Известия НАН Армении, Физика, т.40, №2, с.105-108 (2005)

УДК 539.2

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СДВИГ ПЕРВОГО ПОРЯДКА РАЗРЕЖЕННОГО ФЕРМИ-ГАЗА В НЕКОММУТАТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. ДЖАХАН, Х. ШАХБАЗПУР

Университет Урмия, ИР Иран

(Поступила в редакцию 5 июня 2004 г.)

Получен гамильтониан взаимодействия для разреженного ферми-газа (при $T = 0\,\text{K}$) в некоммутативном пространстве и рассчитан энергетический сдвиг первого порядка. Показано, что некоммутативность приводит к понижению энергии системы.

В последние годы возрос интерес к физическим явлениям в некоммутативном пространстве–времени. Так, показана перенормируемость квантовой электродинамики в однопетлевом приближении [1-4]. Такой же результат получен для φ^4 теории в двухпетлевом приближении [5,6]. Сейчас известно, что идея некоммутативности пространства–времени приводит к неунитарным теориям поля [7,8], а теории некоммутативных пространств более приемлемы с физической точки зрения.

Целью настоящей работы было исследование влияния некоммутативности пространства на энергию разреженного ферми-газа при нулевой температуре. На основе гамильтониана взаимодействия рассчитан энергетический сдвиг первого порядка системы в случае двумерной некоммутативности. При этом мы ограничиваем расчеты вторым порядком по параметру некоммутативности вследствие его малости. Расчет энергетического сдвига первого порядка показывает, что энергия системы понижается.

Некоммутативное пространство–время характеризуется следующим образом [2,5,9]:

$$[\hat{x}_\alpha , \hat{x}_\beta] = i\gamma_{\alpha\beta} \quad (\gamma_{\alpha\beta} = -\gamma_{\beta\alpha} \;\; \text{и} \;\; \alpha, \beta = 0,1,2,3), \tag{1}$$

где x_α обозначает координаты пространства–времени, а $\gamma_{\alpha\beta}$ – параметр некоммутативности. Тогда некоммутативность пространства–времени для произведения полей включается в произведение Мояла:

$$\varphi_1(x) * \varphi_2(x) = \exp(\frac{i}{2}\gamma_{\alpha\beta}\partial_{\mu_\alpha}\partial_{\nu_\beta})\varphi_1(x+\mu)\varphi_2(x+\nu)\,|_{\mu=\nu=0}\,, \tag{2}$$

откуда следует, что произведение полей в некоммутативном пространстве на-до заменить на выражение (2) в обычном коммутативном пространстве (соответствие Вейля–Мояла). Нас интересует некоммутативность трехмерного пространства, т.е. $\gamma_{0\alpha} = 0$. Следовательно, для произведения Мояла пространственных экспонент имеем

$$e^{i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{x}} * e^{i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{x}} = e^{-i\mathbf{k}_1\wedge\mathbf{k}_2} e^{i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{x}}, \qquad (3)$$

$$\mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}_2 = \frac{1}{2}\gamma_{ij} k_{i1} k_{j2} \quad (i, j = 1,2,3). \qquad (4)$$

Рассмотрим теперь гамильтониан взаимодействия для многочастичной системы (см., например, [10-12]):

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2}\iint d^3x_1 d^3x_2 \Psi^+(\mathbf{x}_1)\Psi^+(\mathbf{x}_2) V_{\text{int}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\Psi(\mathbf{x}_2)\Psi(\mathbf{x}_1). \qquad (5)$$

Нас интересует система, которая взаимодействует мгновенно (разреженный ферми-газ), т.е.

$$V_{\text{int}} = g\delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \qquad (6)$$

где $g > 0$ есть постоянная взаимодействия (случай $g < 0$ исключается, чтобы избежать появления фазового перехода). Это приводит гамильтониан взаимодействия к виду

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} g \int d^3x \Psi^+(\mathbf{x})\Psi^+(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x}). \qquad (7)$$

