f^+_{110}.

В заключение выражаю благодарность проф.Э.Д.Газазяну за постановку задачи, а также В.Г.Кочаряну за ценные советы и помощь в составлении пакета программ FEMLAB.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Э.Д.Газазян, М.И.Иванян, А.Д.Тер-Погосян**. Изв. НАН Армении, Физика, **29**, 141 (1994).
2. **Г.Корн, Т.Корн.** Справочник по математике. М., Наука, 1968.
3. **Э.Д.Газазян.** Равномерная коротковолновая асимптотика скалярных и электромагнитных волн на основе одномерных эталонных функций. Препринт ЕФИ-1092(55)-88 (1988).
4. **Э.Д.Газазян, В.Г.Кочарян, Г.Г.Оксузян.** Тороидальные резонаторы с прямоугольным и круглым поперечными сечениями. Препринт ЕФИ-1145(22)-89 (1989).
5. **Т.А.Арутюнян, Д.К.Калантарян.** Электромагнитные колебания в тороидальном резонаторе. Изв. НАН Армении, Физика (в печати).
6. **D.K.Kalantaryan, E.D.Gazazyan, T.A.Harutyunyan, V.G.Kocharyan** Toroidal Cavity Loaded with an Electron Beam. Proc. of EPAC-2004, Lucerne, Switzerland, pp.2460-2462.

ՏՈՐՈԻԴԱՅԻՆ ՌԵԶՈՆԱՏՈՐՆԵՐՈՒՄ ՍԵՓԱԿԱՆ ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ԹՎԱՅԻՆ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐԸ

Տ.Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Քննարկված է տորոիդային ռեզոնատորներում սեփական հաճախությունների որոշման խնդիրը: Լուծված է ալիքային հավասարումը FEMLAB ծրագրային փաթեթի օգնությամբ՝ կիրառելով վերջավոր տարրերի եղանակը, և ստացված են սեփական հաճախությունները: Ստացված հաճախությունների արժեքները լավ համընկնում են հաջորդական մոտավորությունների եղանակով ստացված հաճախությունների արժեքների հետ:

NUMERICAL METHODS OF DETERMINATION OF THE OWN ELECTROMAGNETIC OSCILLATIONS IN TOROIDAL CAVITIES

T.A. HARUTYUNYAN

The problem of own frequencies in toroidal cavities is considered. We solve the wave equation by the package FEMLAB, using the finite element method (FEM). Comparison of obtained frequencies with the frequencies calculated with the use of the method of successive approximations shows a good coincidence.