Оператор поля $\Psi(\mathbf{x})$ можно разложить по операторам рождения и уничтожения:

$$\Psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k},\sigma}\Psi_{\mathbf{k},\sigma}(\mathbf{x}) a_{\mathbf{k},\sigma} = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k},\sigma} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \zeta_\sigma a_{\mathbf{k},\sigma}, \quad \sigma = 1,2 \text{ (спиновый индекс)}. \qquad (8)$$

В случае некоммутативного пространства, характеризуемого выражением (1), гамильтониан взаимодействия (7) может быть заменен на

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} g \int d^3x \Psi^+(\mathbf{x}) * \Psi^+(\mathbf{x}) * \Psi(\mathbf{x}) * \Psi(\mathbf{x}). \qquad (9)$$

Тогда, после подстановки оператора поля из (8) в (9) и использования уравнения (3), получаем

$$H_{\text{int}} = \frac{g}{2V}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_3}\sum_{\sigma_1\neq\sigma_2} e^{-i\mathbf{k}_1\wedge\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}_3\wedge\mathbf{k}} a^+_{\mathbf{k}_1,\sigma_1} a^+_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1,\sigma_2} a_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_3,\sigma_2} a_{\mathbf{k}_3,\sigma_1}. \qquad (10)$$

Энергетический сдвиг первого порядка (по константе взаимодействия) данной системы дается выражением [12]

$$E^{(1)} = \langle F | H_{\text{int}} | F \rangle, \qquad (11)$$

где $| F \rangle$ обозначает основное состояние (фермионный вакуум) системы.

Чтобы получить ненулевой результат для матричных элементов операторов рождения и уничтожения, следует произвести их спаривание. При этом есть только две возможности [10-12]:

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1, \sigma_1 = \mathbf{k}_3, \sigma_1 \\ \mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \sigma_2 = \mathbf{k} - \mathbf{k}_3, \sigma_2 \end{cases} \quad \text{(прямое спаривание) и}$$

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1, \sigma_1 = \mathbf{k} - \mathbf{k}_3, \sigma_2 \\ \mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \sigma_2 = \mathbf{k}_3, \sigma_1 \end{cases} \quad \text{(обменное спаривание).} \tag{12}$$

Из условия для рассеяния s-волны (т.е. $\sigma_1 \neq \sigma_2$) можно убедиться, что обменное спаривание приводит к нулевому результату для матричных элементов операторов рождения и уничтожения. Однако для прямого спаривания получаем

$$\delta_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_3} \langle F | a^{+}_{\mathbf{k}_1,\sigma_1} a^{+}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1,\sigma_2} a_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1,\sigma_2} a_{\mathbf{k}_1,\sigma_1} | F \rangle = \delta_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_3} \theta(k_f - |\mathbf{k}-\mathbf{k}_1|)\theta(k_f - k_1), \tag{13}$$

Отсюда для энергетического сдвига первого порядка следует

$$E^{(1)} = \frac{g}{V} \sum_{\mathbf{k},\xi} e^{2i\mathbf{k}\wedge\xi} \theta(k_f - |\xi - \frac{\mathbf{k}}{2}|)\theta(k_f - |\xi + \frac{\mathbf{k}}{2}|), \tag{14}$$

где волновые векторы переобозначены следующим образом:

$$\mathbf{k}_1 - \mathbf{k} = (\mathbf{k}_1 - \frac{\mathbf{k}}{2}) - \frac{\mathbf{k}}{2} = \xi - \frac{\mathbf{k}}{2}, \qquad \mathbf{k}_1 = (\mathbf{k}_1 - \frac{\mathbf{k}}{2}) + \frac{\mathbf{k}}{2} = \xi + \frac{\mathbf{k}}{2}. \tag{15}$$

Этот симметричный вид для энергетического сдвига первого порядка имеет то преимущество, что теперь интегрирование по его переменным (см. ниже) имеет простую геометрическую интерпретацию [12]. Ступенчатые функции, присутствующие в (14), ограничивают величины векторов и угол между ними до их максимальных и минимальных значений. Таким образом, суммирование симметрично и, следовательно, выражение (14) можно заменить на

$$E^{(1)} = \frac{g}{V} \sum_{\mathbf{k},\xi} \theta(k_f - |\xi - \frac{\mathbf{k}}{2}|)\theta(k_f - |\xi + \frac{\mathbf{k}}{2}|) \cos(2\mathbf{k}\wedge\xi). \tag{16}$$

Для большого объема суммирование в (16) можно заменить на интегралы:

$$E^{(1)} = \frac{V}{(2\pi)^6} g \int d^3k \int d^3\xi \, \theta(k_f - |\xi - \frac{\mathbf{k}}{2}|)\theta(k_f - |\xi + \frac{\mathbf{k}}{2}|) \cos(2\mathbf{k}\wedge\xi). \tag{17}$$

Теперь, чтобы получить конкретный результат для энергетического сдвига системы, предположим, что некоммутативность пространства ограничена двумя измерениями. Тогда, разлагая $\cos(2\mathbf{k}\wedge\xi)$ до второго порядка по параметру некоммутативности, получим окончательный результат для энергетического сдвига первого порядка на единицу объема:

$$\frac{E^{(1)}}{V} = \frac{1}{36} \cdot \frac{k_f^6}{\pi^4} g - \gamma^2 g \frac{k_f^{10}}{\pi^4} (3.88 \cdot 10^{-3}), \qquad (18)$$

Первый член в (18) есть энергетический сдвиг первого порядка разреженного ферми-газа в обычном коммутативном пространстве [11], в то время как второй член соответствует влиянию некоммутативности пространства на энергию системы. Для понимания этого результата следует вспомнить, что константа взаимодействия зависит от природы потенциала в проблеме двухчастичного рассеяния. Таким образом, рассмотрение многочастичного аспекты проблемы в некоммутативном пространстве требует учета влияния некоммутативности пространства на задачу двухчастичного рассеяния путем (некоммутативного) квантовомеханического рассмотрения. Вследствие этого, результат (18) можно интерпретировать как такую модификацию константы взаимодействия, обусловленную некоммутативностью пространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. **M.Hayakawa**. Perturbative analysis on infrared and ultraviolet aspects of noncommutative QED on R^4, hep-th /9912169.
2. **I.F.Raid** and **M.M.Sheikh-Jabbari.** Noncommutative QED and Anomalous Dipole Moments, hep-th /0008132.
3. **C.P.Martin** and **T.R.Ruiz**. Paramagnetic Dominance, The Beta Function and UV/IR Mixing in Noncommutative U(1), hep-th /0007131.
4. **N.T.Binh**. The one loop QED in noncommutative space, hep-th /0301084.
5. **A.Micu** and **M.M.Sheikh-Jabbari**. Noncommutative φ^4 theory at two loops, hep-th /0008057.
6. **I.Ya.Arefeva, D.M.Belov,** and **A.S.Koshelev**. Phys. Lett B, **476**, 431 (2000).
7. **J.Gomis** and **T.Mehen**. Space-Time Noncommutative Field Theories and Unitarity, hep-th /0007156.
8. **M.Chaichian, A.Demichev, P.Presnajder,** and **A.Tureanu**. Space-Time Noncommutativity, Discreteness of Time and Unitarity, hep-th /0007156.
9. **L.Alvarez-Gaume** and **S.R.Wadia**. Gauge theory on a quantum phase space, hep-th /0006219.
10. **G.Mahan**. Many particle physics. Plenum Press, New York, 1990.
11. **A.A.Abrikosov, L.P.Gorkov,** and **I.E.Dzyaloshinski**. Methods of quantum field theory in statistical physics. Dover Publication, New York,1963.
12. **A.L.Fetter** and **J.D.Walecka**. Quantum theory of many particle systems. McGraw-Hill, New York, 1971.

FIRST-ORDER ENERGY SHIFT OF A DILUTE FERMI GAS IN NONCOMMUTATIVE SPACE

A. JAHAN, KH. SHAHBAZPOUR

The interaction Hamiltonian for a dilute Fermi gas (at T=0 K) in the case of noncommutative space is derived and the first-order energy shift is calculated. It is shown that the noncommutativity of space leads to the decrease in the energy of the system.